República de Honduras
Secretaría de Educación

9

Libro del Estudiante
Noveno grado

III Ciclo
Educación Básica

Matemáticas

El **Libro del Estudiante de Matemáticas - Noveno grado del Tercer Ciclo de Educación Básica**, es propiedad de la Secretaría de Estado en el Despacho de Educación de Honduras, C.A.

Presidencia de la República

Secretaría de Estado en el Despacho de Educación

Subsecretaría de Asuntos Técnico Pedagógicos

Subsecretaría de Asuntos Administrativos y Financieros

Dirección General de Desarrollo Profesional

Esta obra fue revisada y ajustada en el marco del Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática (PROMETAM Fase III), que ejecutó la **Secretaría de Estado en el Despacho de Educación** en coordinación con la **Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM),** con el apoyo técnico de la **Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).**

Autores – Secretaría de Educación
Luisa Naomi Herrera Torres
Mirna Lizeth Rodríguez Gudiel
Víctor Manuel Carranza Menjívar
Carlos Antonio Mejía
José Hipólito Vásquez Rodríguez

Autores - UPNFM
Karla Valesca Matute Colindres
Luis Antonio Soto Hernández

Revisión
Flavia María Romero Camacho

Diseño Gráfico
Raúl Antonio Urquía Sorto

Revisión Técnico Gráfico y Pedagógico 2018
Dirección General de Tecnología Educativa

1ª avenida entre 2ª y 4ª calle de Comayagüela, M.D.C.
Honduras, C.A.
www.se.gob.hn
Matemáticas, Noveno grado, Libro del Estudiante
Tercera edición, revisada y ajustada en el 2018

República de Honduras
Secretaría de Educación

9

Libro del Estudiante
Noveno grado

III Ciclo
Educación Básica

Matemáticas

ORIENTACIONES SOBRE EL USO DEL LIBRO DEL ESTUDIANTE

Queridos Estudiantes:

La Secretaría de Estado en el Despacho de Educación de Honduras con mucha satisfacción le entrega este **Libro del Estudiante**, para que lo use en el aprendizaje de las Matemáticas. El mismo pertenece a su centro educativo, por lo tanto, debe apreciarlo, cuidarlo y tratarlo con mucho cariño para que pueda ser utilizado en años posteriores. Para cuidarlo le sugerimos lo siguiente:

1. Forre el **Libro del Estudiante** con papel y/o plástico, y sobre el forro escriba su nombre, grado, sección a la que pertenece, el nombre del docente y del centro educativo.

2. Evite rayar, manchar o romper las partes internas o externas del **Libro**, para que al devolverlo el mismo esté en buenas condiciones.

3. Todos los ejercicios propuestos en el **Libro** debe desarrollarlos en su cuaderno de Matemáticas.

4. Está permitido llevar a su casa el **Libro**, cuidando que otras personas que conviven con usted no se lo manchen, rayen o rompan.

5. Recuerde llevar el **Libro** al centro educativo todos los días que tenga la clase de Matemáticas.

6. Antes de usar su **Libro**, por favor lávese y séquese las manos, evite las comidas y bebidas cuando trabaje en él; asimismo, limpie muy bien la mesa o el lugar donde lo utilice.

7. Tenga cuidado de usar su **Libro** como objeto para jugar, evite tirarlo o sentarse en él.

8. Al pasar las hojas o buscar el tema en el **Libro**, debe tener cuidado de no doblarles las esquinas, rasgarlas o romperlas; también cuide que no se desprendan las hojas por el mal uso.

Recuerde que este **Libro** es una herramienta de apoyo para usted, por lo que debe conservarlo muy bonito, aseado y sobre todo evitar perderlo, porque no lo encontrará a la venta.

Presentación

La Secretaría de Educación presenta el "**Libro del Estudiante" de Noveno Grado del área de Matemáticas para el Tercer Ciclo de Educación Básica**, que tiene su fundamento en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica (DCNEB), mismo que fue revisado y ajustado por un equipo técnico en el marco del Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemáticas (PROMETAM FASE III).

Con el uso de este Libro y con la ayuda del docente se podrá aprender más matemática, encontrándole sentido al conocimiento ya que se proponen situaciones de la vida diaria donde se aplican conceptos y procedimientos, con el desarrollo de las actividades planteadas se comprenderá cada vez más, permitiendo apreciar las matemáticas como un quehacer humano y un medio para desenvolverse en la vida.

En la búsqueda del camino hacia una nueva Honduras, el recurso humano es el único capaz de generar riquezas a través de la aplicación de sus conocimientos, competencias y acciones; por lo que se espera que los educandos se comprometan a elevar su nivel educativo para incorporarse al mercado laboral.

Secretario de Estado
en el Despacho de Educación

Índice

Unidad 1

Polinomios

Lección 1: Multiplicación y división de polinomios

Lección 2: Productos notables

Lección 3: Factorización de polinomios

Unidad 1

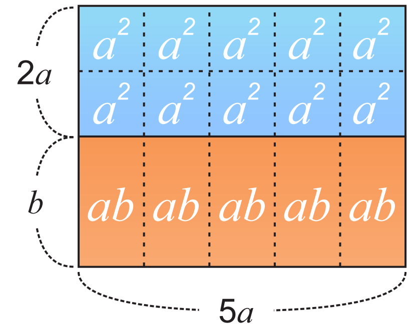
Polinomios

Lección 1: Multiplicación y división de polinomios

Sección 1: Multiplicación y división de un polinomio por un monomio

Ejemplo 1.1

Encuentre el área de un rectángulo cuya base es $5a$ y su altura es $(2a + b)$.



Solución:
En la figura de la derecha se puede observar que hay 10 cuadrados pequeños con área de a^2 cada uno y 5 rectángulos con área de ab. Es decir que el área del rectángulo es $10a^2 + 5ab$.

Respuesta: $10a^2 + 5ab$

Lo anterior se puede considerar como: Área = base $\times$ altura

$$\begin{aligned} &= 5a \times (2a + b) \\ &= 5a \times 2a + 5a \times b \\ &= 10a^2 + 5ab \end{aligned}$$

Para multiplicar un monomio por un polinomio se aplica la **propiedad distributiva** (el monomio se multiplica por cada uno de los términos del polinomio).

$$a(b + c) = ab + ac \qquad (a + b)c = ac + bc$$

Ejemplo 1.2

Calcule.

a) $-6x(x - 2y)$ b) $(2a + b) \times 5a$

Solución:

a) $-6x(x - 2y) = -6x \times x + (-6x) \times (-2y)$
$= -6x^2 + 12xy$

b) $(2a + b) \times 5a = 2a \times 5a + b \times 5a$
$= 10a^2 + 5ab$

Se puede omitir un paso:
a) $-6x(x - 2y) = -6x^2 + 12xy$
b) $(2a + b) \times 5a = 10a^2 + 5ab$

Ejercicio 1.1 Calcule.

a) $(2x + y) \times 7x$ b) $(3a - b) \times 4a$ c) $(5a - 6b) \times (-2b)$
d) $4x(2x - 1)$ e) $2x(x + 3y)$ f) $-3a(8a + 7b)$

Ejemplo 1.3

Calcule.

a) $(6a^2 - 9a) \div 3a$

b) $(2x^2 + 4xy) \div \frac{2}{3}x$

$(A + B) \div C = \frac{A+B}{C}$
$= \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$

Solución:

a) $(6a^2 - 9a) \div 3a = \frac{6a^2 - 9a}{3a}$

$$= \frac{6a^2}{3a} - \frac{9a}{3a}$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{6}} \times \overset{1}{\cancel{a}} \times a}{\underset{1}{\cancel{3}} \times \underset{1}{\cancel{a}}} - \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{1}{\cancel{a}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \times \underset{1}{\cancel{a}}}$$

$$= 2a - 3$$

b) $(2x^2 + 4xy) \div \frac{2}{3}x = (2x^2 + 4xy) \div \frac{2x}{3}$

$$= (2x^2 + 4xy) \times \frac{3}{2x}$$

$$= 2x^2 \times \frac{3}{2x} + 4xy \times \frac{3}{2x}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times x \times 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \times \underset{1}{\cancel{x}}} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times y \times 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \times \underset{1}{\cancel{x}}}$$

$$= 3x + 6y$$

$\frac{2}{3}x = \frac{2x}{3}$

$A \div \frac{a}{b} = A \times \frac{b}{a}$

Ejercicio 1.2 Calcule.

a) $(5x^2 - 10x) \div 5x$

b) $(8a^2 - 2a) \div 2a$

c) $(6ax + 3ay) \div (-3a)$

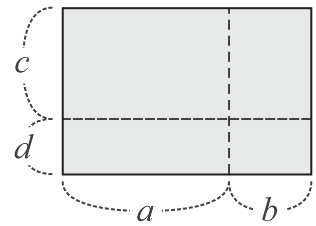
d) $(-10x^2 + x) \div \frac{x}{2}$

e) $(3x^2 + 6xy) \div (-\frac{3}{4}x)$

f) $(15x^2y - 9xy^2) \div \frac{3}{2}xy$

Ejemplo 1.4

Encuentre el área de un rectángulo cuya base es $(a + b)$ y su altura es $(c + d)$.



Solución:

Área = base $\times$ altura

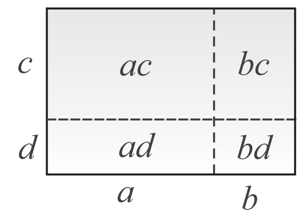
$= (a + b) \times (c + d)$

$= (a + b) \times M$ ... Sustituir $(c + d) = M$

$= a \times M + b \times M$ ... Propiedad distributiva

$= a \times (c + d) + b \times (c + d)$ ... Sustituir $M = (c + d)$

$= ac + ad + bc + bd$ ... Propiedad distributiva



Respuesta: El área es $ac + ad + bc + bd$

Observe que la suma del área de cada rectángulo es igual al área del rectángulo más grande.

Generalmente a la expresión $ac + ad + bc + bd$ se le llama desarrollo del producto de $(a + b) \times (c + d)$.

$(a + b) \times (c + d)$ se expresa como $(a + b)(c + d)$ eliminando el signo $\times$.

Al producto de polinomios y/o monomios expresado en la forma de polinomio se le llama **desarrollo del producto.**

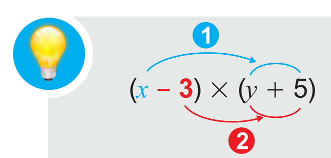
Ejemplo 1.5

Desarrolle $(x - 3)(y + 5)$.

Solución:

$(x - 3)(y + 5) = x \times (y + 5) - 3 \times (y + 5)$

$= xy + 5x - 3y - 15$



Ejercicio 1.3

Desarrolle.

a) $(a + b)(c - d)$

b) $(a - b)(c - d)$

c) $(x + 2)(y + 3)$

d) $(x - 1)(y + 4)$

Ejemplo 1.6

Calcule $(x-4)(x-7)$.

(1)

$(x-4)(x-7)$

(2)

Solución:

$$(x-4)(x-7) = x(x-7) - 4(x-7)$$
$$= x^2 \underbrace{-\,7x - 4x} + 28$$
$$= x^2 - 11x + 28$$ ... Reducir términos semejantes

$x(x-7) - 4(x-7)$ es la expresión de omitir el signo $\times$ de $x \times (x-7) - 4 \times (x-7)$

Ejercicio 1.4 Calcule.

a) $(x-2)(x-6)$ b) $(x-4)(x+5)$

c) $(2a+1)(2a+4)$ d) $(3x+5)(3x-7)$

Ejemplo 1.7

(1)

$(3a+2b)(2a-b)$

(2)

Calcule $(3a+2b)(2a-b)$.

Solución:

$$(3a+2b)(2a-b) = 3a(2a-b) + 2b(2a-b)$$
$$= 6a^2 \underbrace{-\,3ab + 4ab} - 2b^2$$
$$= 6a^2 + ab - 2b^2$$

Ejercicio 1.5 Calcule.

a) $(3a+2b)(2a+3b)$ b) $(9a-2b)(5a+6b)$

Ejemplo 1.8

Calcule $(3x-y)(4x+3y-2)$.

Solución:

$$(3x-y)(4x+3y-2) = 3x(4x+3y-2) - y(4x+3y-2)$$
$$= 12x^2 + 9xy - 6x - 4xy - 3y^2 + 2y$$ ... Propiedad distributiva
$$= 12x^2 + 5xy - 6x - 3y^2 + 2y$$ ... Reducir términos semejantes

Ejercicio 1.6 Calcule.

a) $(a+1)(a+b-1)$ b) $(a+2b)(2a+b+1)$

c) $(x+2y-1)(2x-y)$ d) $(x-y+3)(3x-2y)$

Sección 3: Valor numérico de un polinomio

Ejemplo 1.9

Encuentre el valor numérico del polinomio $a^2 - 3a + 7$ si $a = 2$

Solución:

Se sustituye la variable a por 2.

$$a^2 - 3a + 7 = (2)^2 - 3(2) + 7$$
$$= 4 - 6 + 7$$
$$= 5$$

Recuerde que cuando se sustituye la variable por un valor, se usa paréntesis. 3(2) significa 3×2

Respuesta: 5

Ejercicio 1.7 Encuentre el valor numérico, considerando los valores indicados de las variables.

a) $2n^2 + 5n - 4$; si $n = 5$

b) $2x^3 - 5x^2 + 2x - 12$; si $x = 2$

El valor numérico de un polinomio es el valor que se obtiene al sustituir las variables por números y desarrollar las operaciones indicadas.

Ejemplo 1.10

Encuentre el valor numérico del polinomio $2a^2 + 3a + 8$; si $a = -2$.

Solución:

Se sustituye la variable a por -2.

$$2a^2 + 3a + 8 = 2(-2)^2 + 3(-2) + 8$$
$$= 8 - 6 + 8$$
$$= 10$$

$2(-2)^2 = 2 \times (-2)^2 = 2 \times 4 = 8$

Respuesta: 10

Ejercicio 1.8 Encuentre el valor numérico, considerando los valores indicados de las variables.

a) $3a^2 + 2a - 8$; si $a = -3$

b) $m^3 + 3m^2 + 3m - 5$; si $m = -2$

Ejemplo 1.11

Encuentre el valor numérico del polinomio $2a - 4b + 1$ si $a = 3$ y $b = -2$

Solución:

$$2a - 4b + 1 = 2(3) - 4(-2) + 1$$
$$= 6 + 8 + 1$$
$$= 15$$

Respuesta: 15

Ejercicio 1.9 Encuentre el valor numérico.

a) $8x + 3y - 8$; si $x = 1$ y $y = -2$

b) $a - 3b - 3$; si $a = -1$ y $b = -2$

c) $4x - y - 8$: si $x = 3$ y $y = 0$

d) $3m + n^2 - 3$; si $m = 1$ y $n = -3$

Lección 2: Productos notables

Sección 1: Producto de binomios con término común

Ejemplo 2.1

Encuentre el número que va en la casilla:

a) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + \square x + \square$

b) $(x - 2)(x + 3) = x^2 + \square x + \square$

c) $(x + 2)(x - 3) = x^2 + \square x + \square$

d) $(x - 2)(x - 3) = x^2 + \square x + \square$

Solución:

a) $(x + 2)(x + 3) = x(x + 3) + 2(x + 3)$
$= x^2 + 3x + 2x + 6$
$= x^2 + 5x + 6$

Observe: $(+2) + (+3) = \boxed{+5}$ y
$(+2) \times (+3) = \boxed{+6}$

b) $(x - 2)(x + 3) = x(x + 3) - 2(x + 3)$
$= x^2 + 3x - 2x - 6$
$= x^2 + x - 6$

Observe: $(-2) + (+3) = \boxed{+1}$ y
$(-2) \times (+3) = \boxed{-6}$

c) $(x + 2)(x - 3) = x(x - 3) + 2(x - 3)$
$= x^2 - 3x + 2x - 6$
$= x^2 - x - 6$

Observe: $(+2) + (-3) = \boxed{-1}$ y
$(+2) \times (-3) = \boxed{-6}$

d) $(x - 2)(x - 3) = x(x - 3) -2(x - 3)$
$= x^2 - 3x - 2x + 6$
$= x^2 - 5x +6$

Observe: $(-2) + (-3) = \boxed{-5}$ y
$(-2) \times (-3) = \boxed{+6}$

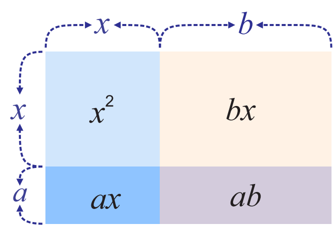
El producto resultante es un trinomio; el coeficiente del segundo término es **la suma** de dos números y el tercer término es el **producto** de esos mismos números.

$-x = (-1) \times x$
$x = 1 \times x$

En forma general:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ax + ab$$
$$= x^2 + \underbrace{(a + b)}_{\text{Suma}}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto}}$$

Descripción gráfica es:



Producto de binomios con término común:
$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Ejemplo 2.2

Resuelva aplicando el producto de binomios.

a) $(x + 3)(x + 8)$

b) $(x + 3)(x - 8)$

$(x + 3)(x - 8)$
$= x^2 \underbrace{- 5x}_{3 + (-8)} \underbrace{- 24}_{3 \times (-8)}$

Solución:

a) $(x + 3)(x + 8) = x^2 + (3 + 8)\,x + (8)(3)$
$= x^2 + 11x + 24$

b) $(x + 3)(x -8) = x^2 + (3 - 8)x + (3)(-8)$
$= x^2 - 5x - 24$

Ejercicio 2.1

Desarrolle los siguientes binomios con un término común.

a) $(x + 2)(x + 5)$

b) $(x - 3)(x + 6)$

c) $(x + 9)(x - 5)$

d) $(x - 6)(x - 4)$

e) $(a - 1)(a + 2)$

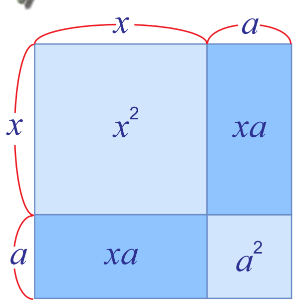
f) $(y + 3)(y - 5)$

Sección 2: El cuadrado de la suma o diferencia de dos monomios

Ejemplo 2.3

Desarrolle los siguientes productos. a) $(x + a)^2$ b) $(x - a)^2$

Solución:



a) $(x + a)^2$

$(x + a)^2 = (x + a)(x + a)$

Recuerde: $a + a = 2a$

$a \times a = a^2$

Por consiguiente

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

b) $(x - a)^2$

$(x - a)^2 = (x - a)(x - a)$

Recuerde: $(-a) + (-a) = -2a$

$(-a) \times (-a) = (-a)^2 = a^2$

Por consiguiente

$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

El cuadrado de la suma de dos monomios es:

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

El cuadrado de la diferencia de dos monomios es:

$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

Ejemplo 2.4

Desarrolle. a) $(x + 5)^2$ b) $(x - 3)^2$

Solución:

a) $(x + 5)^2 = x^2 + 2(5)x + (5)^2$

$= x^2 + 10x + 25$

b) $(x - 3)^2 = x^2 - 2(3)x + (3)^2$

$= x^2 - 6x + 9$

$(x + a)^2 = x^2 + 2\,a\,x + a^2$

$\uparrow \quad \uparrow \quad\quad \uparrow \quad\quad \uparrow\uparrow \quad \uparrow$

$(x + 5)^2 = x^2 + 2(5)x + (5)^2$

Ejercicio 2.2 Desarrolle:

a) $(a + 3)^2$ b) $(x - 7)^2$ c) $(y + 4)^2$

Ejemplo 2.5

Desarrolle $(a + 4n)^2$.

Solución:

$(a + 4n)^2 = a^2 + 2a(4n) + (4n)^2$

$= a^2 + 8an + 16n^2$

En general

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ejercicio 2.3 Desarrolle aplicando el cuadrado de la suma o de la diferencia de dos monomios.

a) $(a + 4b)^2$ b) $(x - 5y)^2$

Sección 3: Producto de la forma $(x + a)(x - a)$

Ejemplo 2.6

Desarrolle $(x + a)(x - a)$.

Considerando la forma de la Sección 2
Solución 1:

$$\begin{aligned}(x + a)(x - a) &= (x + a)[x + (-a)]\\ &= x^2 + [a + (-a)]x + a \times (-a) \dots \text{ Usar la forma } (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab\\ &= x^2 + 0x - a^2\\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

Considerando propiedad distributiva
Solución 2:

$$\begin{aligned}(x + a)(x - a) &= x(x - a) + a(x - a)\\ &= x^2 - ax + ax - a^2\\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

La expresión $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$ se conoce como **diferencia de cuadrados**.

Ejemplo 2.7

Desarrolle.

a) $(x + 5)(x - 5)$ b) $(3x + 2y)(3x - 2y)$ c) $(x - \frac{3}{5})(x + \frac{3}{5})$

Solución:

a) $(x + 5)(x - 5) = x^2 - (5)^2$
$= x^2 - 25$

b) $(3x + 2y)(3x - 2y) = (3x)^2 - (2y)^2$
$= 9x^2 - 4y^2$

c) $(x - \frac{3}{5})(x + \frac{3}{5}) = x^2 - (\frac{3}{5})^2$
$= x^2 - \frac{9}{25}$

Ejercicio 2.4 Desarrolle.

a) $(x + 7)(x - 7)$
b) $(x - 3)(x + 3)$
c) $(5x - 1)(5x + 1)$
d) $(x + 2y)(x - 2y)$
e) $\left(a - \frac{1}{3}\right)\left(a + \frac{1}{3}\right)$
f) $(a - 6b)(a + 6b)$

Sección 4: Producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$

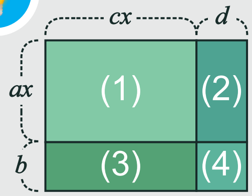
Ejemplo 2.8

Desarrolle $(ax + b)(cx + d)$.

Solución:

$$\begin{aligned}(ax + b)(cx + d) &= ax(cx + d) + b(cx + d)\\ &= acx^2 + adx + bcx + bd\\ &= acx^2 + (ad + bc)x + bd\end{aligned}$$

Considerando las áreas



$$\begin{aligned}&\quad\ \ \text{(1)}\quad\ \text{(2)}\quad\ \text{(3)}\quad\ \text{(4)}\\ (ax + b)(cx + d) &= acx^2 + adx + bcx + bd\\ &= acx^2 + (ad + bc)x + bd\end{aligned}$$

Desarrollo del producto

$$(ax + b)(cx + d) = \overset{1}{a}c\overset{}{x^2} + (\overset{2}{a}d + \overset{3}{b}c)x + \overset{4}{b}d$$

Producto de binomios desarrollado

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)\,x + bd$$

Se conoce como **producto de binomios con coeficiente de la variable diferente de 1.**

Ejemplo 2.9

Encuentre el número que va en la casilla, utilizado el producto de binomios:

a) $(3x + 1)(2x + 4) = \boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{}$

b) $(3x - 2)(5x - 4) = \boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{}$

Solución:

a) $(ax + b)\,(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)\,x + bd$

$a = 3$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 4$

$ac = 6$, $ad + bc = 14$, $bd = 4$ entonces,

$(3x + 1)\,(2x + 4) = \boxed{6}x^2 + \boxed{14}x + \boxed{4}$

$$(3x + 1)(2x + 4) = \overset{1}{6}x^2 + \underbrace{(\overset{2}{12} + \overset{3}{2})}\,x + \overset{4}{4}$$

b) $(ax + b)\,(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)\,x + bd$

$a = 3$, $b = -2$, $c = 5$, $d = -4$

$ac = 15$, $ad + bc = -22$, $bd = 8$ entonces,

$(3x - 2)\,(5x - 4) = \boxed{15}\,x^2 + \boxed{-22}\,x + \boxed{8}$

$= 15x^2 - 22x + 8$

Ejercicio 2.5 Desarrolle.

a) $(2x + 1)(3x + 2)$ b) $(3x + 2)(2x - 1)$ c) $(2x - 3)(5x + 7)$

d) $(3y + 3)(2y - 4)$ e) $(3x - 3)(2x - 4)$ f) $(5m - 2)(3m + 2)$

Sección 5: Aplicación de los productos notables

Ejemplo 2.10

Calcule $(x+2)^2-(x+4)(x-1)$.

Solución:

$(x+2)^2-(x+4)(x-1) = x^2+4x+4-(x^2+3x-4)$ ... Por $(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$ y $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

$= x^2+4x+4-x^2-3x+4$ ... Cambiar de signo x^2+3x-4 para quitar paréntesis

$= x+8$ ... Reducir términos semejantes

Ejercicio 2.6 Calcule.

a) $(2x-3)^2+(2x-1)(4x+3)$

b) $2(x-2)^2+(x+2)^2$

Ejemplo 2.11

Calcule $(2x-3)(x+4)-2(x+1)(x-1)$.

Solución:

$(2x-3)(x+4)-2(x+1)(x-1) = 2x^2+5x-12-2(x^2-1)$ ... Por $(ax+b)(cx+d) = acx^2+(bc+ad)x+bd$ y $(x+a)(x-a) = x^2-a^2$

$= 2x^2+5x-12-2x^2+2$ ... Propiedad distributiva en $-2(x^2-1)$

$= 5x-10$ ... Reducir términos semejantes

Ejercicio 2.7 Calcule.

a) $(x-2)(x+3)-(x-1)(x+1)$

b) $(x-1)(x+1)-(3x+1)(x+2)$

c) $(m+2)(m-2)+(m+1)(m+4)$

Ejemplo 2.12

Aplique los productos notables para el cálculo de números.

a) 95^2

b) 31×29

Solución:

a) $95^2 = (100-5)^2$
$= 100^2-2(100)(5)+5^2$
$= 10000-1000+25$
$= 9025$

b) $31 \times 29 = (30+1)(30-1)$
$= 30^2-1^2$
$= 900-1$
$= 899$

Ejercicio 2.8 Calcule.

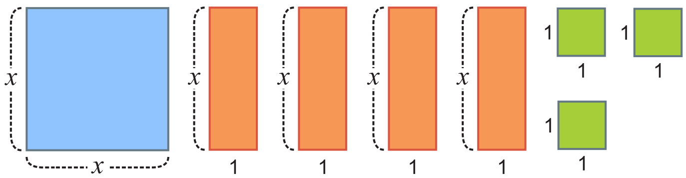
a) 19^2

b) 71×69

Lección 3: Factorización de polinomios

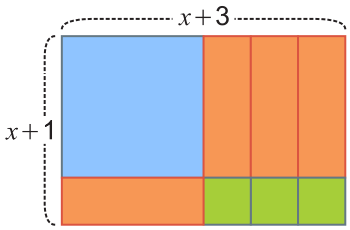
Sección 1: Factorización

Forme un rectángulo con las 8 figuras, considerando las medidas propuestas:



1 cuadrado con área: x^2
4 rectángulos, cada uno con área: $1 \times x = x$
3 cuadrados, cada uno con área: $1^2 = 1$

¿Cuánto mide el largo y el ancho? Exprese su área.



El largo mide: $x + 3$
El ancho mide: $x + 1$
El área es: $(x + 3)(x + 1)$

La suma de las 8 figuras es el área del rectángulo, es decir:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$$

Las expresiones $(x + 3)$ y $(x + 1)$ son los factores del polinomio $x^2 + 4x + 3$

Al proceso que consiste en expresar un polinomio como el producto de polinomios se llama **factorización**. Por ejemplo $x^2 + 4x + 3$ se factoriza como el producto $(x + 3)(x + 1)$; en este caso a cada uno de estos polinomios $x + 3$ y $x + 1$; se llaman **factores**.

Factorización

$$\boxed{x^2 + 4x + 3} = \boxed{(x + 3)(x + 1)}$$

Desarrollo

Ejemplo 3.1

¿Cuales de los siguientes polinomios están expresados como una factorización?

a) $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)\,(x - 2)$ b) $x^2 + 8x + 7 = x(x + 8) + 7$

Solución:

a) El polinomio $x^2 - 5x + 6$ está expresado como el producto de los polinomios $x - 3$ y $x - 2$. Se puede decir que el polinomio $x^2 - 5x + 6$ esta factorizado como el producto de los factores $x - 3$ y $x - 2$.

b) El polinomio $x^2 + 8x + 7$ no esta expresado como el producto de polinomios, por que tiene un producto y una suma.

Respuesta: a)

Ejercicio 3.1 ¿Cuales de los siguientes polinomios están expresados como una factorización?

a) $x^2 - x - 2 = (x - 2)\,(x + 1)$ b) $x^2 - 6x + 5 = x(x - 6) + 5$

c) $x^2 - 2x = x(x - 2)$ d) $8x + 4 = (3x + 2) + (5x + 2)$

Sección 2: Factorización por factor común

Ejemplo 3.2

Factorice $6x^2 + 3x$.

Solución:

$6x^2$ puede expresarse como: $3x \times 2x$

$3x$ puede expresarse como: $3x \times 1$

El factor común de $6x^2$ y $3x$ es $3x$.

Por consiguiente:

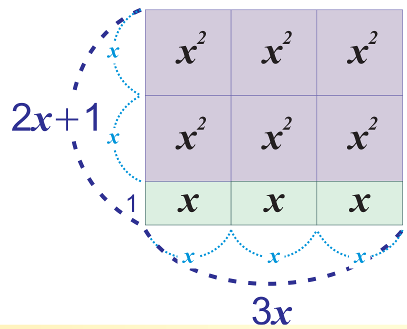
$6x^2 + 3x = \boxed{3x} \times 2x + \boxed{3x} \times 1$

$= \boxed{3x}\,(2x + 1)$ ... Propiedad distributiva

Respuesta: $3x(2x + 1)$

El 1 es factor de todo término.
Por ejemplo: $3x = 1 \times 3 \times x$.
Generalmente el 1 no se escribe.

Gráficamente sería:



Factorizar por factor común es aplicar la propiedad distributiva.
Ejemplo: $Ax + Ay = A(x + y)$

Ejercicio 3.2 Factorice:

a) $ab + ac$ b) $4ax - 2a$ c) $2ax - 3ay$

d) $8a^2b + 4b^2$ e) $a^2b - ab^2$ f) $ax + bx + cx$

Ejemplo 3.3

Factorice $5ab + 5ac + 2b + 2c$.

Solución:

En algunas expresiones los términos pueden ser agrupados de manera que factorizando cada grupo tenga un factor común.

$5ab + 5ac + 2b + 2c = (5ab + 5ac) + (2b + 2c)$ …Agrupar términos de manera que tengan un factor común.

$= 5a(b + c) + 2(b + c)$ …Factorizar cada grupo.

$= 5aM + 2M$ ...Sustituir $b + c = M$

$= (5a + 2)M$ …Factorizar (Propiedad distributiva)

$= (5a + 2)(b + c)$ …Sustituir $M = b + c$

A veces nos es conveniente agrupar el primer término con el segundo y el tercero con el cuarto, como en el **Ejemplo 3.3**, en algunos casos es conveniente agrupar el primer término con el tercer término y el segundo con el cuarto y también el primero con el cuarto y el segundo con el tercero.

Procedimiento para factorizar por agrupación de términos

1. Agrupar términos de manera que tengan un factor común.
2. Factorizar cada grupo.
3. Aplicar la propiedad distributiva.

Ejercicio 3.3 Factorice:

a) $(2wx + 2wy) + (xy + y^2)$ b) $3ac + 3ad + 2bc + 2bd$

Sección 3: Factorización por tanteo

Vamos a usar el producto de dos binomios con un término común en sentido contrario.

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Ejemplo 3.4

Factorice $x^2 + 5x + 6$.

Solución:

Como $x^2 + 5x + 6$ es el producto de los factores de la forma $(x + a)(x + b)$ y este es un producto notable que su desarrollo es $x^2 + (a + b)x + ab$.

Entonces para factorizar $x^2 + 5x + 6$ como el producto de dos factores, hay que buscar dos números a y b que su suma sea 5 y su producto es 6. Desarrollemos los siguientes pasos:

1) Busque dos números enteros que el producto es 6, es decir $ab = 6$.

   1 y 6 porque $(1)(6) = 6$. (-1) y (-6) porque $(-1)(-6) = 6$.

   2 y 3 porque $(2)(3) = 6$. (-2) y (-3) porque $(-2)(-3) = 6$.

2) Ahora calcule la suma de los pares de números enteros que se encontraron en el paso 1) determinar cuál par suma 5, es decir $a + b = 5$. Elabore la siguiente tabla:

Dos números enteros	Producto	Suma	
1, 6	$(1)(6) = 6$	$1 + 6 = 7$	X
−2, −3	$(-2)(-3) = 6$	$(-2) + (-3) = -5$	X
−1,−6	$(-1)(-6) = 6$	$(-1) + (-6) = -7$	X
2, 3	$(2)(3) = 6$	$2 + 3 = 5$	✓

Entonces los números que se buscan son 2 y 3, por lo tanto $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

$x^2 + 5x + 6$
$= x^2 + (2 + 3)x + (2)(3)$
$= (x + 2)(x + 3)$

$x^2 + (a + b)x + ab$
$= (x + a)(x + b)$

Respuesta: $(x + 2)(x + 3)$

A este tipo de factorización se le llama **factorización por tanteo**.

Ejercicio 3.4 Factorice.

a) $x^2 + 3x + 2$ b) $x^2 + 7x + 6$

c) $x^2 + 8x + 12$ d) $x^2 + 8x + 15$

Ejemplo 3.5

Factorice $x^2 - 5x + 6$.

Solución:

En este ejemplo hay que buscar dos números que sumados den −5 y el producto de ambos sea 6.
Analicemos esas posibilidades.

Dos números enteros	Producto	Suma	
1, 6	$(1)(6) = 6$	$1 + 6 = 7$	X
2, 3	$(2)(3) = 6$	$2 + 3 = 5$	X
−1,−6	$(-1)(-6) = 6$	$(-1) + (-6) = -7$	X
−2, −3	$(-2)(-3) = 6$	$(-2) + (-3) = -5$	✓

Como el producto debe ser 6 positivo, entonces ambos números deben ser positivos o negativos.
$(+)(+) = +$, $(-)(-) = +$

Entonces −2 y −3 son los números que se buscaba.
Por tanto: $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 + [(-2) + (-3)]x + (-2)(-3)$$
$$= (x - 3)(x - 2)$$

Respuesta: $(x - 3)(x - 2)$

Ejercicio 3.5 Factorice.

a) $x^2 - 4x + 3$ b) $x^2 - 8x + 7$ c) $x^2 - 9x + 18$ d) $x^2 - 10x + 16$

Ejemplo 3.6

Factorice $x^2 - 5x - 6$.

Solución:

Entonces para factorizar $x^2 - 5x - 6$ hay que buscar dos números cuya suma sea −5 y su producto −6. Además nótese que siendo la suma negativa, el número de mayor valor absoluto ha de ser negativo.

Analicemos las posibilidades.

Dos números enteros	Producto	Suma	
(−1) y (+6)	$(-1)(6) = -6$	$-1 + 6 = 5$	X
(−2) y (+3)	$(-2)(3) = -6$	$-2 + 3 = 1$	X
(+1) y (−6)	$(1)(-6) = -6$	$1 + (-6) = -5$	✓
(+2) y (−3)	$(2)(-3) = -6$	$2 + (-3) = -1$	X

El producto debe ser −6 entonces ambos números deben tener diferente signo.
$(+)(-) = -$
$(-)(+) = -$

Entonces 1 y −6 son los números que buscaba.
Por tanto: $x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6)$

$$x^2 - 5x - 6 = x^2 + [1 + (-6)]x + (1)(-6)$$
$$= (x + 1)(x - 6)$$

Respuesta: $(x + 1)(x - 6)$

Ejercicio 3.6 Factorice.

a) $x^2 - 2x - 3$ b) $x^2 - x - 6$ c) $x^2 - 3x - 10$ d) $x^2 - 2x - 35$

Sección 4: Factorización de trinomio cuadrado perfecto

Vamos a usar el producto notable en sentido contrario.

$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ y $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$

Observe que:

En el primer trinomio, el segundo término es: $\mathbf{2}ax$

En el segundo trinomio, el segundo término es: $-\mathbf{2}ax$

Ejemplo 3.7

Factorice.

a) $x^2 + 8x + 16$ b) $x^2 - 6x + 9$

Solución:

a) Para factorizar $x^2 + 8x + 16$, observe que los términos x^2 y 16 son cuadrados perfectos.
Y el doble de la raíz del 3er término por la raíz del 1er término es igual a $8x$.

$$\text{Entonces } x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2(4)x + (4)^2$$
$$= (x + 4)^2$$

Puede utilizar lo visto en la clase anterior, buscar dos números cuya suma sea 8 y su producto 16, es decir, $a + b = 8$ y $ab = 16$.

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + (4 + 4)x + (4)(4)$$
$$= (x + 4)(x + 4)$$
$$= (x + 4)^2$$

La factorización resulta el cuadrado de un binomio $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

b) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2(3)x + (3)^2$
$= (x - 3)^2$

La factorización resulta el cuadrado de un binomio $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

A este tipo de factorización se le llama factorización de **trinomio cuadrado perfecto.**

Ejercicio 3.7 Factorice.

a) $x^2 + 2x + 1$ b) $x^2 - 4x + 4$ c) $x^2 + 14x + 49$

d) $x^2 - 12x + 36$ e) $x^2 + 12x + 36$ f) $a^2 - 10a + 25$

Ejemplo 3.8

Factorice $9x^2 - 30x + 25$.

Solución:

$$9x^2 - 30x + 25 = (3x)^2 - 2(3x)(5) + (5)^2$$
$$= (3x - 5)^2$$

$9x^2 - 30x + 25$
$= (3x)^2 - 2(3x)(5) + (5)^2$
$= (3x - 5)^2$

$a^2 - 2ab + b^2$
$= (a - b)^2$

Ejercicio 3.8 Factorice.

a) $4x^2 - 12x + 9$ b) $16x^2 + 40x + 25$ c) $25m^2 + 20m + 4$

d) $9a^2 - 6ab + b^2$ e) $4t^2 - 20t + 25$ f) $16x^2 - 24x + 9$

Sección 5: Factorización de diferencia de cuadrados

Vamos a usar el producto de la forma $(x + a)(x - a)$ en sentido contrario.

$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$ Una **diferencia de cuadrados** tiene como factores $x + a$ y $x - a$.

Ejemplo 3.9

Factorice $x^2 - 9$.

Solución:

$$x^2 - 9 = x^2 - (3)^2$$
$$= (x + 3)(x - 3)$$

$x^2 - 9$	
$= x^2 - (3)^2$	$x^2 - a^2$
$= (x + 3)(x - 3)$	$= (x + a)(x - a)$

Ejercicio 3.9 Factorice.

a) $x^2 - 16$ b) $x^2 - 1$ c) $a^2 - 4$

d) $t^2 - 81$ e) $a^2 - 49$ f) $m^2 - 25$

Ejemplo 3.10

Factorice.

a) $9a^2 - 16$ b) $4x^2 - 9y^2$

Solución:

a) $9a^2 - 16 = (3a)^2 - (4)^2$
$= (3a + 4)(3a - 4)$

b) $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2$
$= (2x + 3y)(2x - 3y)$

Ejercicio 3.10 Factorice.

a) $4x^2 - 25$ b) $9x^2 - 1$ c) $16m^2 - 9$

d) $100a^2 - 4b^2$ e) $49x^2 - 36y^2$

Sección 6: Factorización por tanteo compuesto

Vamos a usar el producto de dos binomios con coeficiente de x^2 diferente de 1, en sentido contrario.

$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

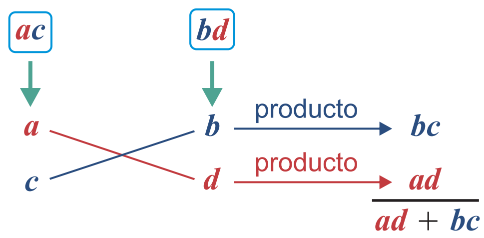
Ejemplo 3.11

Factorice $2x^2 - x - 3$.

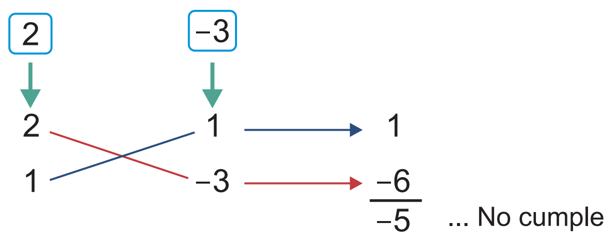
Solución:

Comparando $2x^2 - x - 3$ y $acx^2 + (ad + bc)x + bd$, vamos a buscar los números a, b, c y d que cumplen $ac = 2$, $ad + bc = -1$, $bd = -3$ siguiendo los pasos:

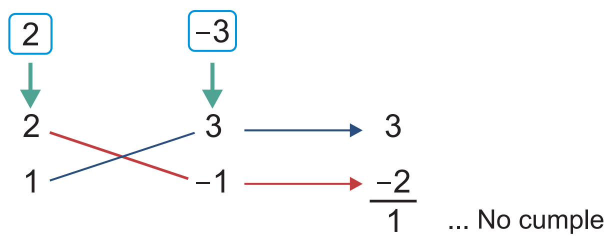
1. Encontrar pares de números enteros a y c de manera que se cumplan $ac = 2$.
   Sea $a > 0$ y $c > 0$, los pares de números son: $a = 1$ y $c = 2$, $a = 2$ y $c = 1$
2. Encontrar pares de números enteros b y d que se cumplan $bd = -3$, estos son:
   $b = 1$ y $d = -3$, $b = 3$ y $d = -1$, $b = -1$ y $d = 3$, $b = -3$ y $d = 1$
3. Encontrar los pares a, b, c y d de las opciones de los pasos 1 y 2 que cumplan $ad + bc = -1$ utilizando el cálculo de la siguiente forma.



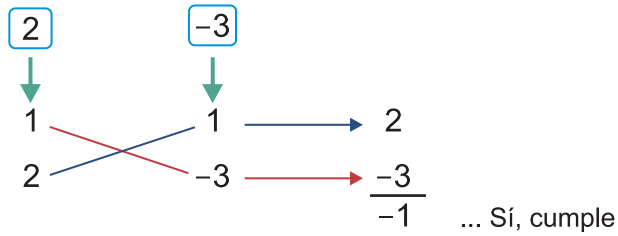
Por ejemplo, cuando $a = 2$, $c = 1$, y $b = 1$, $d = -3$



Cuando $a = 2$, $c = 1$, y $b = 3$, $d = -1$



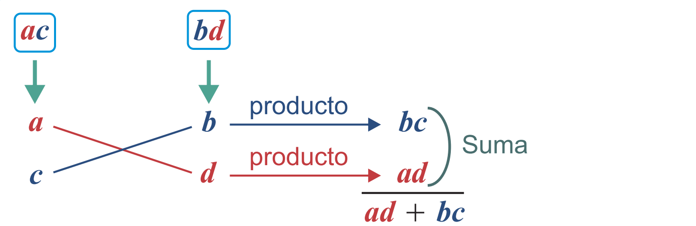
Cuando $a = 1$, $c = 2$, y $b = 1$, $d = -3$



Entonces puede concluir que cuando $a = 1$, $c = 2$, y $b = 1$, $d = -3$, $ad + bc = -1$ se cumple
$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
Por lo tanto $2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$

Respuesta: $(x + 1)(2x - 3)$

Para factorizar un polinomio de la forma: $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$ se buscan los números a, b, c y d de manera que cumplan lo siguiente:



Ejercicio 3.11 Factorice.

a) $2x^2 + x - 3$

b) $3x^2 - 5x + 2$

c) $2x^2 + 5x + 3$

d) $3x^2 - 4x - 4$

Ejemplo 3.12

Factorice.

a) $2ax^2 + 10ax + 12a$

b) $3mx^2 - 30mx + 75m$

c) $x^4 - 81$

Debe identificar y agrupar términos que tengan un factor en común.

Solución:

a) $2ax^2 + 10ax + 12a = 2a(x^2 + 5x + 6)$ ... Por factor común

$= 2a(x + 2)(x + 3)$ ... Por tanteo

b) $3mx^2 - 30mx + 75m = 3m(x^2 - 10x + 25)$ ... Por factor común

$= 3m(x - 5)^2$ ... Por trinomio cuadrado perfecto

c) $x^4 - 81 = (x^2)^2 - 9^2$

$= (x^2 - 9)(x^2 + 9)$ ...Por diferencia de cuadrados

$= (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$ ... Por diferencia de cuadrados

$x^2 + 9$ no es factorizable.

Ejercicio 3.12 Factorice:

a) $5ax^2 + 40ax + 60a$

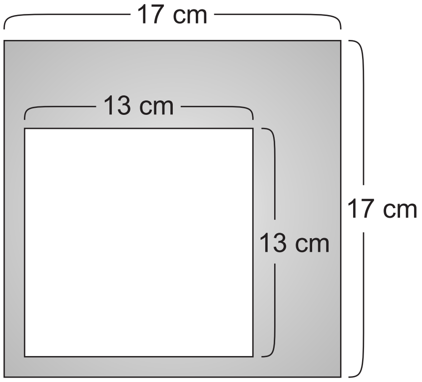
b) $3x^2y + 3xy - 18y$

c) $2x^2y + 24xy + 72y$

d) $3mx^2 + 42mx + 147m$

Ejemplo 3.13

Encuentre el área de la parte sombreada de la figura de la derecha.

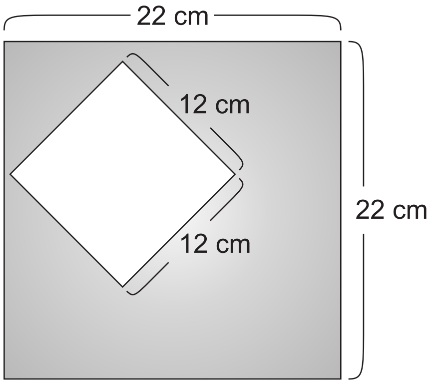


Solución:
El área de la parte sombreada es igual a la del cuadrado grande menos la del cuadrado pequeño.
Entonces

$$\begin{aligned} 17^2 - 13^2 &= (17 + 13)(17 - 13) \text{ ... Diferencia de cuadrados} \\ &= (30)(4) \\ &= 120 \end{aligned}$$

Respuesta: 120 cm^2

Ejercicio 3.13 Encuentre el área de la parte sombreada de la siguiente figura.



Ejemplo 3.14

Explique por qué la suma de dos números impares es par.

Solución:
Sea x y y dos números enteros.
$2x$ y $2y$ son números pares porque son múltiplos de 2.
Entonces $2x + 1$ y $2y + 1$ son números impares.
La suma de estos números es:

$$\begin{aligned} (2x + 1) + (2y + 1) &= 2x + 2y + 2 \\ &= 2(x + y + 1) \\ &= 2M \qquad \text{... Sustituir } x + y + 1 = M \end{aligned}$$

x y y son números enteros así que $x + y + 1$ también es un número entero. Por lo tanto M es un número entero. Entonces $2M$ expresa un número par.
O sea, la suma de dos números impares es par.

Ejercicio 3.14 Explique por qué la suma de dos números pares es par.

Ejercicios

1 Calcule:

a) $(5m - 6t) \times (-2m)$ b) $6x(9x - 3)$

c) $(6x^2 - 8x) \div 2x$ d) $(8x^2y - 16xy^2) \div \frac{4}{3}xy$

2 Desarrolle

a) $(x + 5)(y + 6)$ b) $(m - 3)(p + 8)$

c) $(6a + b)(2a - 3b)$ d) $(x - 2y)(2x + 3y - 1)$

3 Encuentre el valor numérico

a) $2x^3 - 5x^2 + 2x - 12;\quad x = -2$ b) $3m + p^2 - 3;\quad m = -3;\; p = 1$

4 Desarrolle los siguientes productos notables.

a) $(m + 3)(m - 7)$ b) $(y - 5)(y + 3)$ c) $(x + 8)^2$ d) $(x - 8)^2$

e) $(x - 6)(x + 6)$ f) $(x + 9)(x - 9)$ g) $(3x - 1)(2x + 2)$ h) $(x - 2)(3x + 3)$

5 Aplique los productos notables para calcular lo siguiente:

a) 77×83 b) 41×39

c) 102^2 d) 99^2

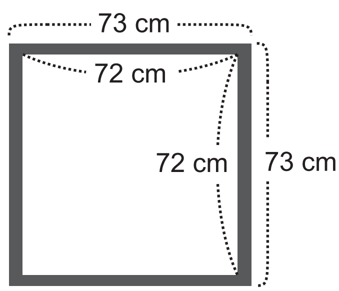
6 Factorice.

a) $ax + ay$ b) $3x^2 - 6x$ c) $a^2 - 4a + 3$

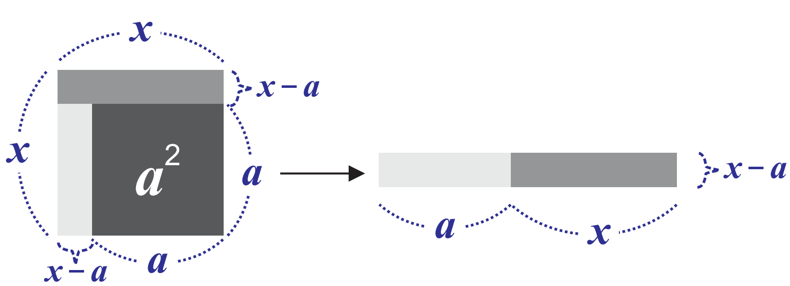
d) $m^2 + 8m + 12$ e) $x^2 - 6x + 9$ f) $4m^2 - 12m + 9$

g) $a^2 - 100$ h) $9m^2 - 25n^2$ i) $2x^2 + 5x + 3$

7 Encuentre el área de la parte sombreada de la figura.



8 La siguiente gráfica muestra la factorización desde el punto de vista geométrico de $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$. ¿Cómo la explica?



Unidad 2

Números reales

Unidad 2

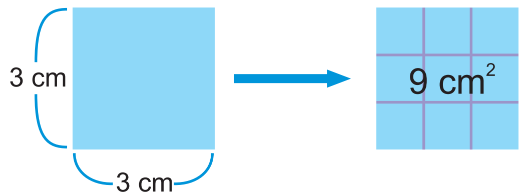
Números reales

Lección 1: Raíces cuadradas

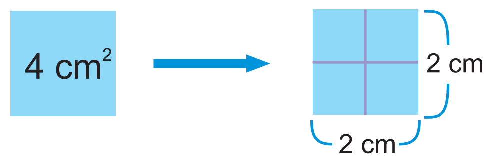
Sección 1: Aproximación de la raíz cuadrada

Lea y observe detenidamente.

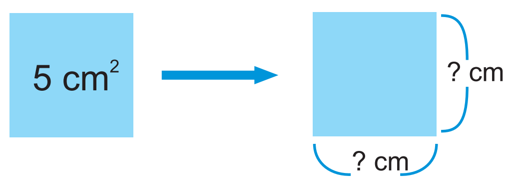
Si se tiene un cuadrado cuya longitud del lado es 3 cm, entonces su área es 9 cm^2 porque $3 \times 3 = 9$.



Si se tiene un cuadrado cuya área es 4 cm^2, la longitud del lado es 2 cm, porque $4 = 2 \times 2$.



Si se tiene un cuadrado cuya área es 5 cm^2, ¿cuál es la longitud del lado?



Piense en lo siguiente:

El área del cuadrado es 5 cm^2, esto quiere decir que hay un número x que al elevarlo al cuadrado es igual a 5.

Esto es, $x^2 = 5$.

Como $2^2 = 4$ y $3^2 = 9$, entonces ese número x se encuentra entre 2 y 3

$$2 < x < 3$$

Para obtener el valor de x, puede hacer lo siguiente:

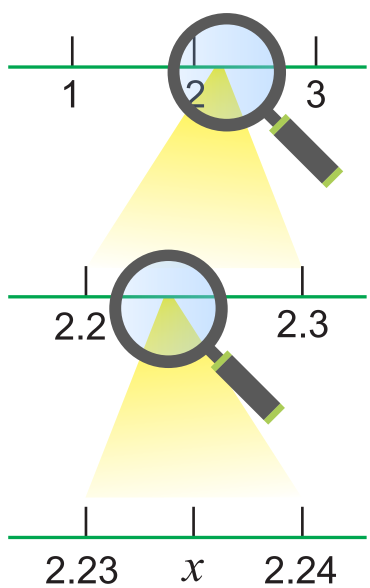
$$\text{Como } 2.2^2 = 4.84 \text{ y } 2.3^2 = 5.29$$

$$\text{entonces } 2.2 < x < 2.3$$

Aumente una cifra decimal y elévelo al cuadrado

$$2.23^2 = 4.9729 \quad \text{y} \quad 2.24^2 = 5.0176$$

$$\text{entonces } 2.23 < x < 2.24$$



Si se repite este procedimiento muchas veces se obtendrá una mejor aproximación de x.

$$x = 2.236067977...$$

Use el símbolo $\sqrt{\ }$ para representar el número x como $\sqrt{5}$ (se lee raíz cuadrada de 5).

Uso de la calculadora

Identifique en su calculadora la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ para calcular $\sqrt{5}$.

Siga estos pasos ON → $\sqrt{\ }$ → 5 → =

Resultado 2.236067977

En otras calculadoras

ON → 5 → $\sqrt{\ }$ → =

Cuando un número "x" elevado al cuadrado es igual a un número "a", se dice que "x" es la raíz cuadrada de "a".

En otras palabras, si $x^2 = a$ entonces "x" es la raíz cuadrada de "a".

Ejercicio 1.1 ¿Cuál es la longitud aproximada del lado de un cuadrado que tiene 2 cm^2 de área?

Sección 2: Definición de raíz cuadrada

Ejemplo 1.1

¿Cuáles son las raíces cuadradas de 9?

Al cuadrado: 3, −3 → 9

Raíces cuadradas: 9 → 3, −3

Solución: 3 es raíz cuadrada de 9 porque $3^2 = 3 \times 3 = 9$.

−3 es raíz cuadrada de 9 porque $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$.

Respuesta: Las raíces cuadradas de 9 son 3 y −3.

Ejercicio 1.2 Encuentre las raíces cuadradas de los siguientes números:

a) 4 b) 16

1) A un número positivo "a" corresponden dos raíces cuadradas: Una positiva y una negativa, ambas con el mismo valor absoluto.

2) Al cero corresponde solo una raíz cuadrada, es decir, la raíz cuadrada de 0 es 0, ($\sqrt{0} = 0$)

Las raíces cuadradas de "a" se representan como: $\sqrt{a}$ la raíz positiva y $-\sqrt{a}$ la raíz negativa, para representar las dos al mismo tiempo se usa $\pm\sqrt{a}$.
$\pm\sqrt{a}$ se lee "más, menos raíz cuadrada de a".

Ejemplo 1.2

Expresе las raíces cuadradas de 3.

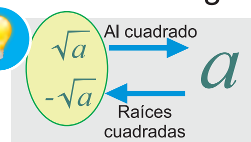
Solución: La positiva es $\sqrt{3}$ y la negativa es $-\sqrt{3}$

Respuesta: $\pm\sqrt{3}$

Ejercicio 1.3

Exprese las raíces cuadradas de los siguientes números:

a) 2 b) 7 c) $\frac{2}{3}$



El signo $\sqrt{\ }$ se coloca sobre toda la fracción.

Ejemplo 1.3

Encuentre las raíces cuadradas de 25.

Solución:

Las raíces cuadradas de 25 son 5 y -5 porque $5 \times 5 = 25$ y $(-5) \times (-5) = 25$

Respuesta: ± 5

En este caso las raíces cuadradas de 25 usando el signo $\sqrt{\ }$ se expresan como $\sqrt{25}$ y $-\sqrt{25}$ esto es $\sqrt{25} = 5$

$$-\sqrt{25} = -5$$

Ejercicio 1.4

Exprese sin el signo $\sqrt{\ }$.

a) $\sqrt{36}$ b) $-\sqrt{16}$ c) $\sqrt{100}$ d) $-\sqrt{49}$

Ejemplo 1.4

Calcule $\sqrt{(-5)^2}$.

Solución: $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25}$

$= 5$

Esto es incorrecto

$\sqrt{(-5)^2} = -5$ ✗

Ejercicio 1.5

Calcule.

a) $\sqrt{(-2)^2}$ b) $\sqrt{(-4)^2}$

Ejemplo 1.5

Calcule.

a) $(\sqrt{3})^2$ b) $(-\sqrt{3})^2$

Solución: a) $(\sqrt{3})^2 = 3$ b) $(-\sqrt{3})^2 = 3$

Si $a > 0$ se cumple que $(\sqrt{a})^2 = a$ y $(-\sqrt{a})^2 = a$.

Ejercicio 1.6

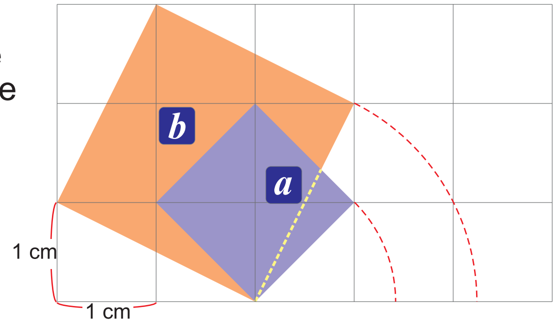
Calcule.

a) $(\sqrt{7})^2$ b) $(-\sqrt{11})^2$ c) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$

Sección 3: Relación de orden con raíces cuadradas

En la figura de la derecha se muestran dos cuadrados, el cuadrado a tiene un área de 2 cm^2 y el b un área de 5 cm^2. Sabemos que sus lados miden $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$.

¿Cuál es mayor $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{5}$?



Respuesta:

Como el cuadrado b tiene más área que el cuadrado a, la medida del lado de b es mayor que la de a , por tanto:

$$\sqrt{5} > \sqrt{2}$$

Cuanto mayor es el área de un cuadrado, mayor es la medida de su lado. Por tanto, cuanto mayor es un número, mayor es su raíz cuadrada positiva.

Sean a y b números positivos, si $a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ejemplo 1.6

Compare $\sqrt{11}$ y $\sqrt{15}$ utilizando los signos $>$ ó $<$.

Solución: Como $11 < 15$, entonces $\sqrt{11} < \sqrt{15}$.

Respuesta: $\sqrt{11} < \sqrt{15}$

Ejercicio 1.7 Compare los siguientes números utilizando los signos $>$ ó $<$:

a) $\sqrt{23}$ ___ $\sqrt{27}$ b) $\sqrt{19}$ ___ $\sqrt{14}$ c) $\sqrt{7}$ ___ $\sqrt{5}$

Ejemplo 1.7

Compare 5 y $\sqrt{21}$.

Solución: Al no poder comparar directamente 5 y $\sqrt{21}$, eleve al cuadrado cada uno de los números.

$5^2 = 25$ $(\sqrt{21})^2 = 21$

Luego, aplique lo visto en el **Ejemplo 1.6** . Como $25 > 21$ entonces $5 > \sqrt{21}$.

Respuesta: $5 > \sqrt{21}$

Ejercicio 1.8 Compare los siguientes números utilizando los signos $>$ ó $<$:

a) 3 ___ $\sqrt{7}$ b) 4 ___ $\sqrt{17}$ c) 6 ___ $\sqrt{34}$ d) $\sqrt{48}$ ___ 9

Lección 2: Números irracionales

En 7mo grado se aprendió que un número que se puede escribir como fracción es de la forma $\frac{a}{b}$ (donde a y b son números enteros y $b \neq 0$) y se le llama número racional.

Por ejemplo: 3, 0.1 y −2 son números racionales, porque se pueden expresar en forma de fracción.

$$3 = \frac{3}{1} \qquad\qquad 0.1 = \frac{1}{10} \qquad\qquad -2 = -\frac{2}{1}$$

Ahora determine si los siguientes números son racionales.

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$

Como $\sqrt{25} = 5$ y $5 = \frac{5}{1}$ entonces $\sqrt{25}$ es un número racional.

Los números como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$ que tienen infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente, no se pueden escribir como fracción, por lo tanto, no son números racionales.

Recuerde que
$\sqrt{2} = 1.414213562...$
$\sqrt{5} = 2.236067977...$

Un **número irracional** es un número que no se puede expresar como fracción. Un número irracional es un número con infinitas cifras decimales no periódicas.

Ejercicio 2.1 Utilice su calculadora para determinar si los siguientes números son irracionales:

a) $\sqrt{3}$ b) π c) $\sqrt{0.5}$

Para encontrar π
ON → Shift o 2nd function → π Exp → =

Ejercicio 2.2 Determine si los siguientes números son racionales o irracionales (utilice la calculadora):

a) 5 b) $\sqrt{33}$ c) $\sqrt{17}$ d) $\sqrt{9}$

Ejemplo 2.1

Represente en la recta numérica $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{3}$.

Solución:

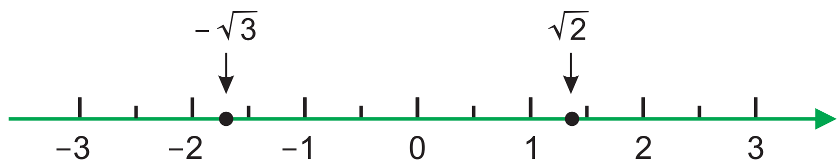
Paso 1: Utilice la calculadora para determinar el valor de cada uno (aproxime hasta centésimas)

$$\sqrt{2} \approx 1.41$$
$$-\sqrt{3} \approx -1.73$$

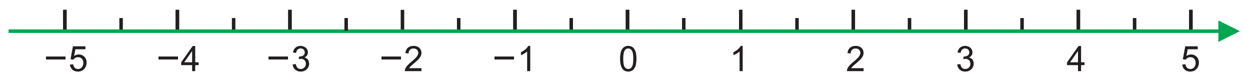
El símbolo $\approx$ significa aproximadamente igual.

Paso 2: Trace la recta numérica y represéntelos.

Ver información complementaria sobre la aproximación o redondeo en la página 53.



Ejercicio 2.3 Represente en la recta numérica $-\sqrt{2}$, π y $\sqrt{17}$ (aproxime hasta centésimas)



Lección 3: Números reales

¿Qué tipo de números son los siguientes: π, 5, $\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$, −0.35, $\sqrt{25}$ y $\sqrt{5}$?

Respuesta: Números racionales: 5, $-\frac{1}{2}$, −0.35, $\sqrt{25}$

Números irracionales: π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$

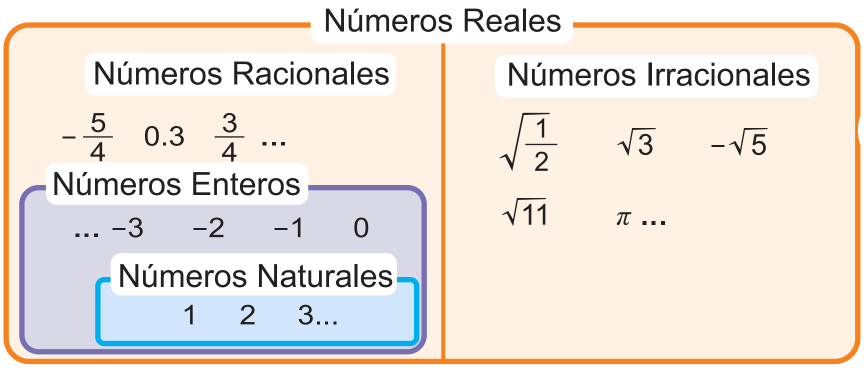
Al conjunto de números racionales y números irracionales se les llama **números reales**.

Los números π, 5, $\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$, −0.35, $\sqrt{25}$ y $\sqrt{5}$ son números reales.

El conjunto de los números reales es la unión de los números racionales y los números irracionales. El conjunto de los números reales corresponde a todos los puntos de la recta numérica.

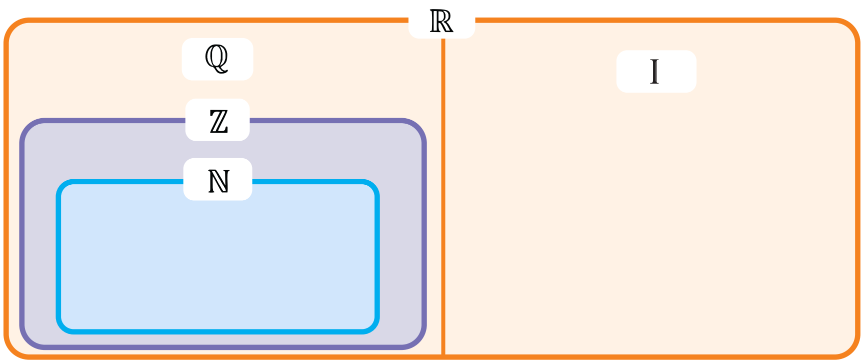
* En 7mo grado se aprendió que los números naturales están contenidos en los números enteros y que los números enteros están contenidos en los números racionales.

Con el siguiente diagrama se apreciará mejor la relación entre estos conjuntos.



Números Reales: $\mathbb{R}$
Números Racionales: $\mathbb{Q}$
Números Irracionales: I
Números Enteros: $\mathbb{Z}$
Números Naturales: $\mathbb{N}$

Ejercicio 3.1 Coloque los siguientes números en el diagrama siguiendo el modelo anterior:



a) $\frac{3}{4}$ e) $-\sqrt{7}$

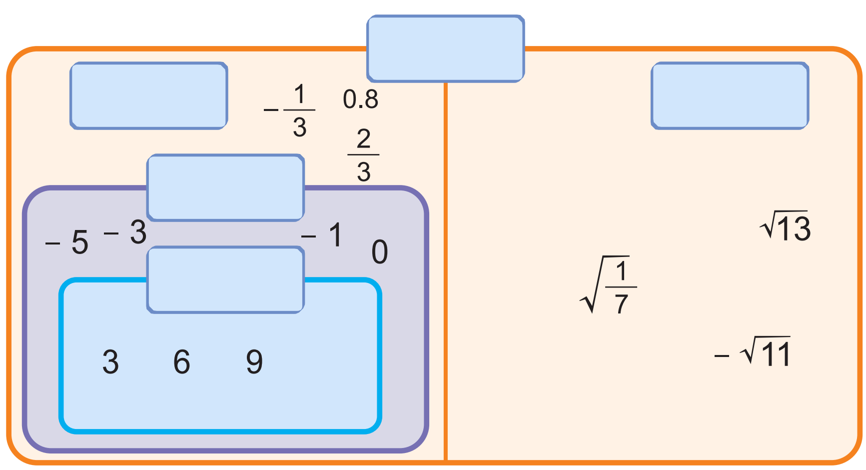
b) 1 f) $-\pi$

c) −2 g) 0

d) −0.5 h) $\sqrt{\frac{1}{5}}$

Ejercicio 3.2 Complete el siguiente diagrama colocando en el lugar correcto las piezas que se muestran a continuación:

Números Racionales | Números Irracionales | Números Enteros | Números Reales | Números Naturales



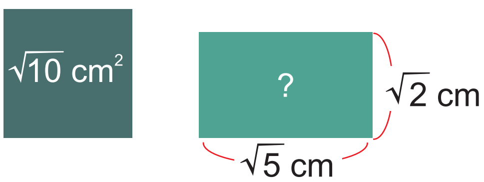
Lección 4: Operaciones con raíces cuadradas

Sección 1: Multiplicación de raíces cuadradas

Ejemplo 4.1

Lea y observe detenidamente.

Hortensia tiene un cuadrado y Diego tiene un rectángulo, ellos quieren saber si el área del cuadrado es la misma que la del rectángulo.



El área de un cuadrado o de un rectángulo se calcula multiplicando base por altura.

La base del rectángulo es $\sqrt{5}$ cm y la altura $\sqrt{2}$ cm.

Para encontrar el área se debe multiplicar $\sqrt{5} \times \sqrt{2}$. ¿Cómo se puede calcular $\sqrt{5} \times \sqrt{2}$?

Solución:

Piense en lo siguiente:

Utilice la calculadora para completar la siguiente tabla.

Aproximar las raíces cuadradas hasta las centésimas.

	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$	$a \times b$	$\sqrt{a \times b}$
Expresión numérica	5	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5} \times \sqrt{2}$	5×2	$\sqrt{5 \times 2}$
Valor aproximado	5	2	2.24	1.41	3.16	10	3.16

$\boxed{5 \times 2} = \boxed{10}$

$\sqrt{\boxed{5 \times 2}} = \sqrt{\boxed{10}}$

Respuesta: El área del cuadrado y el área del rectángulo son iguales.
Esto significa que $\sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{5 \times 2} = \sqrt{10}$.

Ejercicio 4.1 Compruebe que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ completando la siguiente tabla (utilice la calculadora y aproxime hasta centésimas).

	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$	$a \times b$	$\sqrt{a \times b}$
Expresión numérica	3	7					
Valor aproximado							

La conclusión del **Ejemplo 4.1** también aplica para la división.

Propiedades de la multiplicación y división de raíces cuadradas

Para a y b números positivos ($a > 0$, $b > 0$)

1 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ **2** $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Siguiendo las reglas para expresar la multiplicación en una expresión algebraica, la propiedad **1** se puede escribir de la forma: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Ejercicio 4.2 Utilice la tabla para comprobar que $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (aproxime hasta centésimas).

	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\dfrac{a}{b}$	$\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
Expresión Númerica	15	3					
Valor aproximado							

Sección 2: Multiplicación y división de raíces cuadradas

Ejemplo 4.2

Calcule $\sqrt{7} \times \sqrt{2}$.

Solución: $\sqrt{7} \times \sqrt{2} = \sqrt{7 \times 2}$
$= \sqrt{14}$

Ejercicio 4.3 Calcule lo siguiente:

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ b) $\sqrt{2} \times \sqrt{11}$ c) $\sqrt{10} \times \sqrt{3}$

Ejemplo 4.3

Calcule $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$.

Solución: $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3}$
$= \sqrt{36}$
$= 6$

Si la raíz es exacta, se debe calcular.
$\sqrt{36} = 6$

Ejercicio 4.4 Calcule.

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ b) $\sqrt{32} \times \sqrt{2}$ c) $\sqrt{20} \times \sqrt{5}$

Ejemplo 4.4 Calcule $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$.

Solución: $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}}$

$= \sqrt{5}$

Ejercicio 4.5 Calcule.

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}$ b) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$

Ejemplo 4.5 Calcule $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$.

Solución: $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{\overset{9}{\cancel{45}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}}$

$= \sqrt{9}$

$= 3$

Ejercicio 4.6 Calcule.

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

Ejemplo 4.6

Utilizando la propiedad $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ calcule $\sqrt{\frac{1}{4}}$.

El signo $\sqrt{}$ se coloca sobre toda la fracción.

Solución: Se calcula la raíz cuadrada del numerador y del denominador por separado, de esta forma $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$.

Respuesta: $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Ejercicio 4.7 Utilizando la propiedad $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ calcule.

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ b) $-\sqrt{\frac{1}{9}}$ c) $\sqrt{\frac{16}{49}}$ d) $-\sqrt{\frac{1}{100}}$

Sección 3: Expresión de raíces en la forma $a\sqrt{b}$

Aplicando la propiedad conmutativa vista en 7mo grado, se sabe que el producto $4 \times \sqrt{7}$ también se puede escribir como $\sqrt{7} \times 4$.

$4 \times \sqrt{7}$ y $\sqrt{7} \times 4$ se expresan como $4\sqrt{7}$, se elimina el signo "$\times$".

$$a \times \sqrt{b} = \sqrt{b} \times a = a\sqrt{b}$$

Ejercicio 4.8 Exprese en la forma $a\sqrt{b}$ los siguientes números:

a) $3 \times \sqrt{3}$ b) $13 \times \sqrt{6}$ c) $\sqrt{13} \times 7$ d) $\sqrt{11} \times 20$

Cuando hay un número multiplicando afuera de la raíz cuadrada, se puede introducir dentro de ella elevado al cuadrado, es decir, para $a > 0$, $b > 0$.

$$\begin{aligned} a\sqrt{b} &= a \times \sqrt{b} \\ &= \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} \\ &= \sqrt{a^2 \times b} \\ &= \sqrt{a^2 b} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.7

Exprese los siguiente números en la forma $\sqrt{a}$:

a) $3\sqrt{5}$ b) $7\sqrt{2}$

Solución:

a) $3\sqrt{5} = 3 \times \sqrt{5}$
$= \sqrt{3^2} \times \sqrt{5}$
$= \sqrt{9} \times \sqrt{5}$
$= \sqrt{9 \times 5}$
$= \sqrt{45}$

b) $7\sqrt{2} = 7 \times \sqrt{2}$
$= \sqrt{7^2} \times \sqrt{2}$
$= \sqrt{49} \times \sqrt{2}$
$= \sqrt{49 \times 2}$
$= \sqrt{98}$

Cuadrados Perfectos

Números Naturales	Cuadrado de Números Naturales	Cuadrados Perfectos
1	1^2	1
2	2^2	4
3	3^2	9
4	4^2	16
5	5^2	25
6	6^2	36
7	7^2	49
⋮	⋮	⋮

Ejercicio 4.9 Exprese los siguientes números en la forma $\sqrt{a}$:

a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{7}$ c) $4\sqrt{5}$ d) $6\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{3}$

Sección 4: Simplificación de raíces utilizando la descomposición en factores primos

Al expresar $5\sqrt{2}$ en la forma $\sqrt{a}$, se tiene que

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} &= 5 \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{25} \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{25 \times 2} \\ &= \sqrt{50} \end{aligned}$$

Cuando se efectúa el proceso inverso queda expresado en la forma $a\sqrt{b}$, "b" queda en su mínima expresión. A este proceso se le llama **simplificación.**

Simplificar una raíz cuadrada es dejarla en su mínima expresión.

Ejemplo 4.8 Exprese $\sqrt{50}$ en la forma $a\sqrt{b}$.

Solución:
$$\begin{aligned} \sqrt{50} &= \sqrt{25 \times 2} \\ &= \sqrt{25} \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} \\ &= 5 \times \sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Simplificación

$\sqrt{50} \longrightarrow 5\sqrt{2}$

Otra opción para simplificar es utilizar cuadrados perfectos.
Ejemplos: 1, 4, 9, 16, $\boxed{25}$, ...

$$\begin{aligned} 50 &= \sqrt{25 \times 2} \\ &= \sqrt{\boxed{25}} \times \sqrt{2} \\ &= 5 \times \sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.10 Exprese los siguientes números en la forma $a\sqrt{b}$:

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{18}$

Ejemplo 4.9

Exprese $\sqrt{\frac{7}{9}}$ en la forma $\frac{\sqrt{a}}{b}$.

Si $a > 0$ y $b > 0$ se da que:
$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$
$\sqrt{\frac{a}{b^2}} = \frac{\sqrt{a}}{b}$

Solución: $\sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}}$
$= \frac{\sqrt{7}}{3}$

Ejercicio 4.11

Exprese los siguientes números en la forma $\frac{\sqrt{a}}{b}$:

a) $\sqrt{\frac{5}{16}}$ b) $\sqrt{\frac{3}{25}}$

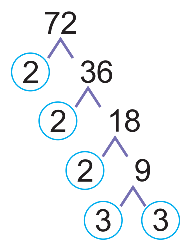
Otra forma de simplificar una raíz cuadrada es descomponerla en sus factores primos.

Ejemplo 4.10

Exprese $\sqrt{72}$ en la forma $a\sqrt{b}$ mediante la descomposición en sus factores primos.

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{72} &= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 2}\\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{2}\\ &= 2 \times 3 \times \sqrt{2}\\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$



Recordando algunos números primos:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

72	2	2^2
36	2	
18	2	
9	3	3^2
3	3	
1		

Ejercicio 4.12

Exprese los siguientes números en la forma $a\sqrt{b}$ mediante la descomposición en sus factores primos:

a) $\sqrt{48}$ b) $\sqrt{75}$

Sección 5: Multiplicación y división de raíces cuadradas de la forma $a\sqrt{b}$

En las raíces cuadradas de la forma $a\sqrt{b}$ se identifican las siguientes partes:

Coeficiente → $a\sqrt{b}$ ← Radicando

Ejemplo 4.11

Calcule $4\sqrt{6} \times 3\sqrt{5}$.

Solución: Se multiplican coeficientes con coeficientes y radicandos con radicandos.

$$\begin{aligned}4\sqrt{6} \times 3\sqrt{5} &= 4 \times 3 \times \sqrt{6} \times \sqrt{5}\\ &= 12 \times \sqrt{30}\\ &= 12\sqrt{30}\end{aligned}$$

Ejercicio 4.13

Calcule.

a) $3\sqrt{2} \times 4\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{3} \times 8\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{11} \times 5\sqrt{7}$

d) $8\sqrt{19} \times 6\sqrt{3}$ e) $7\sqrt{2} \times \sqrt{13}$ f) $\sqrt{7} \times 2\sqrt{6}$

$\sqrt{13} = 1 \times \sqrt{13}$
$\sqrt{7} = 1 \times \sqrt{7}$
$\sqrt{b} = 1 \times \sqrt{b}$

Ejemplo 4.12

Calcule $\dfrac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}$.

Solución: $\dfrac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \times \sqrt{\dfrac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}}$

$= 2\sqrt{3}$

Ejercicio 4.14 Calcule.

a) $\dfrac{8\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{20\sqrt{69}}{4\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{24\sqrt{55}}{3\sqrt{11}}$

Sección 6: Multiplicación y división de raíces cuadradas utilizando la simplificación

Ejemplo 4.13

Calcule $\sqrt{10} \times \sqrt{6}$ y exprese el resultado en la forma $a\sqrt{b}$.

Solución: $\sqrt{10} \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 5} \times \sqrt{2 \times 3}$

$= \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$

$= (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3}$

$= 2 \times \sqrt{15}$

$= 2\sqrt{15}$

Descomponiendo
10 como 2×5
6 como 2×3

Ejercicio 4.15 Calcule y exprese el resultado en la forma $a\sqrt{b}$.

a) $\sqrt{15} \times \sqrt{21}$ b) $\sqrt{35} \times \sqrt{14}$

Ejemplo 4.14

Calcule $4\sqrt{15} \div 2\sqrt{5}$ y exprese el resultado en la forma $a\sqrt{b}$.

Solución: $4\sqrt{15} \div 2\sqrt{5} = \dfrac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}$

$= \dfrac{4\sqrt{3 \times 5}}{2\sqrt{5}}$

$= \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{3} \times \overset{1}{\cancel{\sqrt{5}}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\underset{1}{\cancel{\sqrt{5}}}}$

$= 2\sqrt{3}$

En el **Ejemplo 4.12**, no se descompuso $\sqrt{15} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$ para cancelar el $\sqrt{5}$ del denominador, sino que se hizo la división $\sqrt{15} \div \sqrt{5}$ expresada como fracción $\sqrt{\dfrac{15}{5}}$ para obtener $\sqrt{3}$.
Este tipo de ejercicios puede resolverse utilizando cualquiera de las dos formas.

Ejercicio 4.16 Calcule y exprese el resultado en la forma $a\sqrt{b}$.

a) $6\sqrt{15} \div 2\sqrt{3}$ b) $10\sqrt{22} \div 2\sqrt{2}$

Cuando los radicandos son cantidades grandes, es más conveniente simplificarlos primero antes de cualquier operación.

Ejemplo 4.15

Calcule $\sqrt{18} \times \sqrt{12}$.

Solución: $\sqrt{18} \times \sqrt{12} = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}$
$= 6\sqrt{6}$

$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$
$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$

Ejercicio 4.17 Calcule.

a) $\sqrt{12} \times \sqrt{20}$ b) $\sqrt{45} \times \sqrt{8}$ c) $\sqrt{48} \times \sqrt{18}$

Ejemplo 4.16

Calcule $4\sqrt{22} \div \sqrt{8}$.

Solución: $4\sqrt{22} \div \sqrt{8} = \dfrac{4\sqrt{22}}{\sqrt{8}}$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\overset{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \times \sqrt{11}}{\underset{1}{\cancel{2}}\underset{1}{\cancel{\sqrt{2}}}}$$

$= 2\sqrt{11}$

Otra forma de calcular

$$\frac{4\sqrt{22}}{\sqrt{8}} = 4\sqrt{\frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}}$$
$$= 4\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}}$$
$$= \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{11}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$
$$= 2\sqrt{11}$$

Ejercicio 4.18 Calcule.

a) $4\sqrt{21} \div \sqrt{12}$ b) $8\sqrt{15} \div \sqrt{20}$ c) $6\sqrt{35} \div \sqrt{28}$

Ejemplo 4.17

Calcule.

a) $\sqrt{8} \times \sqrt{20} \div \sqrt{10}$ b) $2\sqrt{60} \div \sqrt{48} \times \sqrt{98}$

Solución:

a) $\sqrt{8} \times \sqrt{20} \div \sqrt{10} = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} \div \sqrt{10}$ ... expresar en la forma $a\sqrt{b}$ (simplificar)

$= 4\sqrt{10} \div \sqrt{10}$ ... calcular producto

$= \dfrac{4\overset{1}{\cancel{\sqrt{10}}}}{\underset{1}{\cancel{\sqrt{10}}}}$ ... expresar en la forma fraccionaria

$= 4$ ... calcular cociente

b) $2\sqrt{60} \div \sqrt{48} \times \sqrt{98} = 2(2\sqrt{15}) \div 4\sqrt{3} \times 7\sqrt{2}$ ... simplificar

$= 4\sqrt{15} \div 4\sqrt{3} \times 7\sqrt{2}$ ... multiplicar coeficientes

$= \dfrac{\overset{1}{\cancel{4}}\sqrt{\overset{5}{\cancel{15}}}}{\underset{1}{\cancel{4}}\sqrt{\underset{1}{\cancel{3}}}} \times 7\sqrt{2}$ ... expresar en forma fraccionaria

$= \sqrt{5} \times 7\sqrt{2}$ ... calcular cociente

$= 7\sqrt{10}$ ... calcular producto

Ejercicio 4.19 Calcule.

a) $\sqrt{27} \times \sqrt{8} \div \sqrt{6}$ b) $\sqrt{40} \div \sqrt{20} \times \sqrt{13}$

c) $\sqrt{96} \div \sqrt{12} \times \sqrt{68}$ d) $\sqrt{44} \times \sqrt{27} \div \sqrt{99}$

Sección 7: Racionalización de expresiones con raíz cuadrada en el denominador

Utilice la calculadora para encontrar el valor de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$, con $\sqrt{3} \approx 1.73205$

¿Qué observa?

$\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \div \sqrt{3} \approx 1 \div 1.73205 \approx 0.57735$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \div 3 \approx 1.73205 \div 3 \approx 0.57735$

Los resultados son iguales.

Para eliminar el signo $\sqrt{}$ del denominador en $\frac{1}{\sqrt{3}}$ se multiplica por $\sqrt{3}$ tanto el numerador como el denominador.

Ejemplo 4.18

Elimine el signo $\sqrt{}$ del denominador en $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad \text{... multiplicar por } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$

El convertir expresiones que llevan el signo $\sqrt{}$ en el denominador en la forma cuyo denominador no contiene el signo $\sqrt{}$ se le denomina **racionalización**.

Ejercicio 4.20 Racionalice.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

Ejemplo 4.19

Racionalice $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Solución:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \quad \text{...multiplicar por } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Ejercicio 4.21 Racionalice.

a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ c) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

Ejemplo 4.20

Racionalice $\frac{3}{2\sqrt{6}}$.

Solución: Al racionalizar $\frac{c}{a\sqrt{b}}$, se multiplican el numerador y el denominador sólo por $\sqrt{b}$.

$$\frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{3\sqrt{6}}{2 \times 6}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{3}}\sqrt{6}}{\underset{4}{\cancel{12}}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Ejercicio 4.22 Racionalice.

a) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$ b) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{4\sqrt{6}}$

Sección 8: Suma y resta de raíces cuadradas semejantes

Recuerde de 7mo grado cómo se reducen términos semejantes.

Ejemplo 4.21 Efectúe las siguientes operaciones.

a) $5a + 3a$ b) $2a + 3b$

Solución:

a) $5a + 3a = 5\boxed{a} + 3\boxed{a}$
$= (5 + 3)\boxed{a}$
$= 8\boxed{a}$

b) $2a + 3b = 2\boxed{a} + 3\boxed{b}$

¿Qué pasaría si se compara lo anterior con la suma y la resta de raíces cuadradas?

Observe $5\boxed{\sqrt{2}} + 3\boxed{\sqrt{2}}$ $2\boxed{\sqrt{2}} + 3\boxed{\sqrt{3}}$
$5\boxed{a} + 3\boxed{a}$ $2\boxed{a} + 3\boxed{b}$

¿En qué se parecen?, ¿cuál es la diferencia?

Para sumar raíces cuadradas, se puede pensar del mismo modo que cuando se suman expresiones algebraicas.

Las expresiones que contienen raíces cuadradas del mismo número se les denomina **raíces cuadradas semejantes.**

$3\sqrt{2}$ y $-5\sqrt{2}$ son raíces cuadradas semejantes.
$3\sqrt{2}$ y $-2\sqrt{3}$ no son raíces cuadradas semejantes.

Las raíces cuadradas semejantes pueden operarse sumando o restando los coeficientes y copiando la raíz cuadrada semejante.

Ejemplo 4.22

Sume o reste las siguientes expresiones:

a) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

Solución:

a) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (5 + 3)\sqrt{2}$
$= 8\sqrt{2}$

$5\boxed{\sqrt{2}} + 3\boxed{\sqrt{2}} = (5 + 3)\boxed{\sqrt{2}}$
$5a + 3a = (5 + 3)a$

b) $2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = (2 - 4)\sqrt{5}$
$= -2\sqrt{5}$

$2\boxed{\sqrt{5}} - 4\boxed{\sqrt{5}} = (2 - 4)\boxed{\sqrt{5}}$
$2a - 4a = (2 - 4)a$

Ejercicio 4.23 Sume o reste las siguientes expresiones:

a) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$ c) $9\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ d) $-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

e) $7\sqrt{10} - \sqrt{10}$ f) $-4\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$ g) $-\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$

Recuerda ¿cómo se calcula $6a + 3b - 4a$?

$$6\boxed{a} + 3b - 4\boxed{a} = (6 - 4)\boxed{a} + 3b$$
$$= 2a + 3b$$

$2a$ y $3b$ no tienen la misma variable, por tanto, no son semejantes y no se pueden reducir.

Ejemplo 4.23

De manera similar se calculará $6\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$.

Solución: $6\boxed{\sqrt{2}} + 3\sqrt{3} - 4\boxed{\sqrt{2}} = (6 - 4)\boxed{\sqrt{2}} + 3\sqrt{3}$
$= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

$2\boxed{\sqrt{2}} + 3\boxed{\sqrt{3}}$

$2\boxed{a} + 3\boxed{b}$

$2a$ y $3b$ no se pueden reducir.

Ejercicio 4.24 Calcule.

a) $6\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$

b) $7\sqrt{6} + 4\sqrt{10} + 2\sqrt{10}$

c) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

d) $15\sqrt{13} - 20\sqrt{13} + 4\sqrt{11}$

Ejemplo 4.24

Calcule $7\sqrt{10} + 4\sqrt{7} - 10\sqrt{7} - 3\sqrt{10}$.

Recuerde solo sumar o restar las raíces semejantes

Solución: $7\boxed{\sqrt{10}} + 4\boxed{\sqrt{7}} - 10\boxed{\sqrt{7}} - 3\boxed{\sqrt{10}} = (7 - 3)\boxed{\sqrt{10}} + (4 - 10)\boxed{\sqrt{7}}$
$= 4\boxed{\sqrt{10}} + (-6)\boxed{\sqrt{7}}$
$= 4\sqrt{10} - 6\sqrt{7}$

Ejercicio 4.25 Calcule.

a) $4\sqrt{5} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

b) $10\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

c) $-3\sqrt{17} - 4\sqrt{23} + 6\sqrt{17} + 7\sqrt{23}$

d) $5\sqrt{26} + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

Ejemplo 4.25

Sume o reste las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{27} - \sqrt{3}$ b) $\sqrt{18} + \sqrt{8}$

Es incorrecto
$\sqrt{27} - \sqrt{3} = \sqrt{24}$ ✗
$\sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{26}$ ✗

Solución

a) Para sumar o restar raíces cuadradas, en ocasiones es necesario simplificar primero, para identificar si existen raíces semejantes.

$\sqrt{27} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3}$ ... simplificar
$= 2\sqrt{3}$ ... restar coeficientes y copiar raíz cuadrada semejante

$\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{3} = 1\sqrt{3}$

b) $\sqrt{18} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ ... simplificar
$= 5\sqrt{2}$ ... sumar coeficientes y copiar raíz cuadrada semejante

$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$
$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$

Ejercicio 4.26 Sume o reste las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ b) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$

c) $-\sqrt{28} - \sqrt{7}$ d) $-\sqrt{40} + \sqrt{10}$

e) $\sqrt{12} + \sqrt{27}$ f) $\sqrt{18} - \sqrt{32}$

g) $-\sqrt{24} - \sqrt{54}$ h) $-\sqrt{28} + \sqrt{63}$

Ejemplo 4.26

Calcule $3\sqrt{12} + 8\sqrt{2} - \sqrt{72}$.

Solución:

Primero se tiene que simplificar las raíces cuadradas e identificar si estas son semejantes.

$$\begin{aligned} 3\sqrt{12} + 8\sqrt{2} - \sqrt{72} &= 3(2\sqrt{3}) + 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{3} + (8-6)\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{72} &= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 2} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} \\ &= 2 \times 3 \times \sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.27 Calcule.

a) $\sqrt{8} + \sqrt{20} - \sqrt{18}$

b) $\sqrt{48} + 6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$

c) $-2\sqrt{75} - \sqrt{27} - 7\sqrt{6}$

d) $\sqrt{32} - 2\sqrt{50} + 9\sqrt{2}$

Ejemplo 4.27

Calcule $3\sqrt{10} + \sqrt{28} + \sqrt{40} + \sqrt{63}$.

Solución:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{10} + \sqrt{28} + \sqrt{40} + \sqrt{63} &= 3\sqrt{10} + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{10} + 3\sqrt{7} \\ &= (3+2)\sqrt{10} + (2+3)\sqrt{7} \\ &= 5\sqrt{10} + 5\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\sqrt{28} = \sqrt{2^2 \times 7} = 2\sqrt{7}$$

$$\sqrt{40} = \sqrt{2^2 \times 10} = 2\sqrt{10}$$

$$\sqrt{63} = \sqrt{3^2 \times 7} = 3\sqrt{7}$$

Ejercicio 4.28 Calcule.

a) $\sqrt{45} + \sqrt{27} + \sqrt{20} + 8\sqrt{3}$

b) $\sqrt{24} - \sqrt{96} + 5\sqrt{11} + 2\sqrt{54}$

c) $2\sqrt{44} + \sqrt{99} - 5\sqrt{17} + 5\sqrt{11}$

d) $\sqrt{8} + \sqrt{56} + \sqrt{98} + 9\sqrt{2}$

Ejemplo 4.28

Calcule.

a) $5\sqrt{2} + \dfrac{4}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{12}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$

Solución:

a) Para realizar estos cálculos se tiene que racionalizar primero, es decir, eliminar del denominador el $\sqrt{2}$ de $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$.

Paso 1: Racionalizar

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

Paso 2: Reducir las raíces semejantes

$$5\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$= 7\sqrt{2}$$

Se racionalizó

$$5\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

b) **Paso 1:** Racionalizar

$$\frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{12}}\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{3}}}$$

$$= 4\sqrt{3}$$

Paso 2: Reducir las raíces semejantes

$$\frac{12}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

Se racionalizó

$$\frac{12}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

Ejercicio 4.29 Calcule.

a) $5\sqrt{2} + \dfrac{6}{\sqrt{2}}$ b) $2\sqrt{3} - \dfrac{9}{\sqrt{3}}$ c) $-\sqrt{5} + \dfrac{10}{\sqrt{5}}$ d) $-7\sqrt{7} - \dfrac{28}{\sqrt{7}}$

e) $\dfrac{15}{\sqrt{5}} + 3\sqrt{5}$ f) $\dfrac{18}{\sqrt{3}} - 7\sqrt{3}$ g) $-\dfrac{12}{\sqrt{6}} + 5\sqrt{6}$ h) $-\dfrac{26}{\sqrt{13}} - 5\sqrt{13}$

Ejemplo 4.29

Calcule $5\sqrt{18} - \dfrac{6}{\sqrt{2}}$.

Solución: $5\sqrt{18} - \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 5\,(3\sqrt{2}) - \dfrac{6}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ... Simplificar raíz de 18 y racionalizar $-\dfrac{6}{\sqrt{2}}$

$$= 15\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{2}$$

$$= 15\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$

$$= 12\sqrt{2}$$

$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2}$
$= 3\sqrt{2}$

Cuando una expresión tiene el signo $\sqrt{}$ en el denominador debe racionalizarse.

Ejercicio 4.30 Calcule.

a) $\sqrt{18} - \dfrac{4}{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{27} + \dfrac{6}{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{20} - \dfrac{15}{\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{50} - \dfrac{6}{\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{54} + \dfrac{6}{\sqrt{6}}$ f) $\dfrac{9}{\sqrt{3}} - \sqrt{48}$ g) $\dfrac{10}{\sqrt{5}} + \sqrt{45}$ h) $-\dfrac{12}{\sqrt{6}} + \sqrt{96}$

Sección 11: Propiedad distributiva en expresiones con raíces cuadradas

Ejercicio 4.31 Desarrolle la expresión $a(b + c)$.

Para hacer este desarrollo se aplica la propiedad distributiva.

Anteriormente se multiplicaron raíces cuadradas. Ahora se multiplicarán expresiones que contienen raíces cuadradas.

Ejemplo 4.30

Multiplique las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + \sqrt{5})$ b) $\sqrt{3}\,(\sqrt{6} + 2\sqrt{5})$

$$a\,(b + c) = \underset{1}{a \times b} + \underset{2}{a \times c}$$

$$\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{2} \times \sqrt{5}$$

Solución:

a) $\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{2} \times \sqrt{5}$
$= \sqrt{6} + \sqrt{10}$

b) $\sqrt{3}\,(\sqrt{6} + 2\sqrt{5}) = \sqrt{3} \times \boxed{\sqrt{6}} + \underline{\sqrt{3} \times 2\sqrt{5}}$

$$= \sqrt{3} \times \boxed{(\sqrt{3} \times \sqrt{2})} + \underline{2\sqrt{15}}$$

$$= (\sqrt{3})^2 \times \sqrt{2} + 2\sqrt{15}$$

$$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{15}$$

Cuando hay paréntesis en una expresión con raíces cuadradas, estos se pueden eliminar usando la propiedad distributiva.

Ejercicio 4.32 Multiplique las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{3}\,(2\sqrt{2} - \sqrt{5})$ b) $\sqrt{2}\,(1 + 3\sqrt{2})$ c) $2\sqrt{3}\,(\sqrt{12} - \sqrt{6})$

d) $\sqrt{5}\,(2\sqrt{10} - \sqrt{3})$ e) $\sqrt{2}\,(-\sqrt{10} + \sqrt{14})$ f) $\sqrt{2}\,(8 - 4\sqrt{2})$

Ejemplo 4.31

Multiplique $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{3})$.

Respuesta:

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) &= \sqrt{5}\,(\sqrt{7} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}\,(\sqrt{7} + \sqrt{3}) \\
&= \sqrt{5} \times \sqrt{7} + \sqrt{5} \times \sqrt{3} + \sqrt{2} \times \sqrt{7} + \sqrt{2} \times \sqrt{3} \\
&= \sqrt{35} + \sqrt{15} + \sqrt{14} + \sqrt{6}
\end{aligned}
$$

$$(a + b)\boxed{(c + d)} = \overset{1}{a}\,(c + d) + \overset{2}{b}\,(c + d)$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{7}) = \sqrt{2}\,(\sqrt{5} + \sqrt{7}) + \sqrt{3}\,(\sqrt{5} + \sqrt{7})$$

Ejercicio 4.33 Multiplique.

a) $(3 + \sqrt{5})(4 - 2\sqrt{5})$ b) $(2 - \sqrt{7})(2 + \sqrt{3})$

Sección 12: Operaciones con raíces cuadradas

Recordemos $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Ejemplo 4.32

Calcule $(\sqrt{2} + 4)(\sqrt{2} - 2)$.

¿Podemos usar alguna fórmula?

Solución:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} + 4)(\sqrt{2} - 2) &= (\sqrt{2})^2 + [4 + (-2)]\sqrt{2} + 4(-2)\\ &= 2 + 2\sqrt{2} - 8\\ &= -6 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$(x + a)(x + \boxed{b}) = x^2 + (a + \boxed{b})x + a\boxed{b}$$

$$(\sqrt{2} + 4)[\sqrt{2} + \boxed{(-2)}] = (\sqrt{2})^2 + [4 + \boxed{(-2)}]\sqrt{2} + 4\boxed{(-2)}$$

Ejercicio 4.34 Calcule.

a) $(\sqrt{3} + 5)(\sqrt{3} - 2)$ b) $(\sqrt{7} + 3)(\sqrt{7} + 2)$ c) $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} - 4)$

Recordemos $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Ejemplo 4.33

Calcule $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$.

Solución:

$$\begin{aligned}(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 &= (\sqrt{5})^2 + 2(\sqrt{5})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2\\ &= 5 + 2\sqrt{15} + 3\\ &= 8 + 2\sqrt{15}\end{aligned}$$

$$(x + \boxed{y})^2 = x^2 + 2x\boxed{y} + \boxed{y}^2$$

$$(\sqrt{5} + \boxed{\sqrt{3}})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2(\sqrt{5})(\boxed{\sqrt{3}}) + (\boxed{\sqrt{3}})^2$$

Ejercicio 4.35 Calcule.

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ b) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$ c) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2$

Recordemos $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

Ejemplo 4.34

Calcule $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

Solución:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) &= (\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\\ &= 3-2\\ &= 1\end{aligned}$$

$$(x+\boxed{a})(x-\boxed{a}) = x^2-\boxed{a}^2$$

$$\downarrow$$

$$(\sqrt{3}+\boxed{\sqrt{2}})(\sqrt{3}-\boxed{\sqrt{2}}) = (\sqrt{3})^2-(\boxed{\sqrt{2}})^2$$

Ejercicio 4.36 Calcule.

a) $(\sqrt{11}+\sqrt{2})(\sqrt{11}-\sqrt{2})$

b) $(\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7})$

c) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

d) $(\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{6})$

Ejemplo 4.35

Si $a = \sqrt{3} - 2$, calcule $a^2 - 4$.

Solución 1:

Se sustituye el valor de a

$$\begin{aligned} a^2 - 4 &= (\sqrt{3} - 2)^2 - 4 \\ &= (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})(2) + (-2)^2 - 4 \\ &= 3 - 4\sqrt{3} + 4 - 4 \\ &= 3 - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Solución 2:

Primero se desarrolla la diferencia de cuadrados y luego se sustituye el valor de a

$$\begin{aligned} a^2 - 4 &= (a + 2)(a - 2) \\ &= [(\sqrt{3} - 2) + 2][(\sqrt{3} - 2) - 2] \\ &= \sqrt{3}(\sqrt{3} - 4) \\ &= (\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} \\ &= 3 - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Al comparar las soluciones 1 y 2, se observa que ambas respuestas son iguales, por lo que se puede emplear cualquiera de los dos procedimientos.

Ejercicio 4.37 Si $x = \sqrt{5} + 1$, calcule.

a) $x^2 - 1$ b) $x^2 + 5x - 6$

Ejemplo 4.36

Si $x = \sqrt{3} + 2$, $y = \sqrt{3} - 2$, calcule $x^2 + xy$.

Solución 1:

Se sustituye el valor de x y y

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= (\sqrt{3} + 2)^2 + (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2) \\ &= (3 + 4\sqrt{3} + 4) + [(\sqrt{3})^2 - (2)^2] \\ &= (7 + 4\sqrt{3}) + (3 - 4) \\ &= 7 + 4\sqrt{3} - 1 \\ &= 6 + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Solución 2:

Se factoriza y luego se sustituye el valor de x y y

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= x(x + y) \\ &= (\sqrt{3} + 2)[(\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} - 2)] \\ &= (\sqrt{3} + 2)(2\sqrt{3}) \\ &= 2(\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} \\ &= 2(3) + 4\sqrt{3} \\ &= 6 + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Para resolver ejercicios de este tipo, puede emplear cualquiera de las 2 formas.

Ejercicio 4.38 Si $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, calcule.

a) $x^2 - y^2$ b) $x^2 + 2xy + y^2$

Ejercicios

1 Encuentre las raíces cuadradas de los siguientes números:

a) 9 b) 16 c) 10 d) $\frac{25}{4}$ e) 7

2 Encuentre el valor de los siguientes números:

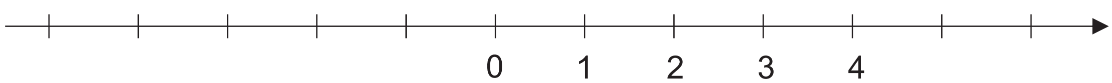
a) $\sqrt{36}$ b) $-\sqrt{4}$ c) $(-\sqrt{5})^2$ d) $\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2$ e) $\sqrt{(-3)^2}$

3 Compare utilizando los signos > ó <.

a) $\sqrt{11}$ __ $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{7}$ __ 3 c) 6 __ $\sqrt{31}$

d) 5 __ $\sqrt{26}$ e) $\sqrt{68}$ __ 8.3

4 Represente en la recta numérica los siguientes números: $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{11}$.



5 Calcule y exprese en forma simplificada.

a) $\sqrt{3}\times\sqrt{7}$ b) $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$ c) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{26}}$ e) $\frac{\sqrt{84}}{\sqrt{21}}$

6 Exprese en la forma $\sqrt{a}$.

a) $2\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{2}$

7 Simplifique (expréselo en la forma $a\sqrt{b}$ ó $\frac{\sqrt{a}}{b}$).

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{48}$ c) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt{75}$

e) $\sqrt{45}$ f) $\sqrt{\frac{5}{4}}$ g) $\sqrt{\frac{7}{25}}$ h) $\sqrt{\frac{5}{81}}$

8 Calcule.

a) $2\sqrt{5} \times 4\sqrt{6}$ b) $11\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ c) $15\sqrt{13} \times \sqrt{10}$ d) $\sqrt{7} \times 8\sqrt{5}$

e) $\dfrac{12\sqrt{14}}{3\sqrt{7}}$ f) $\dfrac{5\sqrt{36}}{\sqrt{12}}$ g) $\dfrac{30\sqrt{66}}{10\sqrt{11}}$ h) $\dfrac{\sqrt{40}}{2\sqrt{8}}$

9 Calcule.

a) $6\sqrt{15} \div \sqrt{12}$ b) $9\sqrt{22} \div \sqrt{18}$ c) $3\sqrt{10} \div \sqrt{45}$ d) $10\sqrt{14} \div \sqrt{32}$

10 Calcule.

a) $\sqrt{20} \times \sqrt{18} \div \sqrt{10}$ b) $\sqrt{80} \div \sqrt{20} \times \sqrt{2}$

11 Racionalice.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ e) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{4}{5\sqrt{2}}$

12 Sume o reste las siguientes expresiones.

a) $5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ b) $-2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ c) $-6\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$

d) $9\sqrt{10} - 14\sqrt{10}$ e) $-2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}$ f) $-8\sqrt{7} + 11\sqrt{7}$

13 Calcule.

a) $-\sqrt{3} + 4\sqrt{5} - \sqrt{3}$ b) $12\sqrt{11} - 5\sqrt{2} - 19\sqrt{11}$

c) $7\sqrt{10} + 4\sqrt{7} - 10\sqrt{7} - 7\sqrt{10}$ d) $9\sqrt{15} - 3\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + 10\sqrt{6}$

e) $\sqrt{3} - \sqrt{27}$ f) $\sqrt{5} + \sqrt{45}$

14 Calcule.

a) $\sqrt{12} - \sqrt{18} + \sqrt{27}$ b) $4\sqrt{6} + \sqrt{32} + \sqrt{24} + \sqrt{50}$

15 Calcule.

a) $\sqrt{3} - \dfrac{6}{\sqrt{3}}$ b) $-4\sqrt{10} + \dfrac{50}{\sqrt{10}}$ c) $\dfrac{21}{\sqrt{7}} + 6\sqrt{7}$ d) $-\dfrac{30}{\sqrt{5}} - 6\sqrt{5}$

16 Calcule.

a) $\sqrt{12} + \dfrac{9}{\sqrt{3}}$ b) $-\dfrac{10}{\sqrt{2}} - \sqrt{50}$ c) $\sqrt{28} - \dfrac{14}{\sqrt{7}}$ d) $-\dfrac{30}{\sqrt{6}} + \sqrt{54}$

17 Multiplique.

a) $\sqrt{5}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ b) $6\sqrt{3}(-\sqrt{3} + 1)$ c) $\sqrt{2}(-2 + \sqrt{10})$

d) $(2 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})$ e) $(\sqrt{7} - 5)(\sqrt{7} - 3)$

18 Multiplique.

a) $(\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 6)$ b) $(\sqrt{10} + 2)(\sqrt{10} - 5)$ c) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$

d) $(\sqrt{2} - \sqrt{7})^2$ e) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$ f) $(\sqrt{11} - \sqrt{6})(\sqrt{11} + \sqrt{6})$

19 Si $x = \sqrt{2} - 1$, calcule.

a) $x^2 - 1$ b) $x^2 + 2x - 3$

20 Si $x = \sqrt{5} + 3$, $y = \sqrt{5} - 3$, calcule.

a) $y^2 + xy$ b) $x^2 - y^2$

Método común de aproximación o redondeo

Escriba el valor aproximado hasta las centésimas de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{17}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\sqrt{11}$ d) $\sqrt{23}$

Solución:

Para redondear o aproximar un número, primero debe determinarse qué cifra se va a redondear. En este caso, la cifra a redondear es la que ocupa el lugar de las centésimas, es decir, el segundo dígito a la derecha del punto decimal.

Regla 1: Si el dígito que está a la derecha de la cifra a redondear es menor que 5 (1, 2, 3 o 4), la cifra a redondear queda tal y como está.

De este modo, para el inciso a)

Cifra a redondear

a) $\sqrt{17} = 4.12\underline{3}105625...$

$\sqrt{17} \approx 4.12$ **es menor que 5**

Como el dígito que está a la derecha de las centésimas es 3 y 3 es menor que 5, entonces la cifra a redondear queda igual.

Regla 2: Si el dígito que está a la derecha de la cifra a redondear es mayor o igual que 5 (5, 6, 7, 8 o 9), se debe sumar 1 a la cifra a redondear.

De este modo, para los incisos b), c) y d).

Cifra a redondear

b) $\sqrt{7} = 2.64\underline{5}751311...$

$\sqrt{7} \approx 2.65$ **es igual que 5**

Como el dígito que está a la derecha de las centésimas es 5 para el inciso b) y 6 para el inciso c) y ambos son mayores o iguales que 5, entonces se le sumó 1 a la cifra a redondear.

Cifra a redondear

c) $\sqrt{11} = 3.31\underline{6}62479...$

$\sqrt{11} \approx 3.32$ **es mayor que 5**

d) $\sqrt{23} = 4.79\underline{5}83152...$

$\sqrt{23} \approx 4.80$ **es igual que 5**

En este caso la cifra a redondear es 9 por lo tanto al sumarle 1 se convierte en 10, así que se debe colocar cero y sumar 1 a la cifra anterior que es 7.

Solución:

Si suponemos que $\sqrt{2}$ es un número racional, éste se puede escribir como $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ donde a y b son números naturales y números primos entre sí.

Elevando al cuadrado ambos lados,

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$
$$2 = \frac{b^2}{a^2}$$
$$2a^2 = b^2$$

Cuando b^2 es número par, b también es número par.
Por eso, se puede escribir como

$b = 2m$, donde m es número natural

Entonces, $2a^2 = b^2$

$$2a^2 = (2m)^2$$
$$2a^2 = 4m^2$$
$$a^2 = 2m^2$$

a^2 es número par, por eso a también es número par.
Lo anterior contradice que a y b son números primos entre sí.
Por lo que, $\sqrt{2}$ no se puede escribir como
$\sqrt{2} = \frac{b}{a}$, donde a y b son números naturales y números primos entre sí.
Entonces, $\sqrt{2}$ no es un número racional.
Por tanto, se puede decir que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Un número irracional es un número real que no es racional.

En 8vo grado, se ha utilizado el método de demostración directo o deductivo. En la demostración de por qué $\sqrt{2}$ es un número irracional, se ha empleado un método indirecto: demostración por contradicción o reducción al absurdo.

La idea general es suponer que la proposición que se quiere demostrar es falsa ($\sqrt{2}$ es un número racional), y a partir de ella, usando deducciones matemáticas, llegar a una contradicción o algo absurdo (a y b no son números primos entre sí), lo cual implica que nuestra proposición es necesariamente cierta ($\sqrt{2}$ es un número irracional).

Unidad 3

Ecuaciones de segundo grado

Lección 1: Ecuaciones de segundo grado

Lección 2: Resolución de ecuaciones de segundo grado

Lección 3: Aplicación de las ecuaciones de segundo grado

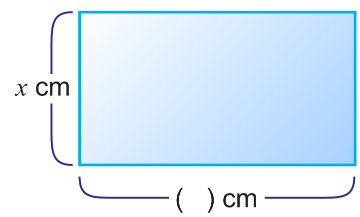
Unidad 3
Ecuaciones de segundo grado

Lección 1: Ecuaciones de segundo grado

Ejemplo 1.1

Un rectángulo mide de largo 3 cm más que su ancho. Si el ancho mide x cm:

a) ¿Cuántos cm mide el largo?
Expréselo en términos de x.
b) Exprese el área del rectángulo en términos de x.
c) Si el área del rectángulo es 88 cm^2, ¿qué ecuación se obtiene?



Solución

a) $x + 3$

b) $(x + 3)x$

c) $(x + 3)x = 88$

$$\underbrace{(x + 3)x}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{88}_{\text{segundo miembro}}$$

Si se sustituyen valores para x en la ecuación $(x + 3)x = 88$ encuentre los valores que la satisfacen.

$$\begin{aligned} & (x + 3)x = 88 \\ \text{Si } x = 6\ldots\ & (6 + 3) \times 6 \stackrel{?}{=} 88 \\ & 9 \times 6 \stackrel{?}{=} 88 \\ & 54 \neq 88 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x + 3)x = 88 \\ \text{Si } x = 7\ldots\ & (7 + 3) \times 7 \stackrel{?}{=} 88 \\ & 10 \times 7 \stackrel{?}{=} 88 \\ & 70 \neq 88 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x + 3)x = 88 \\ \text{Si } x = 8\ldots & (8 + 3) \times 8 \stackrel{?}{=} 88 \\ & 11 \times 8 \stackrel{?}{=} 88 \\ & 88 \stackrel{\checkmark}{=} 88 \end{aligned}$$

El valor que satisface la ecuación es $x = 8$.

Si se desarrolla el lado izquierdo de la ecuación anterior y se transpone el término 88 obtenemos: $(x + 3)x = 88$

$$x^2 + 3x - 88 = 0$$

A la ecuación $x^2 + 3x - 88 = 0$ se le llama **ecuación de segundo grado**.

Note que en la ecuación $x^2 + 3x - 88 = 0$ el lado izquierdo es un polinomio de segundo grado y el lado derecho es cero.

Una ecuación de segundo grado es toda ecuación que se puede escribir de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ donde $a \neq 0$. A las ecuaciones de segundo grado, también se les llama **ecuaciones cuadráticas**.

Ejemplo 1.2

Identifique cuáles de las siguientes ecuaciones son ecuaciones de segundo grado.

a) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

b) $x^2 + 1 = 0$

c) $5x^3 + 7x - 4 = 0$

d) $(x + 1)(x - 2) = 0$

Solución:

a) Sí es una ecuación de segundo grado, porque se puede escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a = 2$, $b = -5$, $c = 1$.

b) Sí es una ecuación de segundo grado, porque se puede escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.

c) No es una ecuación de segundo grado, porque no se puede escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, además el término $5x^3$ es de grado 3.

d) Sí porque al desarrollar $(x + 1)(x - 2) = 0$ queda como $x^2 - x - 2 = 0$ y tiene la forma de una ecuación de segundo grado.

Ejercicio 1.1 Identifique cuáles de las siguientes ecuaciones son de segundo grado.

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$

b) $2x^2 + 3 = 0$

c) $3x^4 - 5x = 0$

d) $8x^3 - 1 = 0$

e) $-10x + 7 = 0$

f) $-x^2 + x = 0$

Ejemplo 1.3

Identifique si la ecuación $x^2 = 3$ es de segundo grado.

Solución:

Si se transpone el 3 al lado izquierdo y se iguala a cero, se obtiene $x^2 - 3 = 0$, como se puede escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$ entonces sí es una ecuación de segundo grado.

Ejercicio 1.2 Identifique cuáles de las siguientes ecuaciones son de segundo grado.

a) $x^2 = 4$

b) $x^3 = -3$

c) $x^2 = 5x$

Ejemplo 1.4

Sustituya valores para x en la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$ y encuentre los valores que la satisfacen.

Solución:

Si $x = -2$ ...
$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (-2)^2 - (-2) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 4 + 2 - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 4 &\neq 0 \end{aligned}$$

Si $x = -1$ ...
$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (-1)^2 - (-1) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 1 + 1 - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &\stackrel{\checkmark}{=} 0 \end{aligned}$$

Si $x = 0$ ...
$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (0)^2 - (0) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 - 0 - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ -2 &\neq 0 \end{aligned}$$

Si $x = 1$ ...
$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (1)^2 - (1) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 1 - 1 - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ -2 &\neq 0 \end{aligned}$$

Si $x = 2$ ...
$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (2)^2 - (2) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 4 - 2 - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &\stackrel{\checkmark}{=} 0 \end{aligned}$$

Respuesta: Los valores que satisfacen la ecuación son $x = -1$, $x = 2$.

A los valores que satisfacen una ecuación de segundo grado se les llama **solución**. Por ejemplo $x = -1$ y $x = 2$ son soluciones de la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$.

Resolver una ecuación de segundo grado es encontrar su solución.

Ejercicio 1.3 Encuentre la solución de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ sustituyendo los siguientes valores: 1, 2, 3, 4 y 5.

Ejercicio 1.4 Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones de segundo grado sustituyendo valores para x.

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ con $x = -2$; $x = 2$; $x = 1$; $x = 3$

b) $x^2 + 3x + 2 = 0$ con $x = -2$; $x = 1$; $x = 3$; $x = -1$

c) $x^2 - 6x + 8 = 0$ con $x = 1$; $x = -2$; $x = 4$; $x = 2$

Lección 2: Resolución de ecuaciones de segundo grado

Sección 1: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando factorización

Ahora se aprenderá a resolver ecuaciones de segundo grado de la siguiente manera.

Ejemplo 2.1

Resuelva $(x + 3)(x - 1) = 0$.

> Para dos números A y B, si $A \times B = 0$ entonces $A = 0$ ó $B = 0$

Solución:

Como el lado izquierdo de la ecuación $(x + 3)(x - 1) = 0$ ya está factorizado nos queda:

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

$x + 3 = 0$ ó $x - 1 = 0$ ... Igualar a cero cada factor

$x = -3$ ó $x = 1$ ... Despejar para x

Por tanto las soluciones de la ecuación $(x + 3)(x - 1) = 0$ son $x = -3$ y $x = 1$.

> Comprobación
>
> Si $x = -3$ ... $\begin{aligned}(x + 3)(x - 1) &= 0\\ (-3 + 3)(-3 - 1) &\overset{?}{=} 0\\ (0)\,(-4) &\overset{?}{=} 0\\ 0 &\overset{\checkmark}{=} 0\end{aligned}$
>
> Si $x = 1$ ... $\begin{aligned}(x + 3)(x - 1) &= 0\\ (1 + 3)(1 - 1) &\overset{?}{=} 0\\ (4)\,(0) &\overset{?}{=} 0\\ 0 &\overset{\checkmark}{=} 0\end{aligned}$

Ejercicio 2.1 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $(x + 2)(x - 7) = 0$

b) $(x - 4)(x + 3) = 0$

Ejemplo 2.2

Resuelva $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Solución:

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x - 2)(x + 4) = 0$ ... Factorizar el lado izquierdo de la ecuación

$x - 2 = 0$ ó $x + 4 = 0$ ... Igualar a cero cada factor

$x = 2$ ó $x = -4$ ... Resolver cada ecuación

> Para resolver la ecuación primero hay que factorizar, si se puede.

Respuesta: Las soluciones son $x = 2, x = -4$.

Ejercicio 2.2 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ b) $x^2 - 2x - 15 = 0$

Ejemplo 2.3

Resuelva $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Factorizar $x^2 - 10x + 25$ utilizando $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$

Solución:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$
$$(x - 5)^2 = 0$$
$$x - 5 = 0$$
$$x = 5$$

Algunas ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones, otras como $x^2 - 10x + 25 = 0$ solo tienen una.

Respuesta: La solución es $x = 5$.

Ejercicio 2.3 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$

b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

Ejemplo 2.4

Resuelva $2x^2 + 3x - 9 = 0$.

Solución:

$$\begin{aligned}
2x^2 + 3x - 9 &= 0 \\
(2x - 3)(x + 3) &= 0 && \text{... Factorizar el lado izquierdo} \\
2x - 3 = 0 \quad &\text{ó} \quad x + 3 = 0 && \text{... Igualar a cero cada factor} \\
2x = 3 \quad &\text{ó} \quad x = -3 && \text{... Resolver cada ecuación} \\
x = \tfrac{3}{2} \quad &\text{ó} \quad x = -3
\end{aligned}$$

Respuesta: Las soluciones son $x = \frac{3}{2}$, $x = -3$.

Ejercicio 2.4 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$ c) $5x^2 + 9x - 2 = 0$

Ejemplo 2.5

Resuelva $(x + 3)(x - 1) = 5$.

Solución:

Para resolver la ecuación primero es necesario convertir a la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\begin{aligned}
(x + 3)(x - 1) &= 5 \\
x^2 + 2x - 3 &= 5 && \text{... Desarrollar el lado izquierdo} \\
x^2 + 2x - 8 &= 0 && \text{... Transponer el 5} \\
(x + 4)(x - 2) &= 0 && \text{... Factorizar el lado izquierdo} \\
x + 4 = 0 \quad &\text{ó} \quad x - 2 = 0 && \text{... Igualar a cero cada factor} \\
x = -4 \quad &\text{ó} \quad x = 2 && \text{... Resolver cada ecuación}
\end{aligned}$$

Respuesta: Las soluciones son $x = -4$, $x = 2$.

Ejercicio 2.5 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $(x - 6)(x - 3) = 4$ b) $(x + 5)(x - 2) = 8$

c) $(x - 5)(x + 7) = -11$ d) $(x - 7)(x - 4) = 10$

Ejemplo 2.6 Resuelva $x^2 = 7$.

Solución:
Para resolver esta ecuación debemos emplear el concepto de raíz cuadrada.
Por tanto se tiene que:

$$x^2 = 7$$
$$x = \pm\sqrt{7}$$

Respuesta: Las soluciones son $x = \pm\sqrt{7}$

Recuerda que al aplicar la definición de raíz cuadrada en $x^2 = 7$ se obtiene un resultado positivo ($\sqrt{7}$) y otro negativo ($-\sqrt{7}$) y generalmente se escribe $\pm\sqrt{7}$.

Ejercicio 2.6 Resuelva.

a) $x^2 = 5$ b) $x^2 = 13$ c) $x^2 = 25$

Ejemplo 2.7 Resuelva $2x^2 - 18 = 0$

Solución:

$2x^2 - 18 = 0$
$2x^2 = 18$ ... Transponer el 18
$x^2 = 9$ ... Dividir entre 2
$x = \pm\sqrt{9}$ ... Definición de raíz cuadrada
$x = \pm 3$ ... Calcular la raíz cuadrada

Respuesta: Las soluciones son $x = \pm 3$

También se puede expresar "Las soluciones son $x = 3$, $x = -3$".

Ejercicio 2.7 Resuelva.

a) $3x^2 - 48 = 0$ b) $3x^2 - 12 = 0$ c) $4x^2 + 7 = 43$

Ejemplo 2.8 Resuelva $(x - 2)^2 = 7$

Solución:

$(x - 2)^2 = 7$
$x - 2 = \pm\sqrt{7}$ ... Definición de raíz cuadrada
$x = 2 \pm\sqrt{7}$ ... Transponer el -2

Si se tiene $(x - 2)^2 = 7$ se usa la raíz cuadrada para resolver la ecuación.

$(x - 2)^2 = 7$
$A^2 = 7$ ... Sustituyendo $x - 2 = A$
$A = \pm\sqrt{7}$
$x - 2 = \pm\sqrt{7}$

Respuesta: Las soluciones son $x = 2 \pm\sqrt{7}$

$x = 2 \pm\sqrt{7}$ Significa $x = 2 + \sqrt{7}$ y $x = 2 - \sqrt{7}$

Ejercicio 2.8 Resuelva.

a) $(x + 3)^2 = 5$ b) $(x - 1)^2 = 3$ c) $(x - 5)^2 = 11$

Las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = b$ y $(x + a)^2 = b$ se pueden resolver utilizando raíz cuadrada.

Sección 3: Resolución de ecuaciones de segundo grado usando completación de cuadrados

Ejemplo 2.9

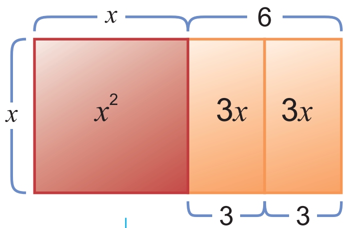
Resuelva $x^2 + 6x = 1$

Solución:

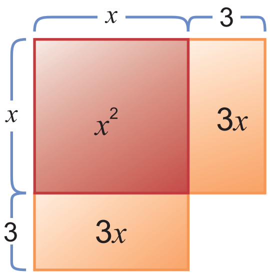
Al transponer 1 se obtiene la ecuación $x^2 + 6x - 1 = 0$ que no se puede resolver usando factorización, por tanto vamos a convertirla a la forma $(x + a)^2 = b$ para resolverla utilizando el método de raíz cuadrada.

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

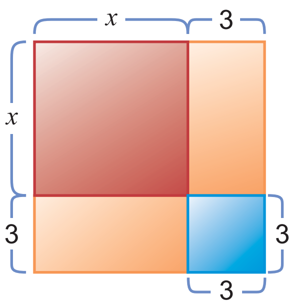
Para convertir $x^2 + 6x$ a la forma $(x + a)^2$ se debe encontrar el valor de a entonces:



$x^2 + 6x = 1$ ... Para ir formando el cuadrado dividimos $6x$ en dos partes: $3x$ y $3x$; $6x = 2 \times 3x$



$$x^2 + 6x = 1$$
$$x^2 + 2 \times 3x = 1$$



$x^2 + 6x + \boxed{3^2} = 1 + \boxed{3^2}$ ... Para completar el cuadrado agregamos un cuadrado de 3×3, razón por la cual sumamos 9 a ambos lados de la ecuación.

De lo anterior se tiene que:

$$x^2 + 6x = 1$$
$$x^2 + 6x + 3^2 = 1 + 3^2 \quad \text{... Sumar } 3^2 \text{ a ambos lados}$$
$$(x + 3)^2 = 10 \quad \text{... Factorizar el lado izquierdo con trinomio cuadrado perfecto}$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{10}$$
$$x = -3 \pm \sqrt{10}$$

Se convierte a la forma $(x + 3)^2$ para utilizar la raíz cuadrada.

Respuesta: Las soluciones son $x = -3 \pm \sqrt{10}$

Al procedimiento de resolver una ecuación de segundo grado sumando a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de x se le llama **completación de cuadrados**.

Ejemplo: $x^2 + \underline{6x} = 1$

6 es el coeficiente de x
entonces la mitad 6 es 3,
el cuadrado 3 es 3^2,
por eso se agrega 3^2 a ambos lados de la ecuación.

Ejemplo 2.10

Resuelva $x^2 - 8x = -1$ usando completación de cuadrados.

Solución:

$$x^2 - 8x = -1$$

$$x^2 - 8x + 4^2 = -1 + 4^2$$ ... Sumar a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir, $\left(-\frac{8}{2}\right)^2 = (-4)^2 = 4^2$

$$x^2 - 8x + 16 = -1 + 16$$

$$(x - 4)^2 = 15$$ ... Factorizar

$$x - 4 = \pm\sqrt{15}$$ ... Definición de raíz cuadrada

$$x = 4 \pm \sqrt{15}$$

Respuesta: Las soluciones son $x = 4 \pm \sqrt{15}$

Ejercicio 2.9 Resuelva usando completación de cuadrados.

a) $x^2 + 2x = 4$

b) $x^2 + 4x = -2$

c) $x^2 - 10x = -23$

1. Observe y comente.

Vamos a pensar en una forma de resolver la ecuación cuadrática en la forma más general $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ comparándola con la resolución de $3x^2 + 5x + 1 = 0$, usando la completación de cuadrados.

$$3x^2 + 5x + 1 = 0$$

$3x^2 + 5x = -1$ Transponer 1

$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$ Dividir entre 3

$x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$ Sumar a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de x

$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$ Factorizar por trinomio cuadrado perfecto

Por tanto

$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6}$ Definición de raíz cuadrada

$$x = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Las soluciones de la ecuación $3x^2 + 5x + 1 = 0$, son:

$$x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \quad \text{y} \quad x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{6}$$

$b^2 - 4ac \geq 0$ significa que $b^2 - 4ac$ es mayor o igual que 0.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$ax^2 + bx = -c$ Transponer c

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ Dividir entre a

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ * Sumar a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de x

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ Factorizar por trinomio cuadrado perfecto

Por tanto si $b^2 - 4ac \geq 0$ se da que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

* La mitad del coeficiente de x es:

$$\frac{b}{a} \div 2 = \frac{b}{a} \times \frac{1}{2} = \frac{b}{2a}$$

y su cuadrado es $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

La suma de:

$$-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$= \frac{4a(-c) + 1(b^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ vienen dadas por la **fórmula cuadrática** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ donde $b^2 - 4ac \geq 0$.

¡Memorizarlo es muy importante!

Ejercicio 2.10 En la ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ identifique los valores para a, b y c en la ecuación $5x^2 + 7x + 1 = 0$ y complete.

a) $a = \boxed{}$ $\quad b = \boxed{}$ $\quad c = \boxed{}$

b) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$$ ... Sustituir los valores de a, b y c en la fórmula.

Continúe...

Ejemplo 2.11

Resuelva $3x^2 - 7x + 1 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

Solución:

Para usar la fórmula cuadrática primero se deben identificar los valores para a, b y c.

$a = 3 \quad b = -7 \quad c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 12}}{6}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Respuesta: Las soluciones son $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$ significa

$x = \dfrac{7 + \sqrt{37}}{6}$ y $x = \dfrac{7 - \sqrt{37}}{6}$

Ejercicio 2.11 Resuelva usando la fórmula cuadrática.

a) $2x^2 + 5x + 1 = 0$ b) $4x^2 + x - 1 = 0$ c) $5x^2 - 7x + 1 = 0$

Ejemplo 2.12

Resuelva $2x^2 + 5x - 3 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

Solución:

$a = 2 \quad b = 5 \quad c = -3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$\sqrt{49} = 7$

$$= \frac{-5 \pm 7}{4}$$

Se tienen dos soluciones: $x = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ó $x = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$

Respuesta: Las soluciones son $x = \frac{1}{2}, x = -3$

Ejercicio 2.12 Resuelva.

a) $6x^2 + 7x + 2 = 0$

b) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

Lección 3: Aplicación de las ecuaciones de segundo grado

Ejemplo 3.1

Hay dos números naturales consecutivos. La suma de los cuadrados de estos números es 41. ¿Cuáles son esos números?

Solución:

Si se representa el primer número con x y su consecutivo con $x + 1$ se tiene:

$$x^2 + (x+1)^2 = 41$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 41$$
$$2x^2 + 2x - 40 = 0$$
$$x^2 + x - 20 = 0 \qquad \text{... Dividir entre 2}$$
$$(x+5)(x-4) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 4 = 0$$
$$x = -5 \quad \text{ó} \quad x = 4$$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Como x debe ser un número natural, la solución $x = -5$ no es adecuada, es decir, no es solución al problema ya que -5 no es un número natural.

La solución $x = 4$ es un número natural y por lo tanto es el primer número.

El segundo número es $x + 1 = 4 + 1 = 5$.

Respuesta: Los números son 4 y 5.

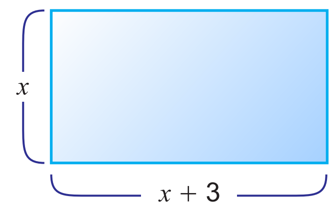
Ejercicio 3.1

a) Hay dos números naturales consecutivos. La suma de los cuadrados de estos números es 85. ¿Cuáles son esos números?

b) El producto de dos números naturales consecutivos es 72. ¿Cuáles son esos números?

Ejemplo 3.2

Un rectángulo mide de largo 3 cm más que su ancho. Si el ancho mide x cm:



a) ¿Cómo se expresa el área del rectángulo?

b) Si el área del rectángulo es 70 cm², ¿cuáles son las medidas del largo y ancho del rectángulo?

Solución:

a) Si se representa con x el ancho del rectángulo, el largo se expresa como $x + 3$. Para calcular el área del rectángulo hay que multiplicar largo por ancho.

Por tanto el área del rectángulo se expresa como:

$$\text{Área} = \text{ancho} \times \text{largo}.$$
$$= x(x + 3)$$

b) Si el área del rectángulo es 70 cm^2 se puede sustituir en la ecuación anterior.

$$x(x + 3) = 70$$

Al resolver la ecuación anterior se obtiene:

$$x(x + 3) = 70$$
$$x^2 + 3x = 70$$
$$x^2 + 3x - 70 = 0$$
$$(x + 10)(x - 7) = 0$$
$$x + 10 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 7 = 0$$
$$x = -10 \quad \text{ó} \quad x = 7$$

Como x es la longitud, x debe ser un número positivo, la solución $x = -10$ no es solución al problema.

Por tanto ancho: $x = 7$

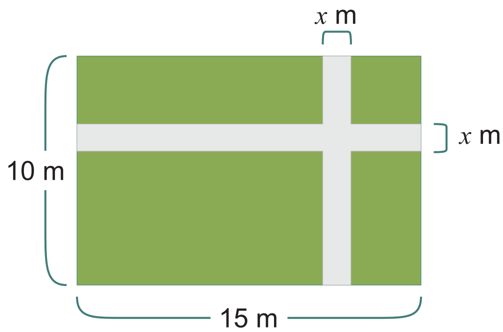
largo: $x + 3 = 7 + 3 = 10$

Respuesta: El largo del rectángulo mide 10 cm y el ancho 7 cm.

Ejercicio 3.2 Víctor es 2 años mayor que Alicia y el producto de ambas edades es 48. Encuentre las edades de Víctor y Alicia.

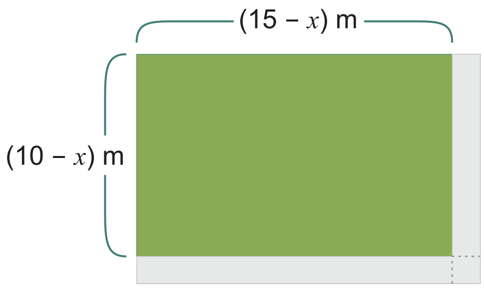
Ejemplo 3.3

En un terreno de forma rectangular cuyo largo mide 15 m y el ancho 10 m, se va a hacer una acera vertical y una horizontal del mismo ancho x metros. Si se quiere que el área fuera de la acera sea de 104 m^2, ¿cuánto debe medir el ancho de la acera?



Solución:

Para encontrar el ancho de la acera, se puede representar el área fuera de la acera de la siguiente manera:



largo: $15 - x$

ancho: $10 - x$

$$\text{Área} = \text{largo} \times \text{ancho}$$
$$104 = (15 - x)(10 - x)$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene:

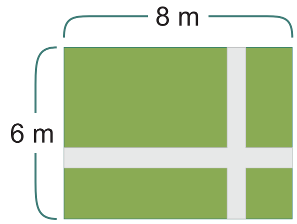
$$(15 - x)(10 - x) = 104$$
$$150 - 15x - 10x + x^2 = 104$$
$$x^2 - 25x + 150 - 104 = 0$$
$$x^2 - 25x + 46 = 0$$
$$(x - 23)(x - 2) = 0$$
$$x - 23 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 23 \quad \text{ó} \quad x = 2$$

La solución $x = 23$ no puede ser solución al problema, porque es mayor que el ancho y el largo del terreno.

Respuesta: El ancho de la acera debe medir 2 m.

Ejercicio 3.3

En una plaza de forma rectangular cuyo largo y ancho miden 8 y 6 m respectivamente, se hará una acera vertical y una horizontal del mismo ancho como en el dibujo. Si se quiere que el área fuera del paso sea de 24 m^2, ¿cuánto debe medir el ancho de la acera?



Ejercicios

1 Identifique cuáles de las siguientes ecuaciones son de segundo grado.

a) $x^2 + x + 3 = 0$ b) $x - 1 = x^2$ c) $x^2 - x^3 = 0$

d) $x^2 - 3x + 5x^4 = 3$ e) $x + 7 = x^3$ f) $x(x - 1) = 4$

2 ¿Cuál es la ecuación cuya solución es −2 y −6?

a) $x^2 + 8x - 12 = 0$ b) $x^2 - 8x - 12 = 0$ c) $x^2 + 8x + 12 = 0$

d) $x^2 - 8x + 12 = 0$

3 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $(x - 3)(x - 2) = 0$ b) $(x + 5)(x + 4) = 0$ c) $x^2 + 3x - 10 = 0$

d) $x^2 - 3x - 28 = 0$ e) $x^2 - 12x + 27 = 0$

4 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ b) $5x^2 - 3x - 2 = 0$ c) $(x - 2)(x - 3) = 20$

d) $(x + 4)(x - 3) = -10$

5 Resuelva.

a) $x^2 = 13$ b) $x^2 = 36$ c) $x^2 = 8$

d) $x^2 = 81$ e) $4x^2 - 16 = 0$ f) $5x^2 - 25 = 0$

6 Resuelva.

a) $(x - 5)^2 = 7$ b) $(x + 3)^2 = 3$ c) $(x - 4)^2 = 16$

d) $(x + 8)^2 = 5$

7 Resuelva usando completación de cuadrados.

a) $x^2 + 14x = -2$ b) $x^2 + 4x = -2$ c) $x^2 + 12x + 2 = 0$

8 Cuando se expresan las siguientes ecuaciones de segundo grado en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, identifique a, b y c.

a) $x^2 - 5x + 3 = 0$ b) $5x^2 + 7x = -7$ c) $x^2 - 3x + 5 = 0$

d) $2x^2 = -3x + 8$

9 Resuelva usando la fórmula cuadrática.

a) $x^2 + 3x + 1 = 0$ b) $2x^2 + x - 4 = 0$ c) $4x^2 + x - 1 = 0$

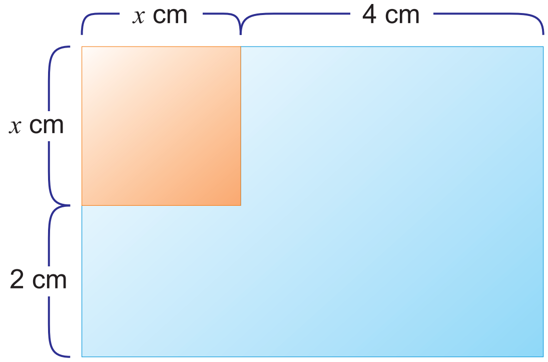
d) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

10 Resuelva.

a) Si la suma de 2 números es 15 y su producto es 56. ¿Cuáles son esos 2 números?

b) La base de un triángulo es 3 cm más que la altura, si el área del triángulo es de 35 cm^2 ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura del triángulo?

c) Hay un cuadrado de x cm cada lado. Si se extiende el lado vertical y el horizontal 2 cm y 4 cm respectivamente, se obtiene un rectángulo cuya área es de 48 cm^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



Unidad 4

Semejanza de triángulos

Lección 1: Semejanza de triángulos

Unidad 4 Semejanza de triángulos

Lección 1: Semejanza de triángulos

Sección 1: Figuras semejantes

Ejemplo 1.1

La *Figura [a]* dada en la cuadrícula de la derecha tiene su tamaño original.
¿Cómo se puede reducir a la mitad?

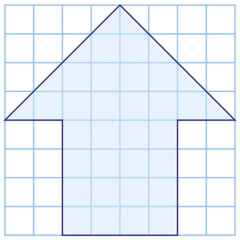
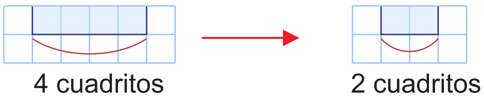


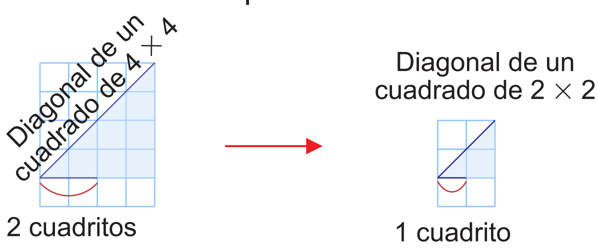
Figura [a]

Solución:
Se reducirá a la mitad la longitud de cada segmento que forma la figura.

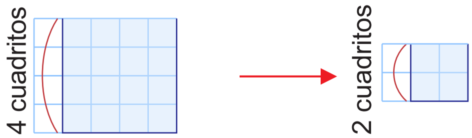
Para base



Para formar la punta de la flecha



Para altura



La *Figura [a]* reducida a la mitad se nombrará como *Figura [b]* y queda como sigue:

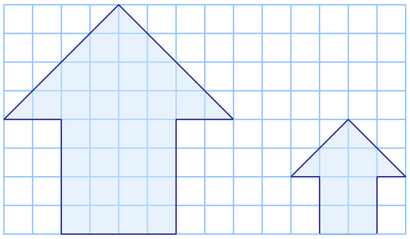


Figura original *Figura [a]* Figura reducida a la mitad *Figura [b]*

La longitud de los lados de la *Figura [b]* es la mitad de la longitud de los lados correspondientes de la *Figura [a]*.

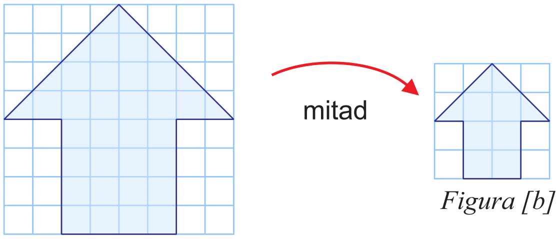


Figura [a] *Figura [b]*

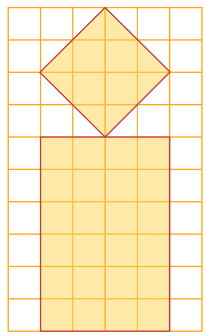
En ambas figuras se conserva la forma y lo que cambió fue el tamaño.

La reducción de una figura, es una nueva figura cuyos lados tienen por medida, la medida de los lados de la figura original dividida en todos por un mismo número y se dice que ambas figuras son **semejantes**.

La *Figura [a]* y la *Figura [b]* son semejantes.

Para indicar semejanza, se utiliza el símbolo ~, que es la tilde de la ñ, y se le conoce como virgulilla.
De esta forma, *Figura [a]* ~ *Figura [b]* se lee "*Figura [a]* es semejante a la *Figura [b]*"

Ejercicio 1.1 Reduzca a la mitad la siguiente figura.



Ejemplo 1.2

Dibuje una ampliación al doble de la *Figura [c]*, de manera que un segmento que mide 1 de largo, mida 2 en la figura ampliada y llámese a esta *Figura [d]*.

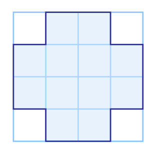


Figura [c]

Solución:

La longitud de los lados de la *Figura [d]* es el doble de la longitud de los lados correspondientes de la *Figura [c]*.

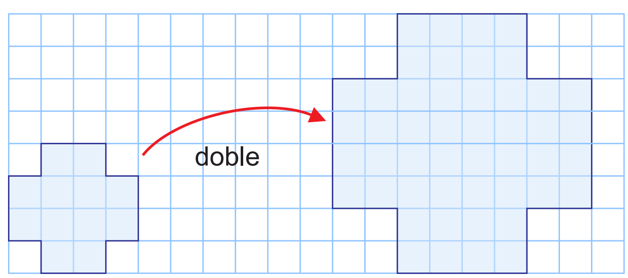


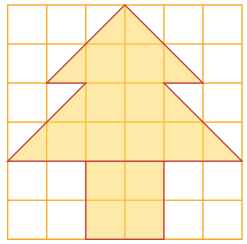
Figura original
Figura [c]

Figura ampliada al doble
Figura [d]

La ampliación de una figura, es una nueva figura cuyos lados tienen por medida, la medida de los lados de la figura original multiplicada en todos por un mismo número y se dice que ambas figuras son **semejantes**.

De esta forma, *Figura [d]* ~ *Figura [c]*

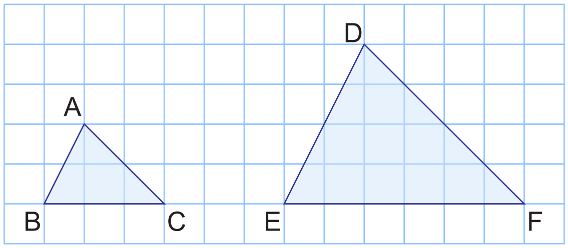
Ejercicio 1.2 Amplíe al doble la siguiente figura.



Sección 2: Condiciones de dos triángulos semejantes

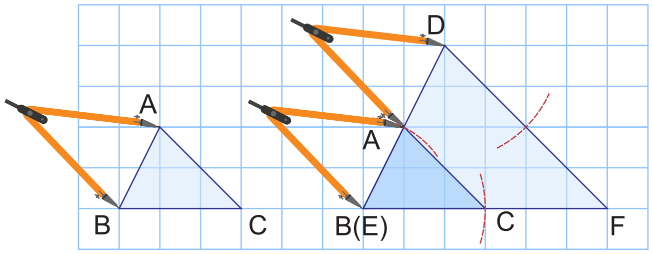
Ejemplo 1.3

Los triángulos ABC y DEF son semejantes, ¿cuál es la relación entre las razones de las longitudes de los lados correspondientes, es decir, entre AB : DE, BC : EF y AC : DF?



Solución:

Se sobrepone el $\triangle ABC$ al $\triangle DEF$ haciendo coincidir los vértices B y E.



Recuerde que los lados correspondientes son los lados que ocupan la misma posición en los dos polígonos.

Al medir el $\overline{AB}$ usando compás y comparar al $\overline{DE}$ se deduce lo siguiente:

AB : DE = 1 : 2

Lo mismo sucede con los lados BC y EF, AC y DF.

BC : EF = 1 : 2

AC : DF = 1 : 2

Respuesta: Las tres razones de las longitudes de las parejas de lados correspondientes son iguales, esto es, AB : DE = BC : EF = AC : DF

En el *Ejemplo* **1.3**, al tomar la medida de los ángulos correspondientes, se encuentra que $m\angle A = m\angle D$, $m\angle B = m\angle E$ y $m\angle C = m\angle F$. En general, las figuras semejantes cumplen la siguiente condición:

Dos figuras son semejantes cuando:
1) Las tres razones de las longitudes de los lados correspondientes son iguales.
2) Los ángulos correspondientes son respectivamente congruentes.

La razón entre las longitudes de los lados correspondientes se denomina **razón de semejanza**.

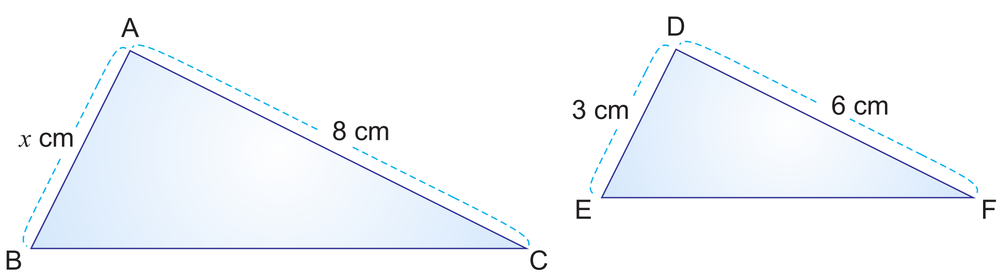
1 : 2 es la razón de semejanza entre los triángulos ABC y DEF del *Ejemplo* **1.3** .

En el caso del *Ejemplo* **1.3** el valor de la razón 1 : 2 es $\frac{1}{2}$. A veces este $\frac{1}{2}$ se llama también razón de semejanza entre los triángulos ABC y DEF.

Se puede aplicar el concepto de proporción para encontrar la longitud de un lado de una figura semejante a otra.

Ejemplo 1.4

Dado que ΔABC y ΔDEF son semejantes, es decir, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, encuentre la longitud del lado AB.



Solución:

Dado que los triángulos ABC y DEF son semejantes, se puede formar una proporción con las longitudes de los lados correspondientes.

AB : DE = AC : DF

$x : 3 = 8 : 6$ ... sustituir los valores de las longitudes

$6x = 3 \times 8$ ... aplicar propiedad fundamental de las proporciones

$x = \frac{24}{6}$ ... despejar para x

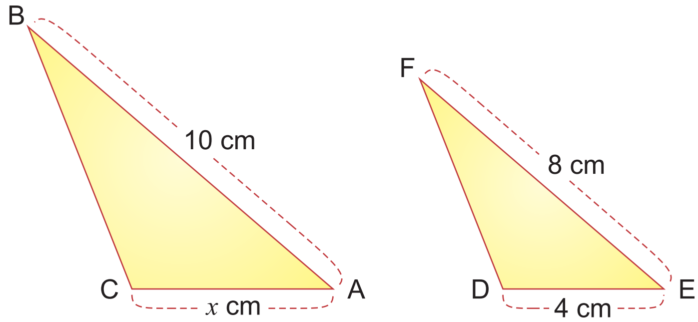
$x = 4$

Propiedad fundamental de las proporciones

$$\underbrace{a : \overbrace{b = c}^{\text{Medios}} : d}_{\text{Extremos}} \longrightarrow a\,d = b\,c$$

Respuesta: AB = 4 cm

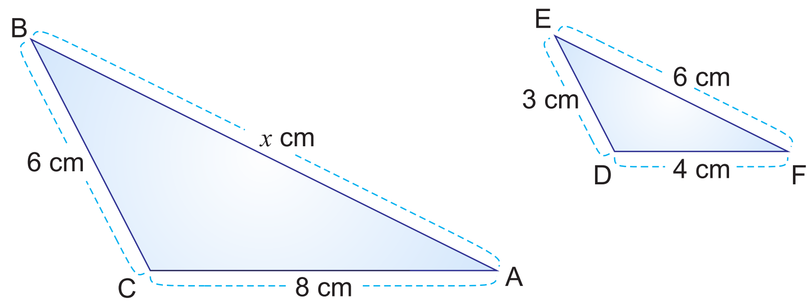
Ejercicio 1.3 Dado que ΔABC y ΔEFD son semejantes, es decir, $\Delta ABC \sim \Delta EFD$, encuentre la longitud del lado CA.



Hay casos donde es más conveniente usar la razón de semejanza para encontrar la longitud del lado que hace falta.

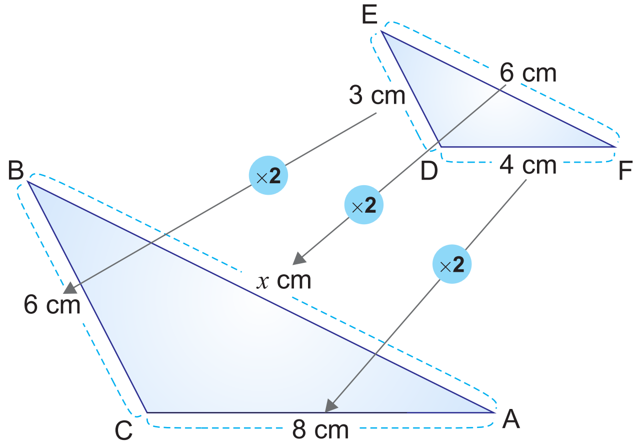
Ejemplo 1.5

Encuentre la longitud del lado AB si las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes ABC y FED están a razón de 2 : 1.



Solución:

La razón de semejanza 2 : 1 entre el ΔABC y el ΔFED, significa que la longitud de los lados del ΔABC es 2 veces la longitud de los lados correspondientes en el ΔFED.



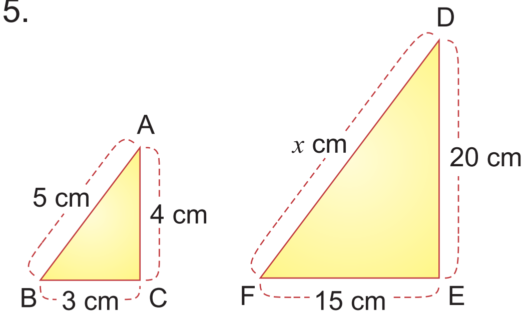
De esta forma, se tiene que:

$x = 6 \times 2$

$x = 12$

Respuesta: AB $=$ 12 cm

Ejercicio 1.4 Encuentre la longitud del lado DF si las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes ABC y DFE están a razón de 1 : 5.

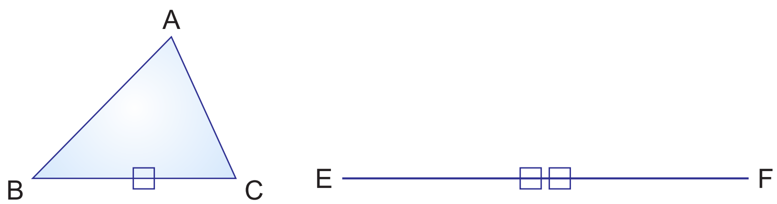


Sección 3: Criterios de semejanza de triángulos

A partir de un triángulo y de ciertas condiciones, se pueden construir triángulos semejantes a él.

Ejemplo 1.6

Construya el ΔDEF semejante al ΔABC cuyas longitudes de los lados correspondientes BC y EF están a razón de 1 : 2 (BC : EF = 1 : 2).



Solución:

El ΔDEF se puede construir haciendo uso de una de las siguientes maneras:

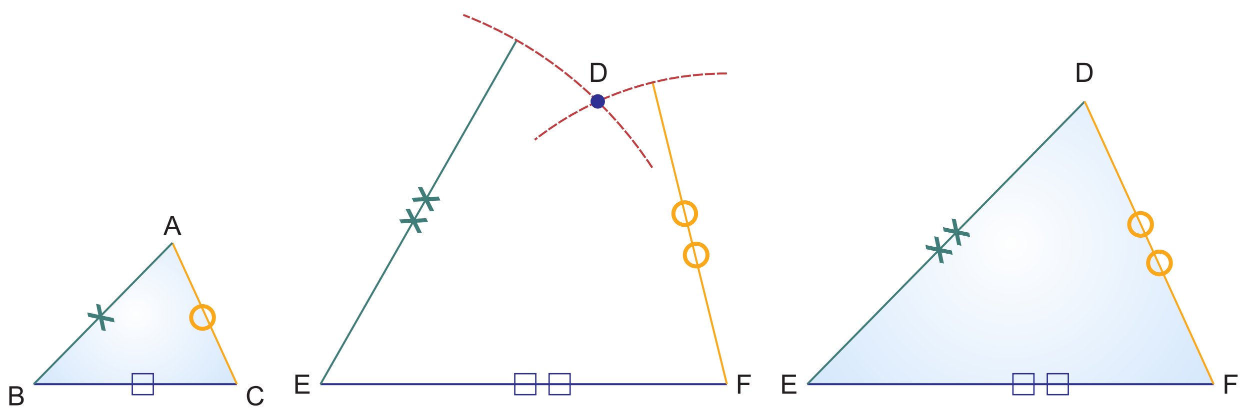
i) medida de sus 3 lados.

ii) medida de 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos.

iii) medida de 1 lado y los dos ángulos adyacentes a él.

Utilizando manera *i*)

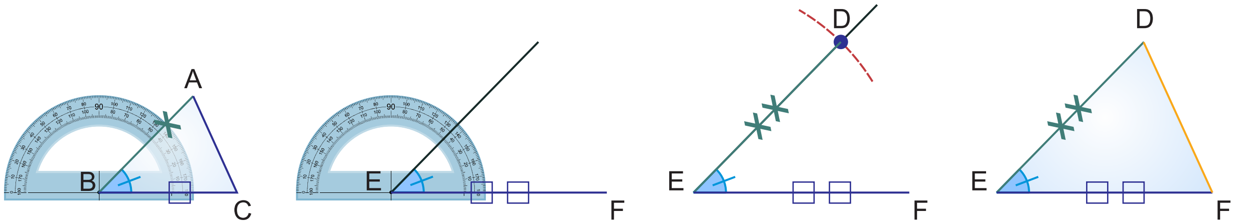
Aplicando la razón 1 : 2 a los lados correspondientes AB y DE, se tiene que AB : DE = 1 : 2, de igual forma AC : DF = 1 : 2.



De esta manera, el ΔDEF es congruente al triángulo de la ampliación al doble del ΔABC, así que, ΔDEF ~ ΔABC.

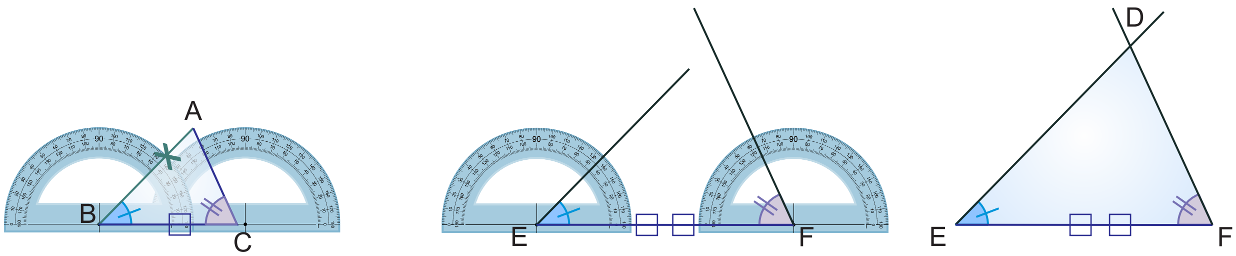
Utilizando manera *ii*)

Se construye el $\angle$E congruente al $\angle$B y se utiliza la proporción AB : DE $=$ 1 : 2



Utilizando manera *iii*)

Desde los extremos del segmento EF se construyen los ángulos conocidos, $\angle$B $\cong$ $\angle$E y $\angle$C $\cong$ $\angle$F. El punto de intersección de los lados de esos ángulos será el vértice D.



En caso de *ii*) y *iii*), también se puede concluir que ΔDEF ~ ΔABC.

En la práctica, para saber si dos triángulos son semejantes, no se necesita comparar las tres razones de las longitudes de parejas de lados correspondientes ni la congruencia de los tres ángulos.

Al igual que en la congruencia, existen los denominados criterios de semejanza, que constituyen las condiciones mínimas necesarias para establecer que dos triángulos son semejantes.

Criterios de semejanza de triángulos

1 Las razones de las longitudes de los tres lados correspondientes son iguales (LLL).

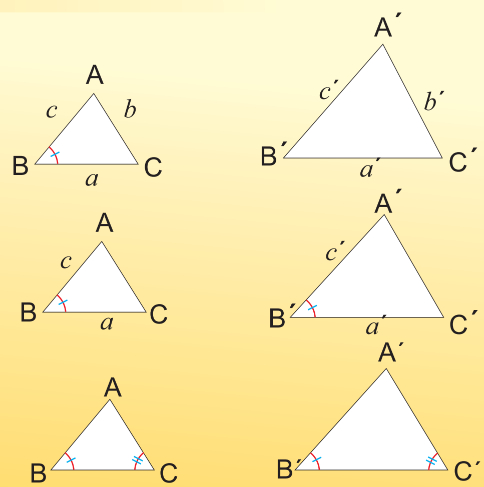
$a : a' = b : b' = c : c'$

2 Las razones de las longitudes de dos pares de lados correspondientes son iguales y el ángulo comprendido es congruente (LAL). $a : a' = c : c'$

$\angle B \cong \angle B'$

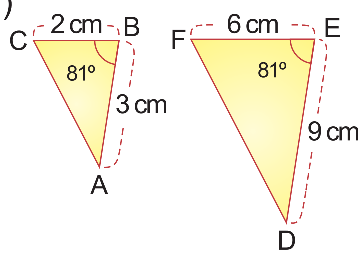
3 Dos ángulos correspondientes son congruentes (AA). $\angle B \cong \angle B'$

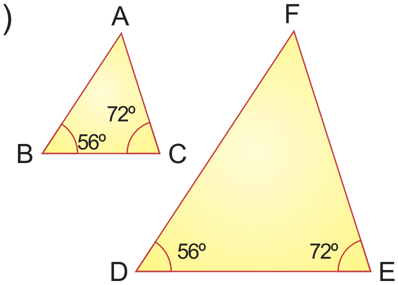
$\angle C \cong \angle C'$

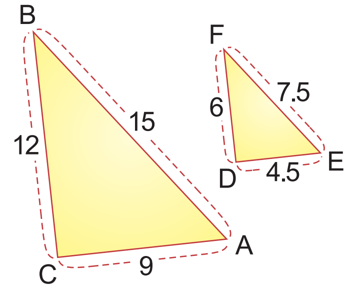


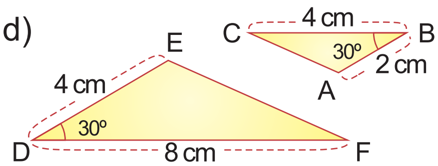
Tal como se comprobó al construir el ΔDEF de la manera *iii*), basta conocer la medida de dos ángulos para construir un triángulo semejante, la longitud de los lados puede estar en cualquier razón respecto al ΔABC.

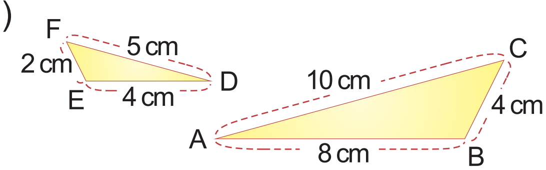
Ejercicio 1.5 Identifique el criterio de semejanza de triángulos (LLL, LAL, AA) utilizado para indicar si los siguientes triángulos son semejantes. La decisión debe basarse en las medidas dadas y no en la forma de los triángulos.

a)


b)


c)


d)


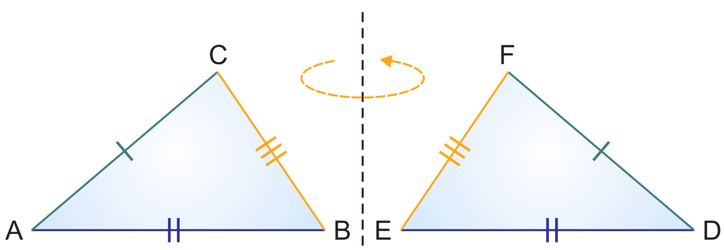
e)


Sección 4: Demostración aplicando criterios de semejanza de triángulos

Al igual que como se hizo con los criterios de congruencia en 8vo grado, se hará uso de los criterios de semejanza vistos anteriormente para demostrar la validez de una proposición a través del razonamiento directo o deductivo. Recuerde también que es conveniente prefijar un "Plan de desarrollo de la demostración" y escribir claramente las justificaciones o razones por las cuales las proposiciones son verdaderas.

Ejemplo 1.7

En la figura de abajo, el $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Demuestre que esos triángulos también son semejantes.



Hipótesis: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Entre ΔABC y ΔDEF ,

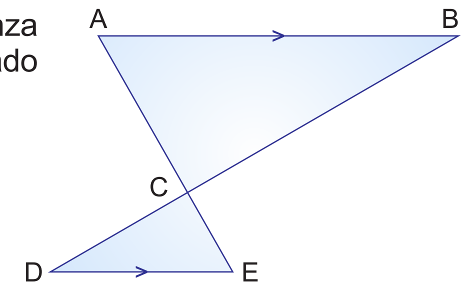
Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\angle A \cong \angle D$	Por hipótesis y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
2) $\angle B \cong \angle E$	Por hipótesis y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
3) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$	Por 1), 2) y criterio de semejanza AA

La congruencia de triángulos es un caso especial de la semejanza de triángulos.

Ejercicio 1.6 Razone y conteste.
Si la razón de semejanza entre los triángulos ABC y DEF es 1:1, ¿el ΔABC es congruente con el ΔDEF?

Ejemplo 1.8

Utilizando la figura de la derecha, demuestre la semejanza de los triángulos ABC y EDC si el lado AB es paralelo al lado DE.

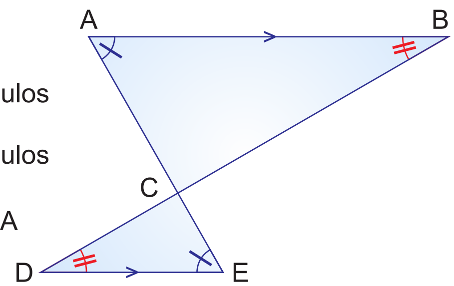


Solución:

Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

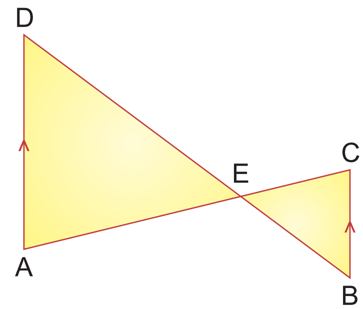
Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta EDC$

Entre ΔABC y ΔEDC ,



Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\angle A \cong \angle E$	Por hipótesis y congruencia de ángulos alternos internos
2) $\angle B \cong \angle D$	Por hipótesis y congruencia de ángulos alternos internos
3) $\Delta ABC \sim \Delta EDC$	Por 1), 2) y criterio de semejanza AA

Ejercicio 1.7 En la figura dada, si el lado AD es paralelo al lado BC, demuestre que los triángulos ADE y CBE son semejantes.



Solución:

Hipótesis: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

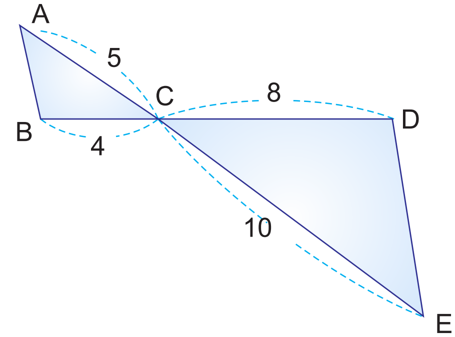
Conclusión: $\Delta ADE \sim \Delta CBE$

Entre ____ y ΔCBE ,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\angle A \cong$ ____	____ y congruencia de ángulos ____
2) ____ $\cong \angle B$	Por hipótesis y ____
3) ____ $\sim \Delta CBE$	Por 1), 2) y criterio de semejanza ____

Ejemplo 1.9

En la figura dada, si los lados correspondientes de los triángulos ABC y EDC tienen las siguientes medidas: AC = 5 y EC = 10, BC = 4 y DC = 8, demuestre que los triángulos ABC y EDC son semejantes.



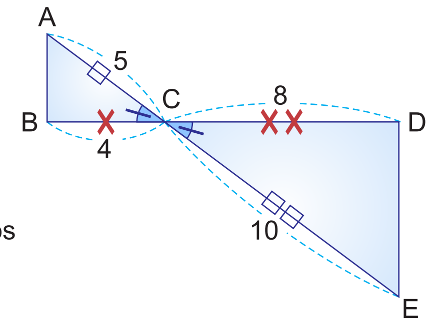
Solución:

Hipótesis: AC = 5 y EC = 10
BC = 4 y DC = 8

Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta EDC$

Entre ΔABC y ΔEDC ,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) AC : EC = 5 : 10 = 1 : 2	Por hipótesis y cálculo de razón simplificada
2) BC : DC = 4 : 8 = 1 : 2	Por hipótesis y cálculo de razón simplificada
3) AC : EC = BC : DC	Por 1) y 2)
4) $\angle ACB \cong \angle ECD$	Por ser ángulos opuestos por el vértice
5) $\Delta ABC \sim \Delta EDC$	Por 3), 4) y criterio de semejanza LAL



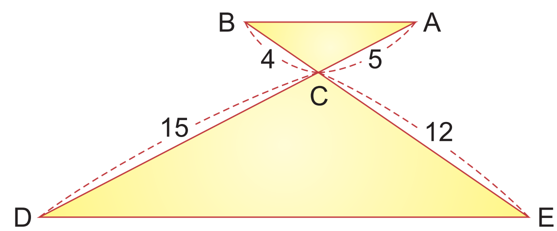
Ejercicio 1.8 En la figura dada, si los lados correspondientes de los triángulos ABC y DEC tienen las siguientes medidas: AC = 5 y DC = 15, BC = 4 y EC = 12, demuestre que los triángulos ABC y DEC son semejantes.

Solución:

Hipótesis: AC = 5 y DC = 15
BC = 4 y EC = 12

Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta DEC$

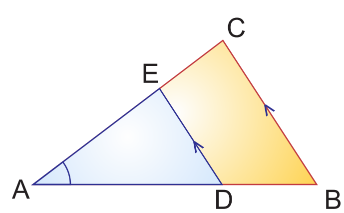
Entre ΔABC y ____ ,



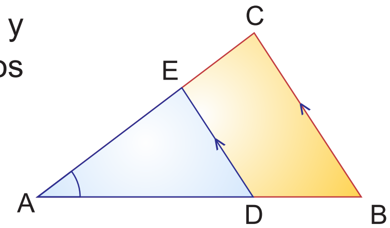
Afirmaciones	**Justificaciones**
1) AC : DC = 5 : 15 = ____ : ____	Por ____ y cálculo de razón simplificada
2) BC : EC = ____ : ____ = 1 : 3	Por ____
3) AC : DC = ____ : ____	Por 1) y ____
4) ____ $\cong \angle DCE$	Por ser ángulos ____
5) ____ $\sim \Delta DEC$	Por ____ , ____ y criterio de semejanza ____

Sección 5: : Rectas paralelas y proporción

Dos triángulos están en posición de Thales cuando tienen un ángulo común y los lados opuestos a este ángulo son paralelos.



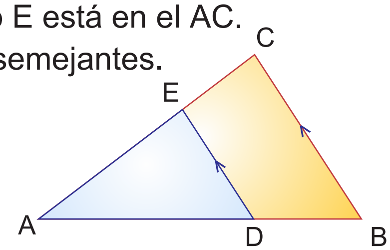
En la figura anterior, se puede ver que los dos triángulos ADE y ABC tienen el $\angle A$ en común, mientras que los lados opuestos a este ángulo, los lados DE y BC, son paralelos.



Se demostrará que si dos triángulos se pueden poner en posición de Thales, entonces sus ángulos correspondientes son congruentes y las longitudes de sus lados correspondientes proporcionales, y por tanto, son semejantes.

Ejemplo 1.10

En el ΔABC de la figura, el punto D está en el $\overline{AB}$ y el punto E está en el $\overline{AC}$. Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, demuestre que los triángulos ADE y ABC son semejantes.



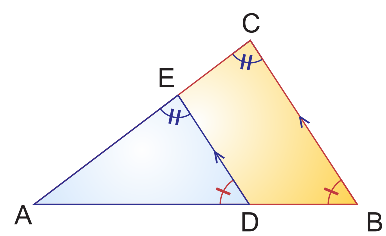
Solución:

Hipótesis: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Conclusión: $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

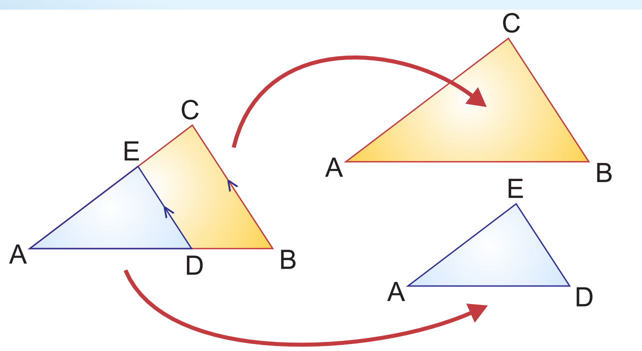
Entre ΔADE y ΔABC ,

Afirmaciones	Justificaciones
1) $\angle ADE \cong \angle ABC$	Por hipótesis y congruencia de ángulos correspondientes
2) $\angle AED \cong \angle ACB$	Por hipótesis y congruencia de ángulos correspondientes
3) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$	Por 1), 2) y criterio de semejanza AA



En general, se puede decir que

Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo que corta a los otros dos lados determina un triángulo semejante al dado.



Puesto que $\Delta ADE \sim \Delta ABC$, se sabe que la razón de cualesquiera dos longitudes de lados correspondientes es la misma.
De esta forma, a partir de $AB : AD = AC : AE = BC : DE$ se pueden formar proporciones como:

$$AB : AD = AC : AE$$
$$AC : AE = BC : DE$$
$$AB : AD = BC : DE$$

Todo lo anterior también puede expresarse con sus razones inversas.

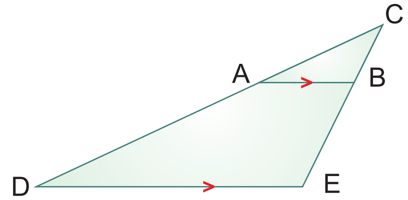
Ejercicio 1.9 En el $\triangle DEC$, el punto A está en el $\overline{CD}$ y el punto B está en el $\overline{CE}$. Si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, demuestre que los triángulos ABC y DEC son semejantes.

Solución:

Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

Conclusión: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

Entre ______ y $\triangle DEC$,

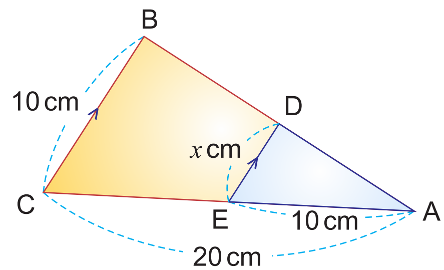


Afirmaciones	**Justificaciones**
1) ______ $\cong \angle CDE$	Por hipótesis y congruencia de ángulos ______ entre paralelas
2) $\angle CBA \cong$ ______	Por hipótesis y ______
3) $\triangle ABC \sim$ ______	Por 1), 2) y criterio de semejanza ______

Al igual que en ejercicios anteriores, se puede aplicar la propiedad fundamental de la proporciones para encontrar la longitud de un lado de un triángulo semejante a otro en posición de Thales.

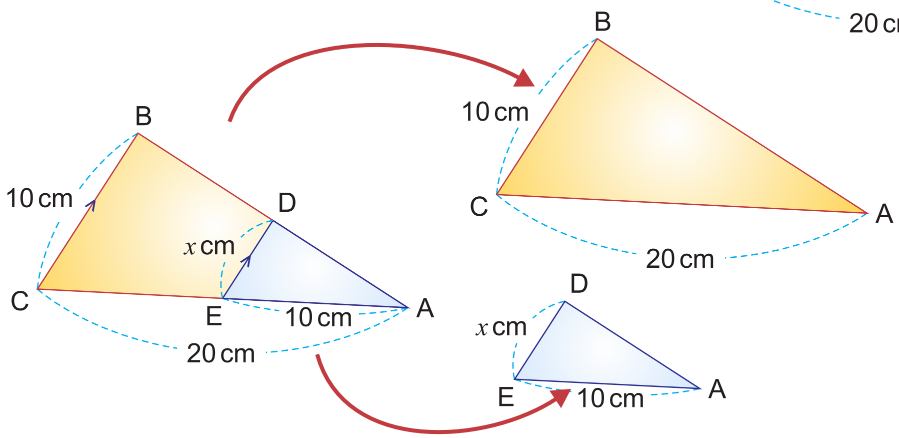
Ejemplo 1.11

En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre la longitud del lado DE.



Solución:

Al separar los triángulos semejantes que están en posición de Thales, se muestra que



Y aplicando la proporcionalidad de los lados, se tiene que,

$$BC : DE = CA : EA$$

$10 : x = 20 : 10$ ... sustituir los valores de las longitudes

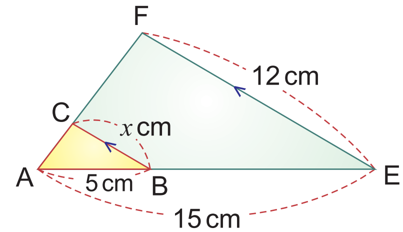
$20x = 10 \times 10$ ... aplicar propiedad fundamental de las proporciones

$x = \frac{100}{20}$ ... despejar para x

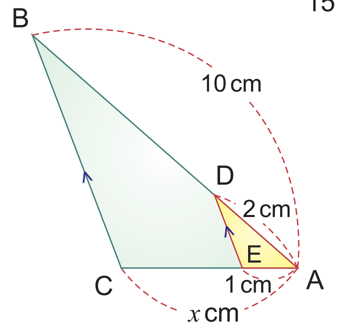
$x = 5$

Respuesta: DE = 5 cm

Ejercicio 1.10 a) En la figura dada, si $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$, encuentre la longitud del lado BC.



b) En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre la longitud del lado CA.



Sección 6: Relación entre triángulos y proporción

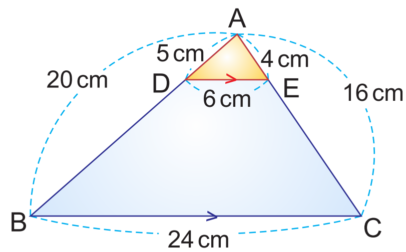
Ejemplo 1.12

En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre

a) La razón de semejanza entre ΔADE y ΔABC

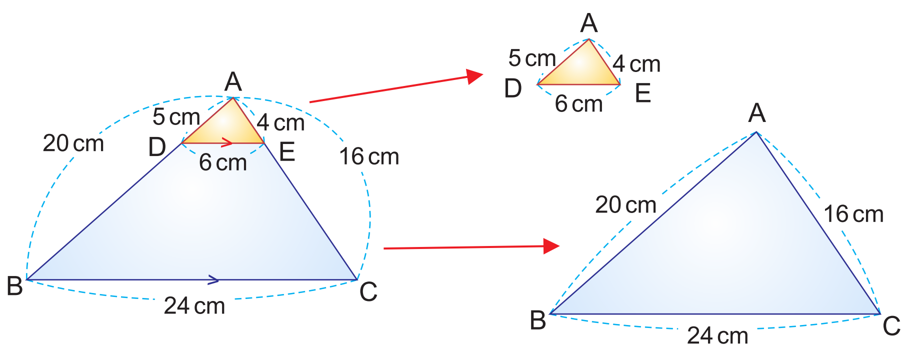
b) La razón entre las longitudes de los lados AD y DB

c) La razón entre las longitudes de los lados AE y EC



Solución:

a) Puesto que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ y se puede calcular la razón de semejanza dividiendo la longitud de un lado cualquiera del ΔADE entre la longitud del lado correspondiente del ΔABC.



Tomando la longitud del lado AD y su correspondiente lado AB, se tiene que

AD : AB = 5 : 20 = 1 : 4

Respuesta: 1 : 4

La respuesta sería la misma si se hubiesen tomado las razones de AE : AC y DE : BC.

b) Para encontrar la razón AD : DB, primero se debe calcular la longitud del lado

AB = AD + DB
20 = 5 + DB ... sustituir los valores de las longitudes
DB = 20 − 5 ... despejar para DB
DB = 15
Luego, AD : DB = 5 : 15 = 1 : 3

Respuesta: AD : DB = 1 : 3

c) Para encontrar la razón AE : EC, se calcula primero la longitud del lado EC.

AC = AE + EC
16 = 4 + EC ... sustituir los valores de las longitudes
EC = 16 − 4 ... despejar para EC
EC = 12
Luego, AE : EC = 4 : 12 = 1 : 3

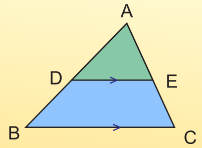
Respuesta: AE : EC = 1 : 3

La razón entre los lados AD y DB es igual a la razón entre los lados AE y EC, por lo que AD : DB = AE : EC.
En general, al relacionar triángulos y proporciones, se dan las siguientes conclusiones:

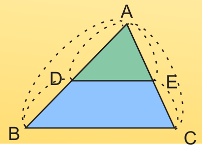
Relación entre triángulo y proporción

En el ΔABC sean D y E puntos en los lados AB y AC respectivamente.

1 Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ entonces se tiene que:
AD : AB = AE : AC = DE : BC
También AD : DB = AE : EC



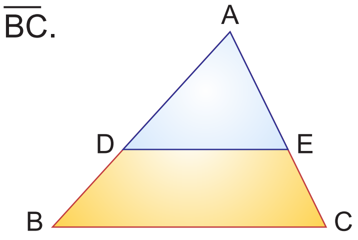
2 Si AD : AB = AE : AC entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
Si AD : DB = AE : EC entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



De la conclusión anterior se probará el primer resultado del numeral **2**, y el segundo queda fuera del propósito de este libro, posiblemente será abordado en niveles superiores.

Ejemplo 1.13

En la figura dada, si AD : AB = AE : AC, demuestre que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



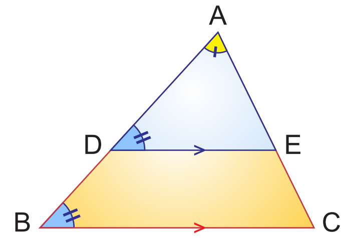
Solución:

Hipótesis: AD : AB = AE : AC

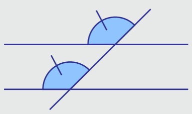
Conclusión: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Entre ΔADE y ΔABC,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) AD : AB = AE : AC	Por hipótesis
2) $\angle$DAE $\cong$ $\angle$BAC	Por congruencia del mismo ángulo
3) ΔADE ~ ΔABC	Por 1), 2) y criterio de semejanza LAL
4) $\angle$ADE $\cong$ $\angle$ABC	Por 3) y ser ángulos correspondientes de triángulos semejantes
5) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	Por 4) y condición de paralelismo



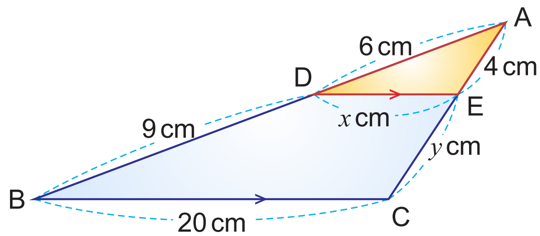
Condición de paralelismo
Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.



Ejemplo 1.14

En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre

a) La razón de semejanza entre ΔADE y ΔABC
b) La longitud del lado DE
c) La longitud del lado EC



Solución:

a) Puesto que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces ΔADE ~ ΔABC.

La razón de semejanza se calculará dividiendo la longitud de un lado conocido del ΔADE entre la longitud del lado correspondiente del ΔABC. En este ejemplo, se conoce la longitud del lado AD y la longitud del lado correspondiente AB es,

AB = AD + DB = 6 + 9 = 15 cm

De esta forma, AD : AB = 6 : 15 = 2 : 5

Respuesta: 2 : 5.

b) Para calcular la longitud del lado DE, se utilizará la razón de semejanza encontrada en el inciso anterior.

AD : AB = DE : BC ... emplear la proporcionalidad de los lados

$2 : 5 = x : 20$ ... sustituir los valores de las longitudes

$5x = 2 \times 20$ ... aplicar propiedad fundamental de las proporciones

$x = \frac{40}{5}$ ... despejar para x

$x = 8$

Respuesta: DE = 8 cm

c) Para calcular la longitud del lado EC, se utilizará la razón entre los lados AD y DB.

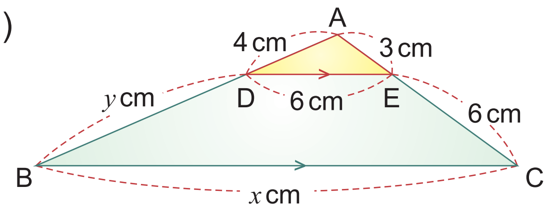
$AD : DB = AE : EC$	... emplear la proporcionalidad de los lados
$6 : 9 = 4 : y$	... sustituir los valores de las longitudes
$6y = 9 \times 4$	... aplicar propiedad fundamental de las proporciones
$y = \frac{36}{6}$	... despejar para x
$y = 6$	

También se puede usar la razón de semejanza entre ΔADE y ΔABC.

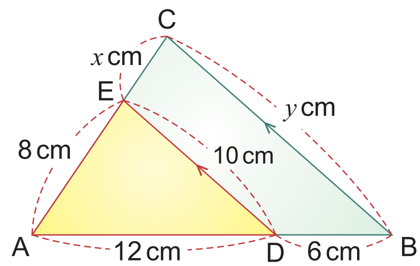
Respuesta: $EC = 6$ cm

Ejercicio 1.11 En las figuras dadas, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre la razón de semejanza entre los triángulos ADE y ABC y las longitudes x y y.

a)



b)



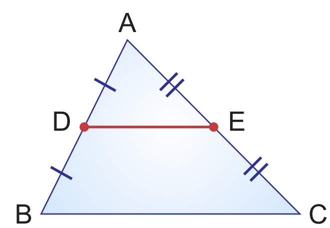
Sobre los triángulos se conocen numerosos teoremas, algunos acerca de sus lados, otros sobre sus ángulos y también aquellos que relacionan lados y ángulos. Algunos ejemplos son:

- La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180º
- La suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo es 360º

A continuación se estudiarán dos teoremas que permiten resolver con mayor facilidad los problemas relacionados con esta figura geométrica: Teorema del Segmento Medio y Teorema General de Thales.

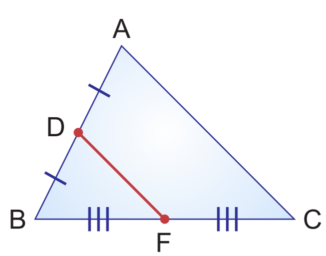
En la figura, D es el punto medio del $\overline{AB}$ y E es el punto medio del $\overline{AC}$.

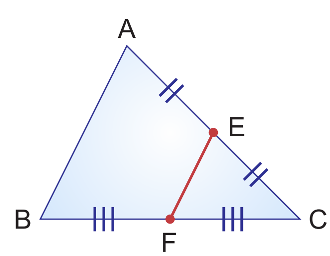
Así, el $\overline{DE}$ es un segmento medio del triángulo ABC.



Un **segmento medio** de un triángulo es un segmento que conecta los puntos medios de dos lados de un triángulo.

En las figuras, sea F el punto medio del $\overline{BC}$.



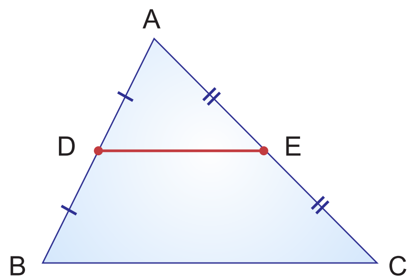


Al segmento medio de un triángulo, también se le llama conector de puntos medios.

$\overline{DF}$ y $\overline{EF}$ también son segmentos medios del triángulo ABC.

Ejemplo 1.15

Demuestre que si D es el punto medio del $\overline{AB}$ y E es el punto medio del $\overline{AC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ y $DE = \frac{1}{2}$ BC.



Solución:

Hipótesis: $AD = DB$
$AE = EC$

Conclusión: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
$DE = \frac{1}{2} BC$

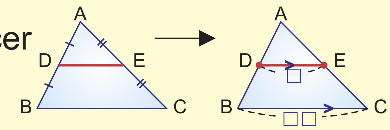
Entre $\triangle ADE$ y $\triangle ABC$,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $AD : AB = 1 : 2$	Por hipótesis y definición de punto medio
2) $AE : AC = 1 : 2$	Por hipótesis y definición de punto medio
3) $AD : AB = AE : AC$	Por 1) y 2)
4) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	Por 3) y relación entre triángulo y proporción (Ver Ejemplo 1.13)
5) $DE : BC = AD : AB$	Por 4) y relación entre triángulo y proporción
6) $DE : BC = 1 : 2$	Por 1) y 5)
7) $DE = \frac{1}{2} BC$	Por 6) y propiedad fundamental de las proporciones

Teorema del segmento medio de un triángulo

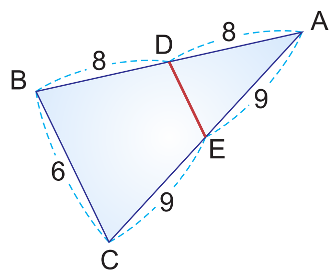
El segmento medio de un triángulo es paralelo al tercer lado del triángulo y tiene la mitad de su longitud.

$$\overline{DE} \parallel \overline{BC} \text{ y } DE = \frac{1}{2} BC$$



Ejemplo 1.16

En la figura dada, D es el punto medio del $\overline{AB}$ y E es el punto medio del $\overline{AC}$, encuentre la longitud del lado DE.



Solución:

Aquí D es el punto medio del $\overline{AB}$, y E es el punto medio del $\overline{AC}$. Así, $\overline{DE}$ es un segmento medio.

Por lo tanto, por el teorema del segmento medio de un triángulo,

$DE = \frac{1}{2} BC$

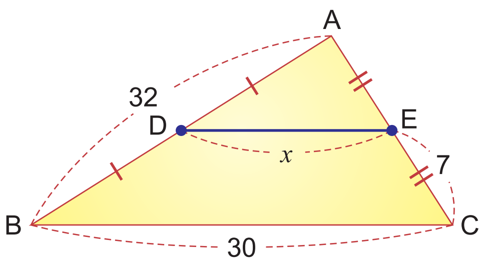
$DE = \frac{1}{2} (6)$

$DE = 3$

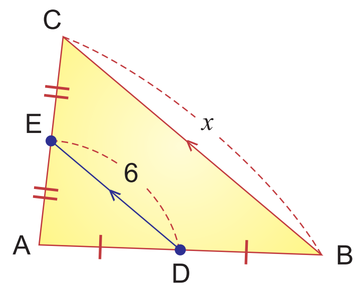
Respuesta: $DE = 3$

Ejercicio 1.12 En las figuras, D es el punto medio del $\overline{AB}$ y E es el punto medio del $\overline{AC}$, encuentre el valor de x.

a)



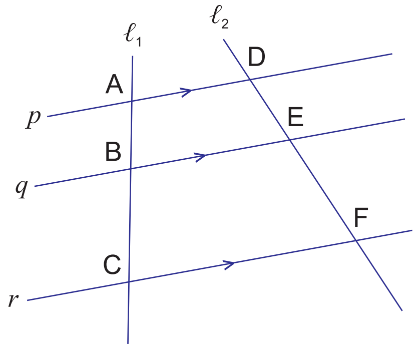
b)



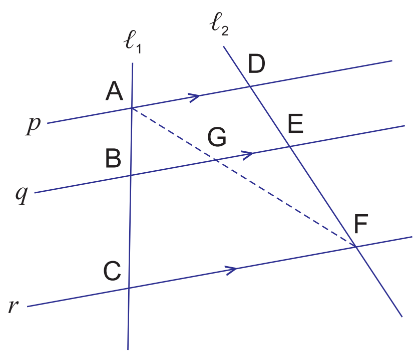
Sección 7: Relación entre paralelas y proporción

Ejemplo 1.17

En la figura dada, las rectas p, q y r son paralelas.
Demuestre que AB : BC = DE : EF.



Solución:
Se hará uso del segmento auxiliar AF que interseca a la recta q en el punto G. Luego, en los triángulos ACF y ADF se utilizarán las relaciones vistas entre triángulos y proporciones. (Ver **Ejemplo 1.12**)



Hipótesis: Rectas p, q y r son paralelas.

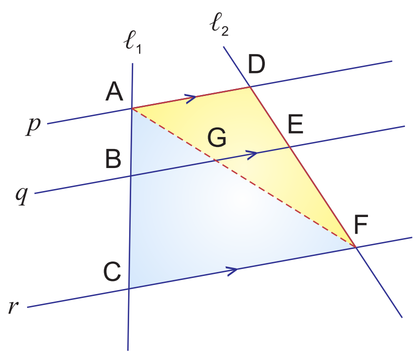
Conclusión: AB : BC = DE : EF

En $\triangle ACF$,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{BG} \parallel \overline{CF}$	Por hipótesis
2) AB : BC = AG : GF	Por 1) y relación entre triángulo y proporción

En $\triangle ADF$,

3) $\overline{AD} \parallel \overline{GE}$	Por hipótesis
4) AG : GF = DE : EF	Por 3) y relación entre triángulo y proporción
5) AB : BC = DE : EF	Por 2) y 4)



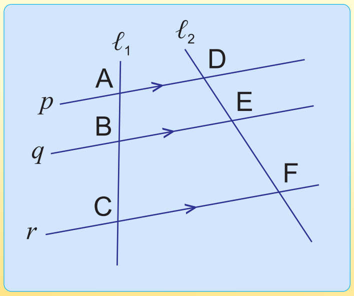
Lo anterior demuestra el teorema de Thales, que en aplicaciones permite encontrar la longitud de un segmento si conocemos su correspondiente en la otra recta y la razón entre ambos.

Relación entre rectas paralelas y proporción
Teorema de Thales

Tres o más rectas paralelas dividen proporcionalmente dos transversales cualesquiera.

Si las rectas p, q y r son paralelas, entonces

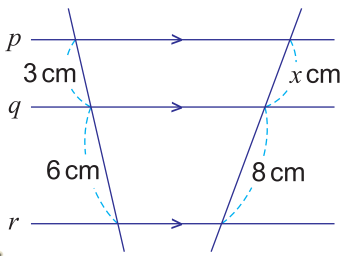
$$AB : BC = DE : EF$$



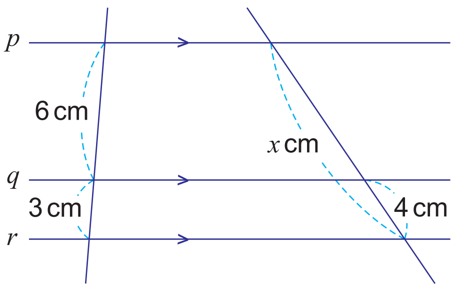
Ejemplo 1.18

En cada una de las figuras de abajo, las rectas p, q y r son paralelas. Encuentre el valor de x.

a)



b)



Solución:

a) $3 : 6 = x : 8$ ... aplicar el teorema de Thales

$6x = 3 \times 8$ ... aplicar propiedad fundamental de las proporciones

$x = \frac{24}{6}$ ... despejar para x

$x = 4$

Respuesta: $x = 4$

b) $x : 4 = (6 + 3) : 3$ ... aplicar el teorema de Thales

$x : 4 = 9 : 3$ ... resolver operación entre paréntesis

$3x = 4 \times 9$ ... aplicar propiedad de las proporciones

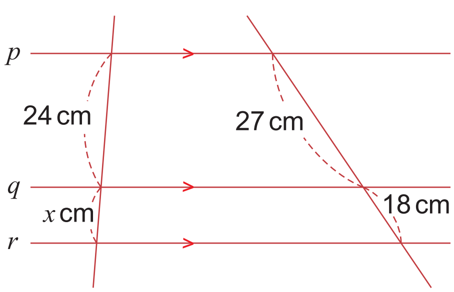
$x = \frac{36}{3}$ ... despejar para x

$x = 12$

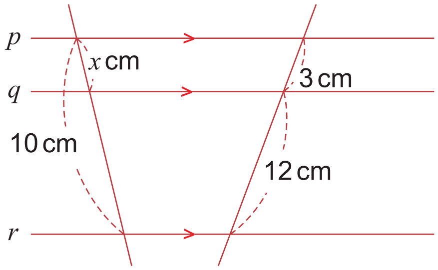
Respuesta: $x = 12$

Ejercicio 1.13 En cada una de las figuras de abajo, las rectas p, q y r son paralelas. Encuentre el valor de x.

a)



b)



Aplicando el teorema de Thales sobre segmentos, se puede dividir un segmento en cualquier cantidad de partes iguales.

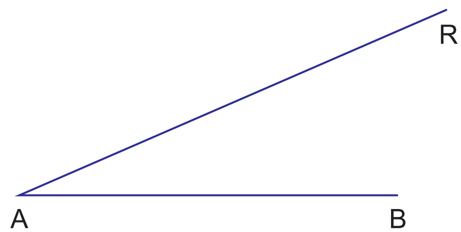
Ejemplo 1.19

Divida el segmento AB en tres partes iguales usando compás, regla y escuadras.

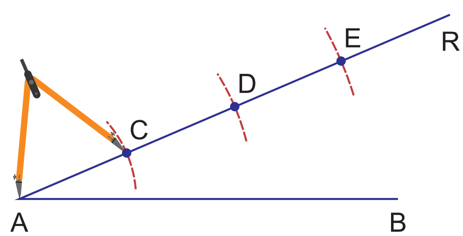
Solución:

El procedimiento en general, es encontrar segmentos proporcionales obtenidos mediante paralelas que cortan al segmento dado y a otra transversal que se construirá en cada caso.

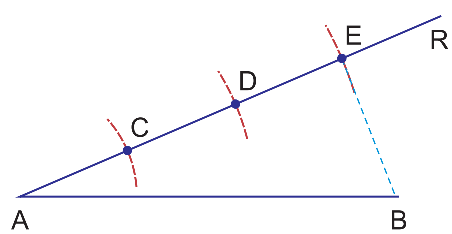
Paso 1: Trazar un rayo AR formando un ángulo con respecto al segmento AB.



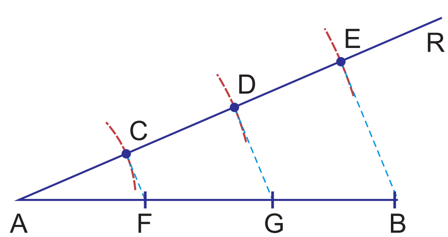
Paso 2: Sobre el rayo AR, con el compás marque las 3 partes iguales con un radio cualquiera, los puntos de corte se nombrarán C, D y E.

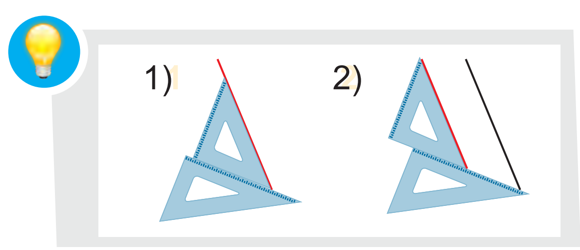


Paso 3: Una los puntos B y E.

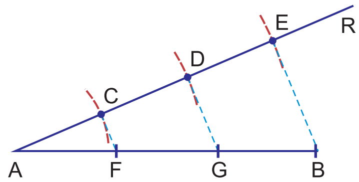


Paso 4: Trace en cada punto marcado en el rayo AR una paralela al segmento BE hasta cortar al segmento AB en los puntos F y G.





Aplicando la relación entre triángulo y proporción y el teorema de Thales, se puede comprobar que las divisiones encontradas en el segmento AB tienen la misma medida, y se corresponden con las tres partes iguales trazadas sobre el rayo AR.



Demostración

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) Los segmentos CF, DG y EB son paralelos	Por construcción
2) AC : CD = 1 : 1	Por construcción
3) AC : CD = AF : FG	Por 1) y relación entre triángulo y proporción
4) AF : FG = 1:1	Por 2) y 3)
5) AF = FG	Por 4)
6) CD : DE = 1 : 1	Por construcción
7) CD : DE = FG : GB	Por 6) y aplicación del teorema de Thales
8) FG : GB = 1 : 1	Por 6) y 7)
9) FG = GB	Por 8)
10) AF = FG = GB	Por 5) y 9)

Ejercicio 1.14 Divida el segmento AB en cuatro partes iguales usando compás, regla y escuadras, tal como se hizo es el *Ejemplo* 1.19 .

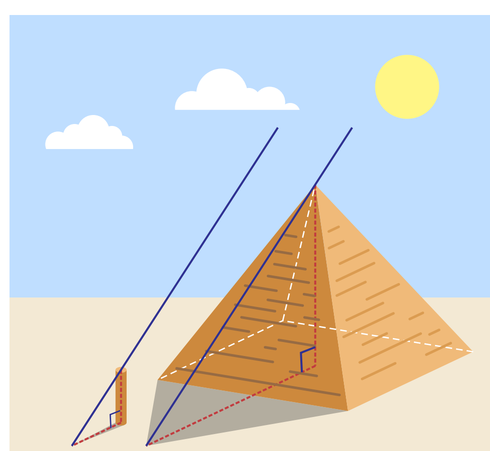
Sección 8: Aplicación de la semejanza de triángulos

Origen del teorema de Thales

Thales (o Tales) nació hacia el 625 a. C. en Mileto, una de las primeras ciudades fundadas por los griegos a orillas del mar Egeo, la cual en esa época era una de las más ricas y evolucionadas de la zona. Thales era considerado como uno de los siete sabios de Grecia.

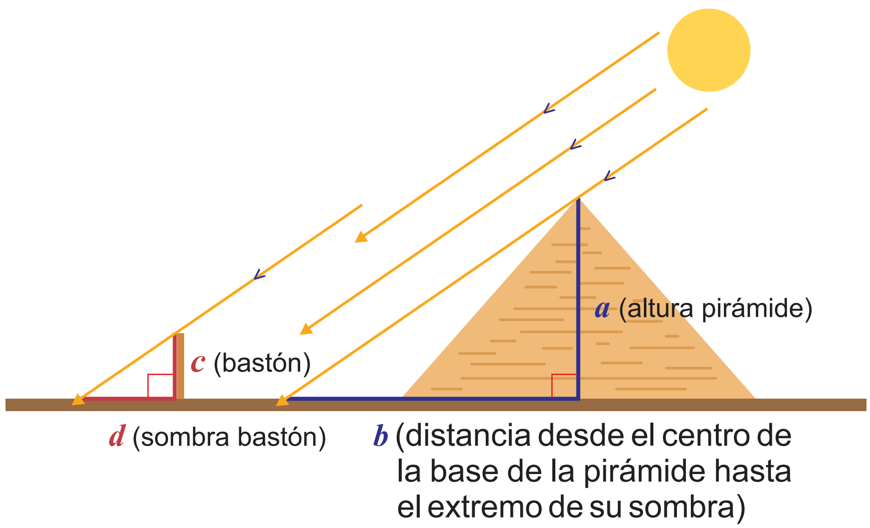
Hay muchas versiones de cómo sucedió la historia, aquí se contará una de ellas. Lo que hoy se conoce como el teorema de Thales, se origina cuando Thales viajó a Egipto para aprender matemáticas, hacia el año 600 a. C., se dice que estando allí, inventó un procedimiento para calcular la altura de la pirámide Keops por semejanza, esto lo pudo hacer midiendo la sombra de ésta y la de su bastón.

La proporcionalidad entre la altura de la pirámide y la del bastón, hacían posible calcular la altura deseada.



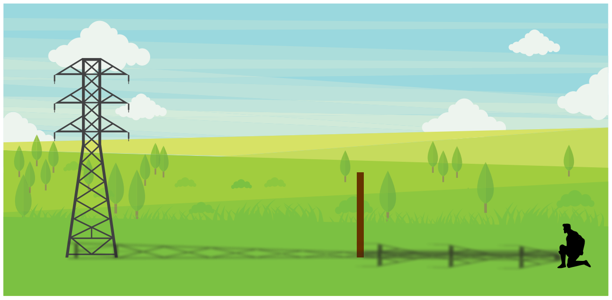
Para hacer este cálculo, supuso que los rayos del sol incidían paralelamente en la tierra, entonces la sombra que generaba la pirámide y su altura forman un triángulo rectángulo, y la sombra del bastón con su altura otro. Estos dos triángulos rectángulos son semejantes, por lo tanto, pudo establecer la siguiente proporción para obtener la altura:

$a : b = c : d$ y luego despejar para a.



Ejemplo 1.20

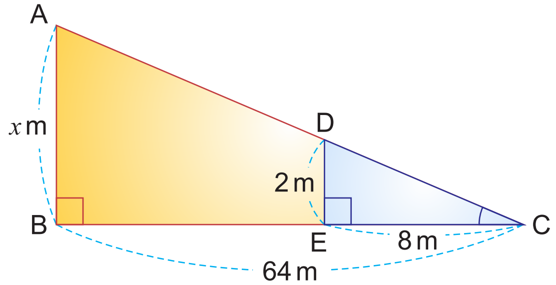
Se quiere medir la altura de una torre, pero no es posible hacerlo directamente. Para ello, a la misma hora se midió la sombra que proyecta sobre el suelo un poste de 2 m de altura y la sombra que proyecta la torre. La sombra del poste mide 8 m y la de la torre mide 64 m. Encuentre la altura de la torre, si el poste y la torre forman un ángulo recto con el suelo.



Solución:

La siguiente figura, ilustra la situación planteada.

Por el criterio de semejanza AA, los triángulos ABC y DEC que se forman son semejantes y por lo tanto, se puede establecer una proporcionalidad entre las longitudes de sus lados correspondientes.



$$x : 2 = 64 : 8$$

$$8x = 2 \times 64 \quad \text{... aplicar propiedad fundamental de las proporciones}$$

$$x = \frac{128}{8} \quad \text{... despejar para } x$$

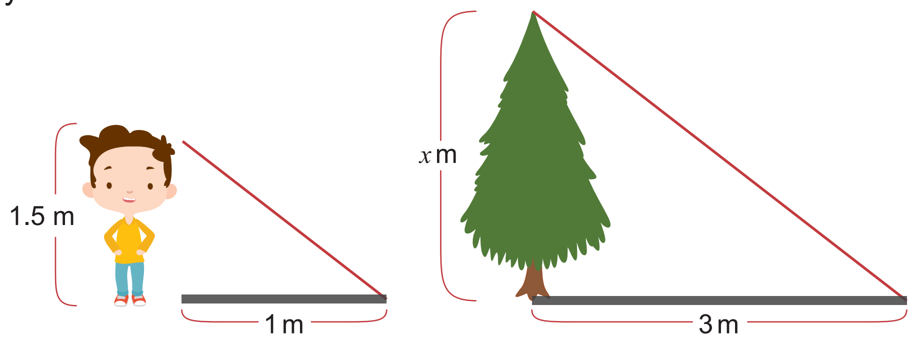
$$x = 16$$

Respuesta: 16 m

Ejercicio 1.15 Aplicando la semejanza de triángulos, resuelva los siguientes problemas:

a) Si la torre del **Ejemplo 1.20** tuviese una altura de 10 m, ¿cuánto mediría la sombra proyectada?

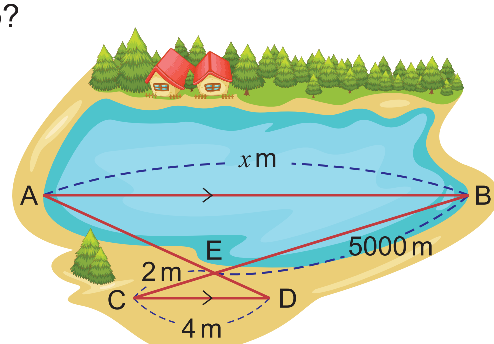
b) Un joven de 1.5 m de altura proyecta una sombra de 1 m, ¿cuál es la altura del árbol que proyecta una sombra de 3 m a la misma hora?



c) La sombra de un adulto mide 1.4 m y en el mismo instante la sombra de un edificio de 10 m que se encuentra cerca mide 8 m. Encuentre la altura del adulto, si el edificio y el adulto forman un ángulo recto con la tierra.

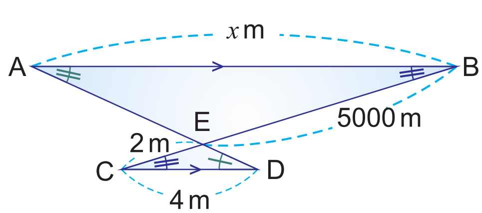
Ejemplo 1.21

Para medir la parte más larga de un lago, un ingeniero marcó los puntos A, B, C, D y E como lo muestra el dibujo. Los segmentos AB y CD son paralelos. ¿Cuántos metros mide la parte más larga del lago?



Solución:

Por el criterio de semejanza AA, los triángulos ABE y DCE que se forman son semejantes y por lo tanto, se puede establecer una proporcionalidad entre las longitudes de sus lados correspondientes.



$2 : 5000 = 4 : x$

$2x = 5000 \times 4$ ... aplicar propiedad fundamental de las proporciones

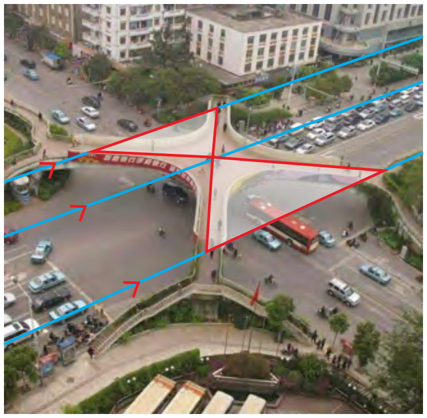
$x = \dfrac{20000}{2}$ ... despejar para x

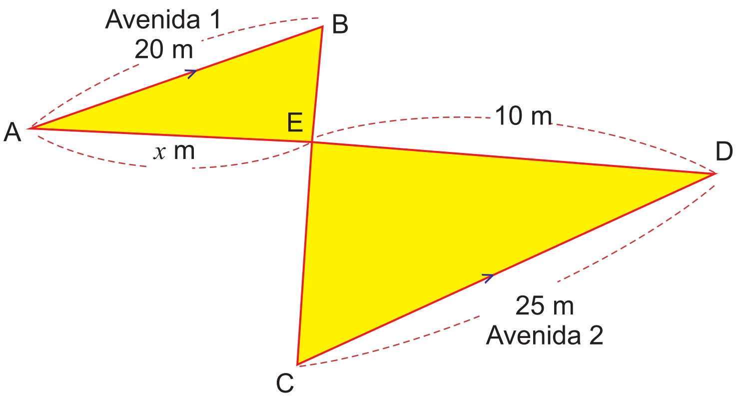
$x = 10000$

Respuesta: 10000 m

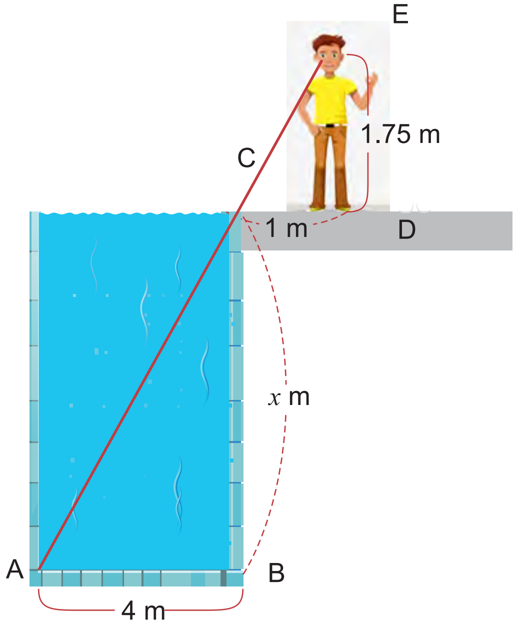
Ejercicio 1.16 Aplicando la semejanza de triángulos, resuelva los siguientes problemas:

a) Sobre dos avenidas paralelas se han construido dos puentes peatonales que se cortan en el punto E. Teniendo en cuenta las medidas de la figura, encuentre la longitud del $\overline{AE}$.



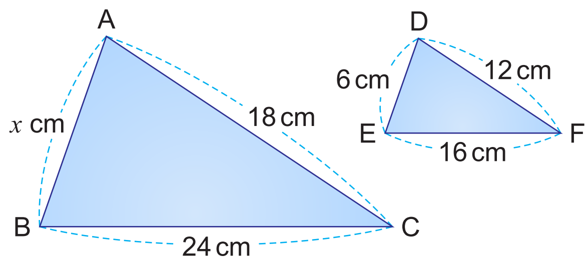


b) Un pozo tiene 4 m de ancho. Un hombre que tiene 1.75 m hasta la altura de sus ojos se sitúa a 1 m del borde y observa que la línea visual une el borde del pozo con la línea de fondo. ¿Qué profundidad tiene el pozo?



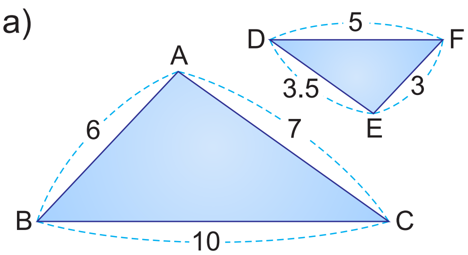
Ejercicios

1 Dado que ΔABC y ΔDEF son semejantes, es decir, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, encuentre la longitud del lado AB.

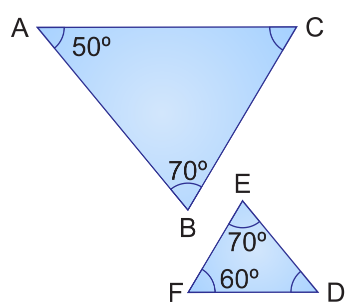


2 Identifique el criterio de semejanza de triángulos (LLL, LAL, AA) utilizado para indicar si los siguientes triángulos son semejantes. La decisión debe basarse en las medidas dadas y no en la forma de los triángulos.

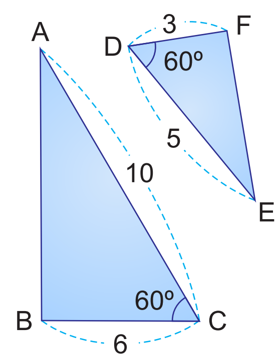
a)



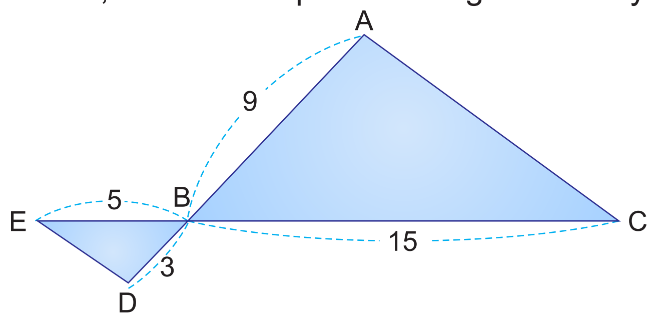
b)



c)



3 Los segmentos AD y EC se cortan en el punto B como se muestra en la figura dada, si los lados correspondientes de los triángulos ABC y DBE tienen las siguientes medidas: $AB = 9$ y $DB = 3$, $BC = 15$ y $BE = 5$, demuestre que los triángulos ABC y DBE son semejantes.



Solución:

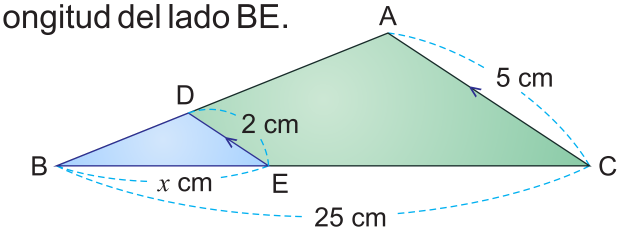
Hipótesis:

Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta DBE$

Entre ΔABC y ,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $AB : DB = 9 : 3 =$:	y cálculo de razón simplificada
2) $BC : BE =$: $= 3 : 1$	
3) $AB : DB =$:	Por y
4) $\cong \angle DBE$	Por ser ángulos
5) $\Delta ABC \sim$	Por , y criterio de semejanza

4 En la figura dada, si $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, encuentre la longitud del lado BE.

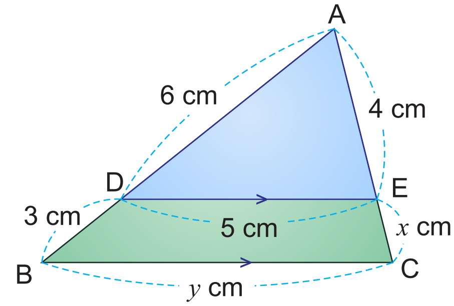


5 En la figura de la derecha, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, encuentre:

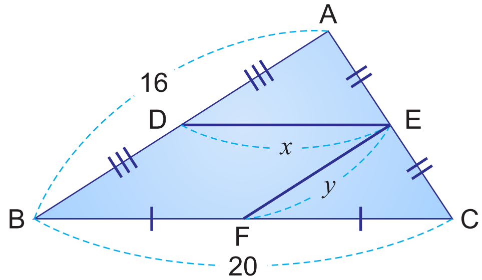
a) La razón de semejanza entre ΔADE y ΔABC

b) La longitud del lado EC

c) La longitud del lado BC

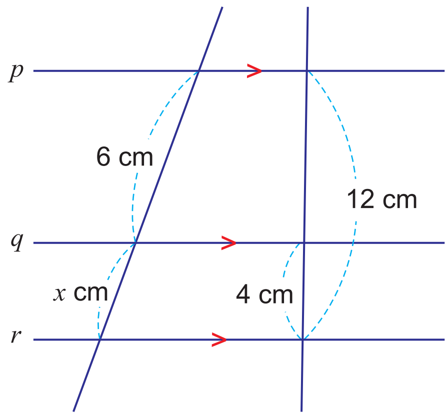


6 En la figura, D es el punto medio del $\overline{AB}$, F es el punto medio del $\overline{BC}$ y E es el punto medio del $\overline{AC}$. Encuentre el valor de x y y.

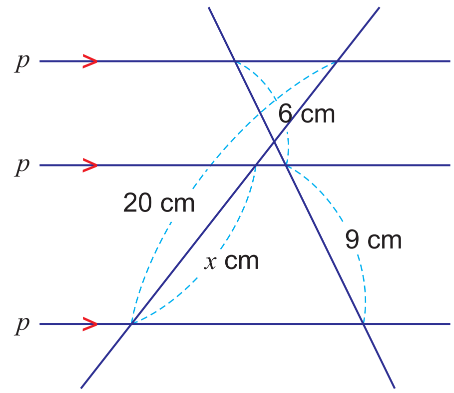


7 En cada una de las figuras de abajo, las rectas p, q y r son paralelas. Encuentre el valor de x.

a)

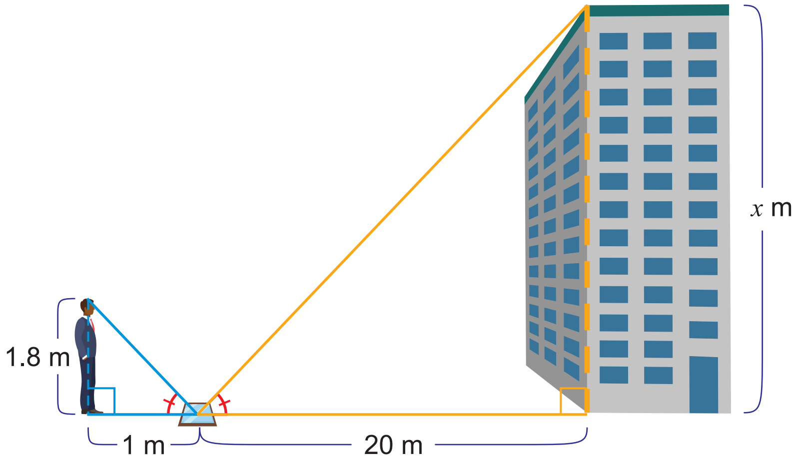


b)

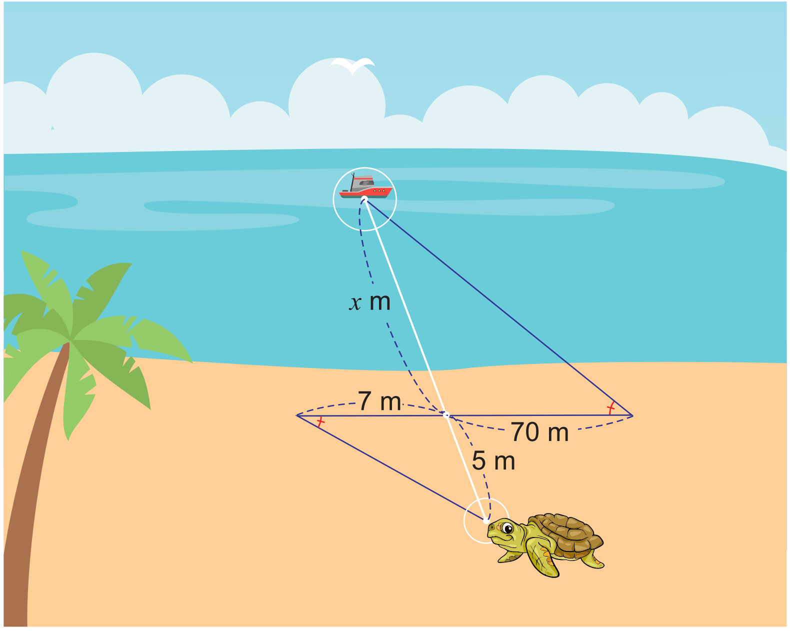


8 Divida el segmento AB en cinco partes iguales usando compás, regla y escuadras.

9 Los ángulos que forma un rayo de luz al refractarse en un espejo plano son congruentes. Si un hombre de 1.8 m mira la parte más alta de un edificio en un espejo que está a 1 m de él y a 20 m de la base del edificio. Encuentre la altura del edificio.



10 Para hallar la distancia desde una tortuga en la playa a un barco, se han tomado las medidas que se muestran en la figura.
Encuentre la distancia de la tortuga al barco.



Unidad 5

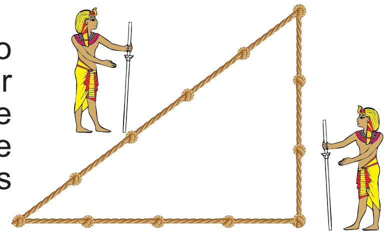
Teorema de Pitágoras

Unidad 5 Teorema de Pitágoras

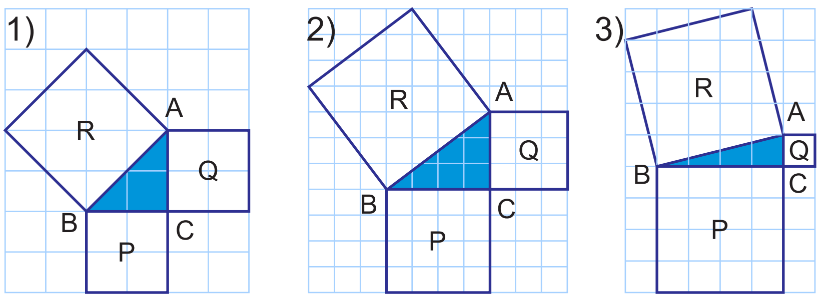
Lección 1: Teorema de Pitágoras

Sección 1: Teorema de Pitágoras

Los agrimensores egipcios usaban el llamado triángulo egipcio (triángulo rectángulo) a modo de escuadra para trazar líneas perpendiculares. Esta era una práctica habitual que se hacía con el objeto de recuperar las fronteras de los lindes de las tierras tras las periódicas inundaciones producidas por las crecidas del río Nilo.



Observe las siguientes figuras. Los triángulos en azul son triángulos rectángulos. P, Q y R son las áreas de los cuadrados en cm^2.



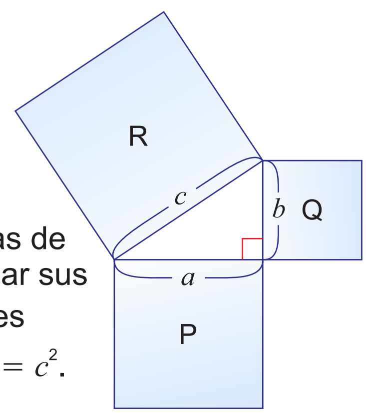
	P	Q	R
Fig. 1)	4	4	8
Fig. 2)	16	9	25
Fig. 3)	16	1	17

Observe que encontramos el área de P, Q y R contando cada cuadrado de la cuadrícula. Cada cuadrado equivale a 1 cm^2.

Para los tres triángulos de las figuras anteriores se cumple que P + Q = R. ¿Se cumplirá esto para todo triángulo rectángulo?

Ejemplo 1.1

Tome como referencia la figura de la derecha. Si el lado del cuadrado de área P mide a, el del cuadrado de área Q mide b y el del cuadrado de área R mide c, ¿de qué otra manera podría expresar las sumas de las áreas P + Q = R?



Solución:
Al ser P, Q y R las áreas de los cuadrados cuyas medidas de sus lados son a, b y c respectivamente, podemos expresar sus áreas como P = a^2, Q = b^2 y R = c^2. Al sustituir los valores anteriores en la expresión P + Q = R se obtiene $a^2 + b^2 = c^2$.

Respuesta: P + Q = R se puede expresar como $a^2 + b^2 = c^2$.

Ejercicio 1.1 Con base en el Ejemplo 1.1 y las figuras anteriores, ¿cuál de las siguientes expresiones denota el significado de la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$?

a) En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las longitudes de los catetos elevada al cuadrado.

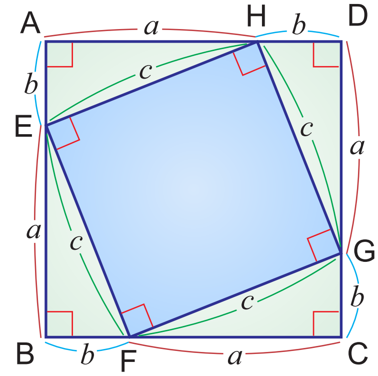
b) En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Ejemplo 1.2

Demuestre que para todo triángulo rectángulo se cumple la ecuación establecida en el Ejemplo 1.1 , es decir, que $a^2 + b^2 = c^2$.

Solución:

Los lados del cuadrado ABCD miden $a + b$, por lo que su área es $(a + b)^2$. También se puede determinar el área del cuadrado ABCD a través de la relación entre las áreas de los triángulos y el cuadrado EFGH de la figura como se muestra a continuación:



(Área del cuadrado ABCD) = (Área del cuadrado EFGH) + 4(Área de los triángulos de medidas a, b y c)

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2} ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

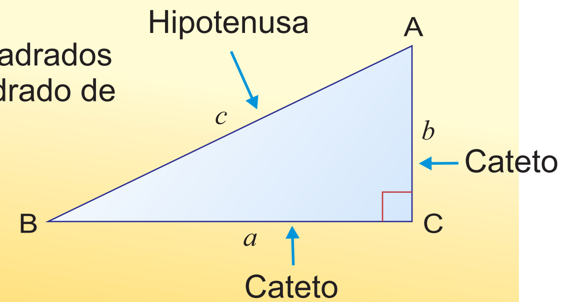
Los ΔHAE ΔEBF, ΔFCG y ΔGDH son rectángulos y congruentes por tanto tienen la misma área.

A la ecuación demostrada en el Ejemplo 1.2 se le conoce como "**Teorema de Pitágoras**".

Teorema de Pitágoras
En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

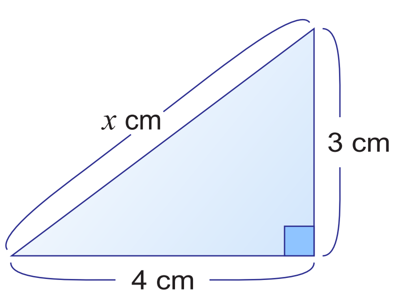
$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

Catetos Hipotenusa



Ejemplo 1.3

Haciendo uso del teorema de Pitágoras, encuentre la medida desconocida del siguiente triángulo.



Solución:

Del teorema de Pitágoras tenemos que:

$4^2 + 3^2 = x^2$

$x^2 = 16 + 9$

$x^2 = 25$, como $x > 0$

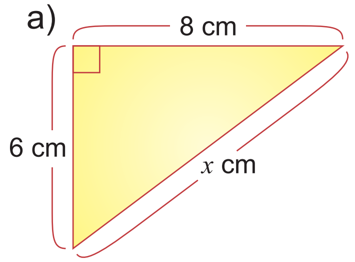
$x = \sqrt{25}$

$x = 5$

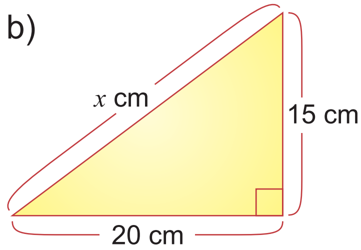
Respuesta: 5 cm

Ejercicio 1.2 Encuentre la medida desconocida para cada uno de los siguientes triángulos.

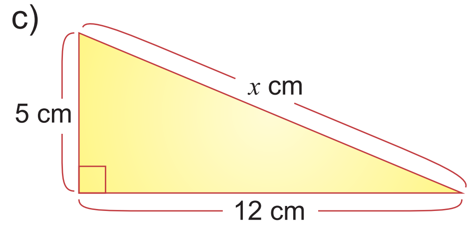
a)



b)



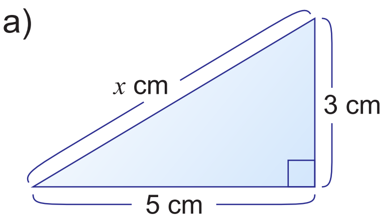
c)



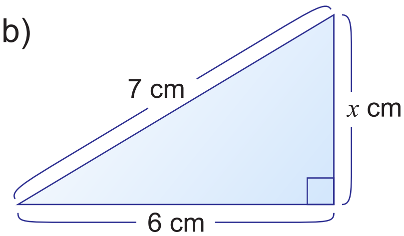
Ejemplo 1.4

Encuentre la medida desconocida en los siguientes triángulos.

a)



b)



Solución:

Haciendo uso del teorema de Pitágoras tenemos:

a)
$$\begin{aligned} 5^2 + 3^2 &= x^2 \\ x^2 &= 25 + 9 \\ x^2 &= 34, \text{ como } x > 0 \\ x &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 6^2 + x^2 &= 7^2 \\ 36 + x^2 &= 49 \\ x^2 &= 49 - 36 \\ x^2 &= 13, \text{ como } x > 0 \\ x &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

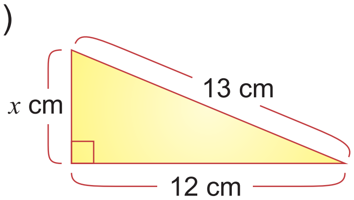
¡Atención!
La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto y es el lado de mayor longitud del triángulo.

Respuesta: $\sqrt{34}$ cm

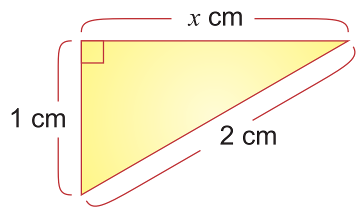
Respuesta: $\sqrt{13}$ cm

Ejercicio 1.3 Encuentre la medida desconocida para cada uno de los siguientes triángulos.

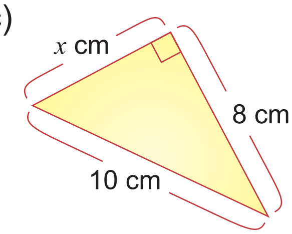
a)



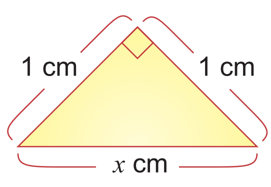
b)



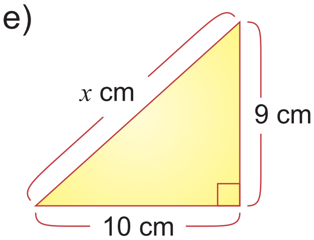
c)



d)

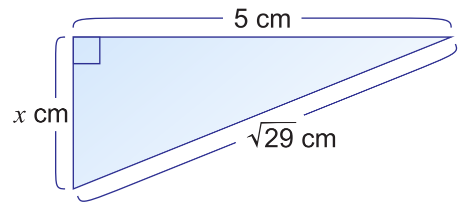


e)



Ejemplo 1.5

Encuentre la medida desconocida en el siguiente triángulo.



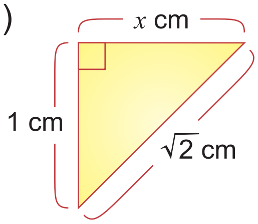
Solución:

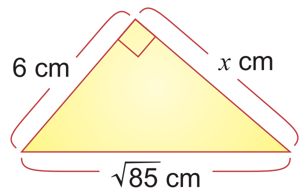
Del teorema de Pitágoras tenemos que:

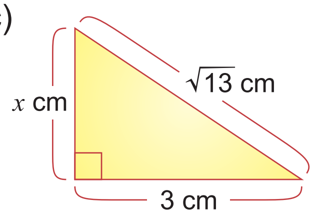
$$x^2 + 5^2 = (\sqrt{29})^2$$
$$x^2 = 29 - 25$$
$$x^2 = 4, \text{ como } x > 0$$
$$x = \sqrt{4}$$
$$x = 2$$

Respuesta: 2 cm

Ejercicio 1.4 Encuentre la medida desconocida para cada uno de los siguientes triángulos.

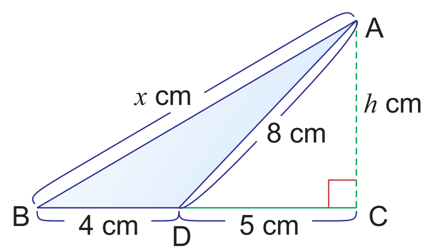
a)


b)


c)


Ejemplo 1.6

Encuentre la medida de x del siguiente triángulo:



Solución:

Haciendo uso del teorema de Pitágoras, primero se debe encontrar la medida de h y luego la medida de x.

1) Para encontrar h, enfocarse en el ΔACD que es rectángulo. Por el teorema de Pitágoras:

$$5^2 + h^2 = 8^2$$
$$25 + h^2 = 64$$
$$h^2 = 64 - 25$$
$$h^2 = 39, \text{ como } h > 0$$
$$h = \sqrt{39}$$

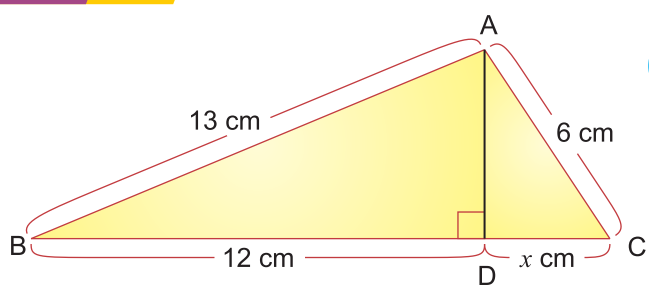
2) Para encontrar x, enfocarse en el ΔABC que es rectángulo. Como $h = \sqrt{39}$ y BC $= 9$, se tiene por el teorema de Pitágoras:

$$9^2 + (\sqrt{39})^2 = x^2$$
$$x^2 = 81 + 39$$
$$x^2 = 120, \text{ como } x > 0$$
$$x = \sqrt{120}$$
$$x = 2\sqrt{30}$$

$$\sqrt{120} = \sqrt{4 \times 30}$$
$$= \sqrt{4} \times \sqrt{30}$$
$$= 2\sqrt{30}$$

Respuesta: $2\sqrt{30}$ cm

Ejercicio 1.5 Encuentre la medida del lado DC.

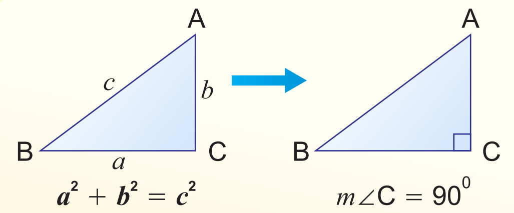


ΔABD y ΔACD son rectángulos.
Paso 1: Aplique el teorema de Pitágoras al ΔABD para encontrar AD.
Paso 2: Aplique de nuevo el teorema de Pitágoras, pero esta vez al ΔACD para encontrar la medida de x.

Se sabe que el recíproco del teorema de Pitágoras es verdadero.

Recíproco del teorema de Pitágoras

Si en el ΔABC se da que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ y también $a^2 + b^2 = c^2$, entonces $m\angle C = 90^0$ es decir, el ΔABC es rectángulo.



Ejemplo 1.7

Si las medidas de los lados del ΔABC son 15, 8 y 17 cm, determine mediante el recíproco del teorema de Pitágoras si este es un triángulo rectángulo o no.

Solución:

Suponga que las medidas del triángulo están dispuestas como en la figura de la derecha. Como la hipotenusa es el lado de mayor longitud, se define:

$a = 15$ cm, $b = 8$ cm y c $= 17$ cm.

Se tiene: $a^2 + b^2 = 15^2 + 8^2$

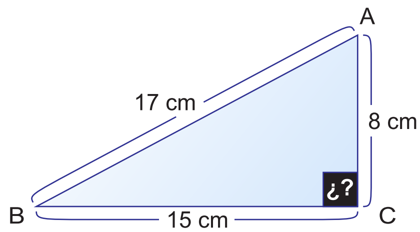
$= 225 + 64$

$= 289 \qquad \ldots (i)$

Luego, observe que:

$c^2 = 17^2$

$c^2 = 289 \qquad \ldots (ii)$



De las ecuaciones (i) y (ii) se concluye que $a^2 + b^2 = c^2$, esto cumple con el teorema de Pitágoras definido solamente para triángulos rectángulos. Por lo tanto, el ΔABC es rectángulo.

Respuesta: ΔABC es un triángulo rectángulo.

Ejemplo 1.8

Haciendo uso del recíproco del teorema de Pitágoras, identifique si el triángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5 cm es rectángulo.

Solución:

Primero se debe identificar el lado que corresponde a la hipotenusa. Se sabe que la hipotenusa es el lado más largo, por lo que, en este caso, sería el lado de longitud 5 cm. Luego, sea $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$.

(i) $a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2$

$= 9 + 16$

$= 25$

(ii) $c^2 = 5^2$

$= 25$

De (i) y (ii) se concluye que $a^2 + b^2 = c^2$

Respuesta: El triángulo dado es rectángulo.

Ejercicio 1.6

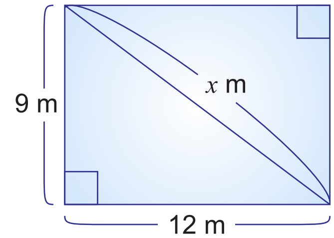
Se dan las medidas de los 3 lados de varios triángulos. ¿Cuáles son triángulos rectángulos?

a) 6 cm, 8 cm, 10 cm
b) 4 cm, 5 cm, 6 cm
c) 1 cm, $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{5}$ cm
d) 1 cm, 1 cm, $\sqrt{2}$ cm
e) $\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{4}$ cm, $\sqrt{5}$ cm
f) 12 cm, 15 cm, 18 cm

Sección 2: Aplicación del teorema de Pitágoras

Ejemplo 1.9

Un hombre tiene un terreno rectangular cuyas medidas son 9 m de ancho y 12 m de largo. Él quiere dividir este terreno en dos terrenos de forma triangular de igual área. ¿Cuáles son las medidas de los terrenos triangulares?



Solución:

Al trazar la diagonal del rectángulo, se obtienen dos triángulos congruentes cuyas áreas son iguales, además dichos triángulos son rectángulos. Si x es la medida de la diagonal del rectángulo, por el teorema de Pitágoras se tiene:

$$12^2 + 9^2 = x^2$$
$$x^2 = 144 + 81$$
$$x^2 = 225, \text{ como } x > 0$$
$$x = \sqrt{225}$$
$$x = 15$$

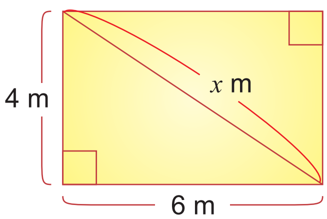
$$\sqrt{225} = \sqrt{9 \times 25} = \sqrt{9} \times \sqrt{25} = 3 \times 5 = 15$$

Respuesta: Las medidas de los terrenos triangulares son de 9 m, 12 m y 15 m.

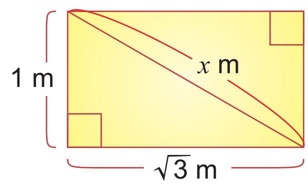
Ejercicio 1.7

Encuentre la medida de la diagonal de los siguientes rectángulos:

a)



b)



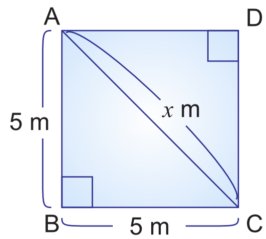
Ejemplo 1.10

Encuentre la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 5 m.

Solución:

Sea x la medida en metros de la diagonal AC. El ΔABC es rectángulo. Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$5^2 + 5^2 = x^2$$
$$x^2 = 25 + 25$$
$$x^2 = 50, \text{ como } x > 0$$
$$x = \sqrt{50}$$
$$x = 5\sqrt{2}$$



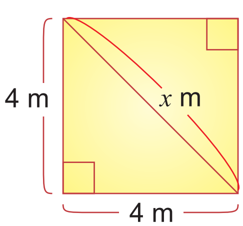
$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Respuesta: $5\sqrt{2}$ m

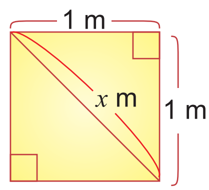
Ejercicio 1.8

Encuentre la medida de la diagonal de los siguientes cuadrados:

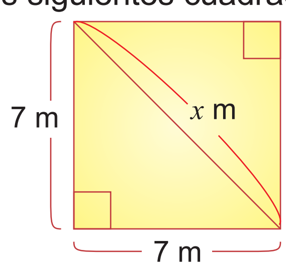
a)



b)

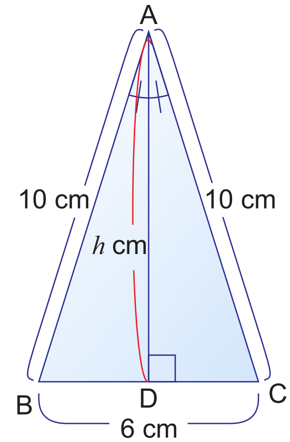


c)



Ejemplo 1.11

Encuentre la medida de la altura AD del triángulo isósceles que se muestra a la derecha. ($\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle$A)



Solución:

$\overline{AD}$ es la altura del ΔABC respecto al lado BC. AB $=$ AC.

Se sabe que la bisectriz del $\angle$A, que está comprendida entre los dos lados congruentes es la mediatriz del lado opuesto, es decir, del lado BC; por lo tanto BD $=$ CD $=$ 3 cm y el $\angle$D es recto.

Si se toma el ΔABD y se aplica el teorema de Pitágoras y AD $= h$, se tiene que:

Se puede utilizar también el ΔACD

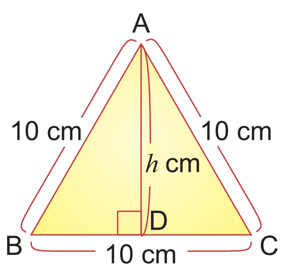
$$3^2 + h^2 = 10^2$$
$$9 + h^2 = 100$$
$$h^2 = 100 - 9$$
$$h^2 = 91, \text{ como } h > 0$$
$$h = \sqrt{91}$$

Respuesta: $\sqrt{91}$ cm

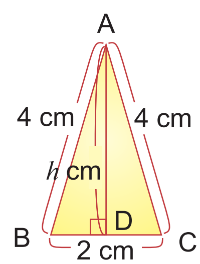
Ejercicio 1.9

Encuentre la medida de la altura h correspondiente al lado BC, para cada uno de los siguientes triángulos. Utilice la propiedad de los triángulos isósceles que dice: "La bisectriz del ángulo comprendido entre los dos lados congruentes es la mediatriz del lado opuesto".

a)



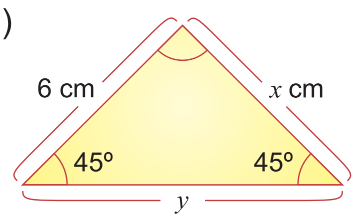
b)



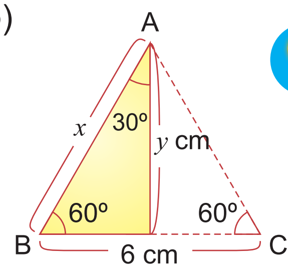
Ejercicio 1.10

Encuentre el valor de x e y en cada triángulo.

a)



b)

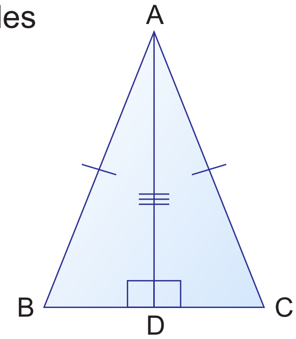


Lados opuestos a ángulos congruentes, son congruentes.

Para aclarar los procedimientos utilizados en Ejemplo 1.11 y Ejercicio 1.9 se presentan los siguientes demostraciones.

Ejemplo 1.12

Demostrar que la altura respecto a la base de un triángulo isósceles divide a éste en dos triángulos rectángulos congruentes.



Solución:

Hipótesis: ΔABC es isósceles, donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
$\overline{AD}$ es la altura del ΔABC respecto al lado BC.

Conclusión: $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

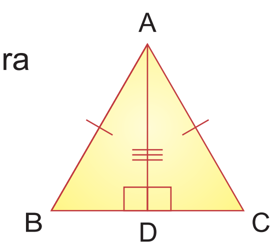
Entre los ΔADB y ΔADC,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por hipótesis
2) $m\angle ADB = m\angle ADC = 90°$	Por hipótesis y definición de altura
3) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ADB \cong \Delta ADC$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia hipotenusa - cateto de triángulos rectángulos.

La altura respecto a la base de un triángulo isósceles divide a éste en dos triángulos rectángulos congruentes.

Ejercicio 1.11

Complete la siguiente demostración para indicar que la altura de un triángulo equilátero divide a éste en dos triángulos rectángulos congruentes.



Hipótesis: ΔABC es equilátero ($\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$). $\overline{AD}$ es la altura del ΔABC respecto al lado BC.

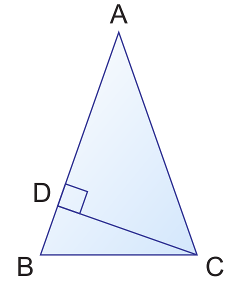
Conclusión: $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

Entre los ΔADB y ΔADC

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	______
2) $m\angle ADB =$ ______ $= 90°$	Por hipótesis y definición de altura
3) $\overline{AD} \cong$ ______	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ADB \cong \Delta ADC$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia ______ de triángulos rectángulos

Ejemplo 1.13

Tomando como referencia el triángulo isósceles del Ejemplo 1.12, ¿las alturas respecto a los lados AB y AC dividen a este triángulo en dos triángulos rectángulos congruentes?



Solución:

Al trazar la altura CD se forman los ΔADC y ΔBDC, los cuales son rectángulos. Las parejas correspondientes de triángulos que se forman NO son congruentes. Lo mismo ocurrirá al trazar la altura respecto al lado AC.

Respuesta: La condición del Ejemplo 1.12 se cumple solamente cuando la altura es respecto al lado BC.

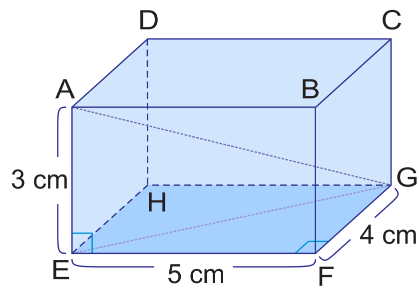
El teorema de Pitágoras también es aplicable a los sólidos geométricos, como veremos a continuación.

Ejemplo 1.14

Encuentre la medida de la diagonal AG del siguiente prisma rectangular.

Solución:

Según la figura de la derecha $AE = 3$ cm, $EF = 5$ cm y $FG = 4$ cm. Para este ejercicio, la diagonal que se calculará es AG.
Note que los triángulos AEG y EFG comparten el lado EG.



Al aplicar el teorema de Pitágoras en el ΔEFG se tiene:

$5^2 + 4^2 = Eg^2$

$41 = EG^2$ ... (i)

Al aplicar el teorema de Pitágoras en el ΔAEG se tiene:

$EG^2 + 3^2 = AG^2$ ... (ii)

Si sustituimos EG^2 de (i) en (ii) se obtiene:

$41 + 3^2 = Ag^2$

$41 + 9 = Ag^2$

$AG^2 = 50$, como $AG > 0$

$AG = \sqrt{50}$

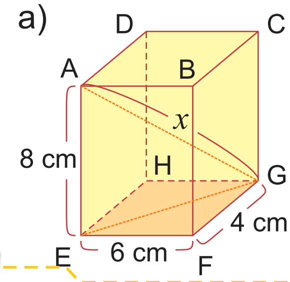
$AG = 5\sqrt{2}$

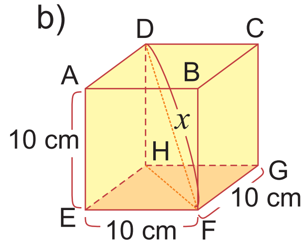
Respuesta: $5\sqrt{2}$ cm

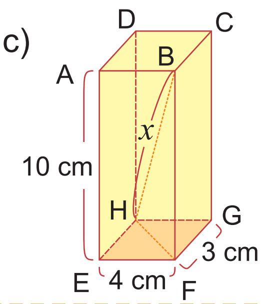
Como AEGC y EFGH son rectángulos, los $\angle AEG$ y $\angle EFG$ son rectos.

Ejercicio 1.12

Las figuras siguientes son prismas rectangulares. Encuentre el valor de x.

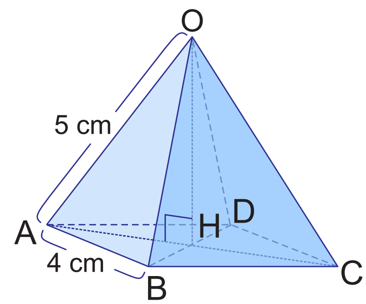
a) 

b) 

c) 

Ejemplo 1.15

El dibujo de la derecha muestra una pirámide de base cuadrada en la que OA = OB = OC = OD = 5 cm.
Encuentre la medida de la altura de la pirámide.



Solución:

La altura de la pirámide es OH.
El ΔOAC es isósceles.
Los ΔABC y ΔOHA son rectángulos.
H es el punto medio de $\overline{AC}$.

Al aplicar el teorema de Pitágoras en el ΔABC se obtiene:

$4^2 + 4^2 = AC^2$

$AC^2 = 16 + 16$

$AC^2 = 32$, como $AC > 0$

$AC = \sqrt{32}$

$AC = 4\sqrt{2}$

$AH = CH = \frac{AC}{2}$, porque las diagonales de un cuadrado se cortan en el punto medio.

Como H es el punto medio de la diagonal AC entonces:

$AH = \frac{AC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Ahora, al aplicar el teorema de Pitágoras en el ΔOHA se obtiene:

$(2\sqrt{2})^2 + OH^2 = 5^2$

$8 + OH^2 = 25$

$OH^2 = 17$, como $OH > 0$

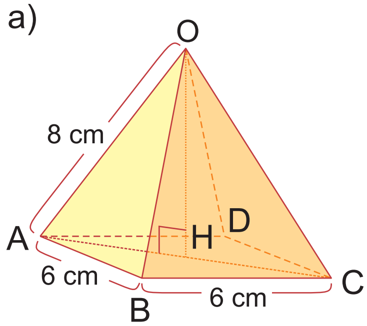
$OH = \sqrt{17}$

Respuesta: $\sqrt{17}$ cm

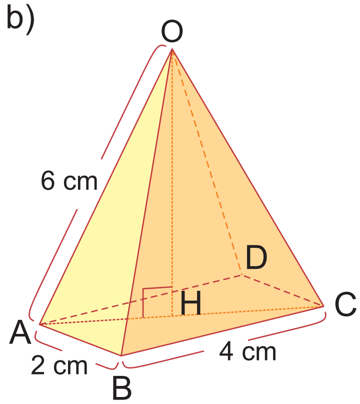
Ejercicio 1.13

Encuentre la medida de la altura OH de las siguientes pirámides de base rectangular. Para cada pirámide, OA = OB = OC = OD.

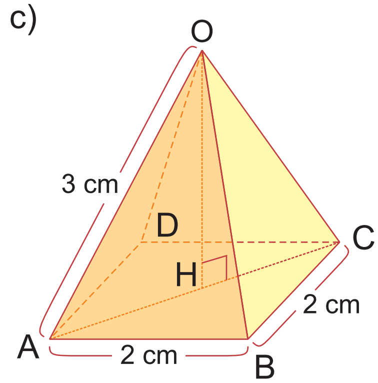
a)



b)



c)

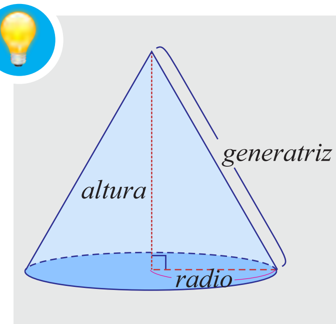


Ejemplo 1.16

Calcule la medida de la altura del cono de la siguiente figura.

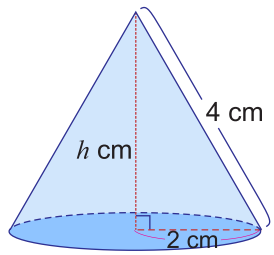
Solución:

Para encontrar la altura de un cono se necesita el radio del círculo de la base y su generatriz. La altura del cono y el radio de la base son perpendiculares.



Haciendo uso del teorema de Pitágoras se tiene que:

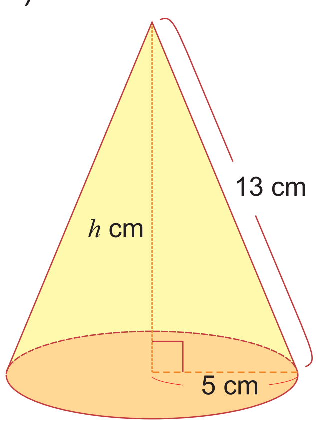
$$2^2 + h^2 = 4^2$$
$$4 + h^2 = 16$$
$$h^2 = 12, \text{ como } h > 0$$
$$h = \sqrt{12}$$
$$h = 2\sqrt{3}$$



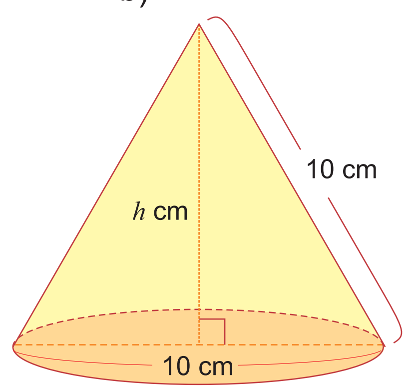
Respuesta: $2\sqrt{3}$ cm

Ejercicio 1.14 Encuentre la medida de la altura de los siguientes conos:

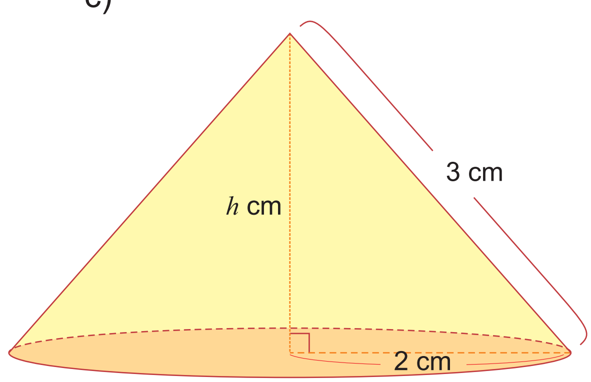
a)



b)

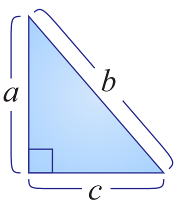


c)

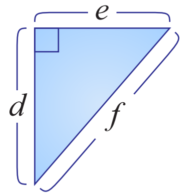


Ejercicios

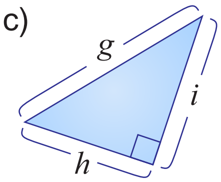
1 Determine si la relación entre los lados de los triángulos rectángulos es correcta o no.

a) 

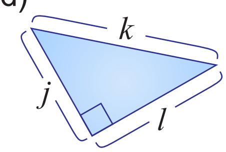
$a^2 + b^2 = c^2$

b) 

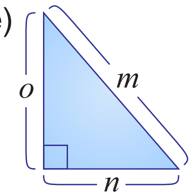
$e^2 + f^2 = d^2$

c) 

$g^2 = h^2 + i^2$

d) 

$j^2 + k^2 = l^2$

e) 

$m^2 = n^2 + o^2$

2 Si el ΔABC es rectángulo, determine la medida del lado que falta.

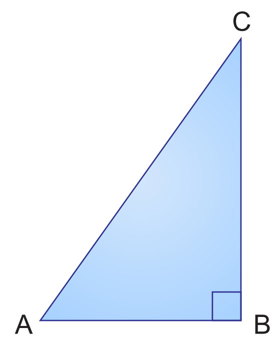
a) Si AB $=$ 5 y BC $=$ 12, entonces AC $=$

b) Si BC $=$ 9 y AC $=$ 15, entonces AB $=$

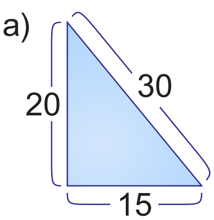
c) Si AB $=$ 1 y AC $=$ 2, entonces BC $=$

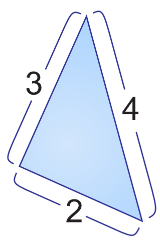
d) Si AB $= \sqrt{7}$ y BC $=$ 3, entonces AC $=$

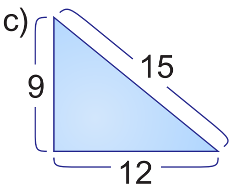
e) Si AB $=$ 2 y BC $=$ 2, entonces AC $=$

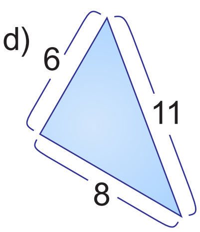


3 ¿Cuáles de los siguientes triángulos son rectángulos?

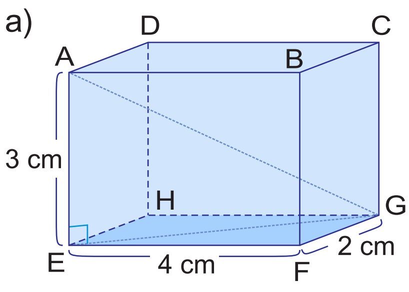
a) 

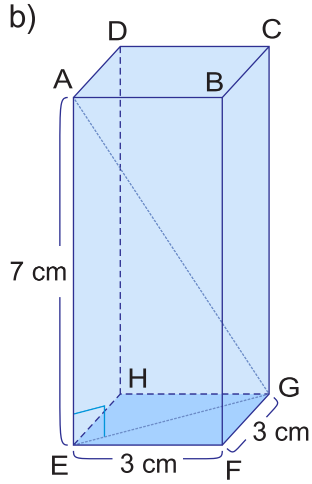
b) 

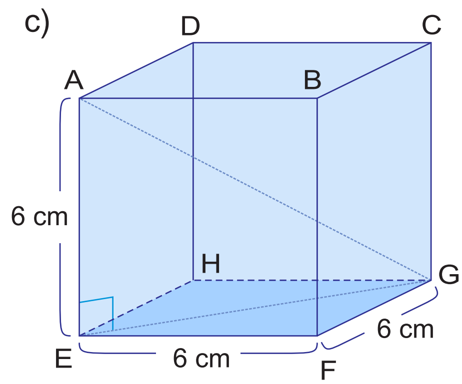
c) 

d) 

4 Encuentre la medida de la diagonal AG en los siguientes prismas rectangulares:

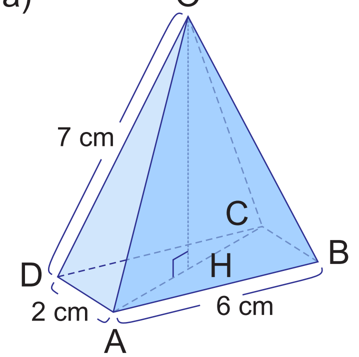
a) 

b) 

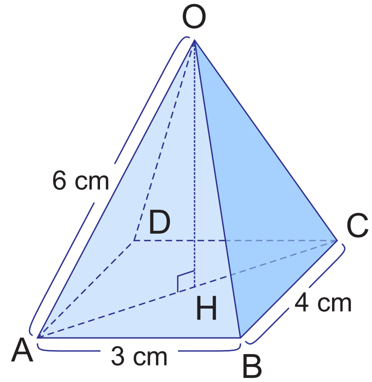
c) 

5 Encuentre la altura de las siguientes pirámides de base rectangular.

a)

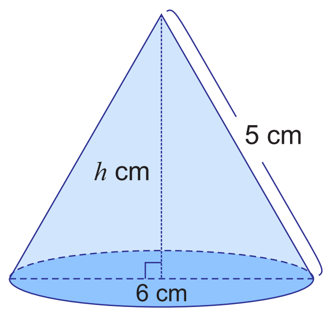


b)

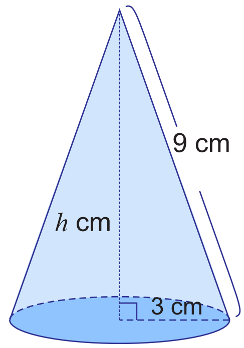


6 Encuentre la altura de los siguientes conos.

a)



b)



EJERCICIOS DESAFÍO

Resuelva los siguientes problemas:

a) Un señor tiene un terreno con la forma de un triángulo rectángulo y necesita saber la longitud del lado más largo. ¿Cuánto mide éste si los otros dos lados miden 21 m y 28 m?

b) En la figura de la derecha. ¿A qué altura está la ventana si la escalera tiene una longitud de 5 m y se apoya en el suelo a 2 m de la pared?

Unidad 6

Polígonos regulares y el círculo

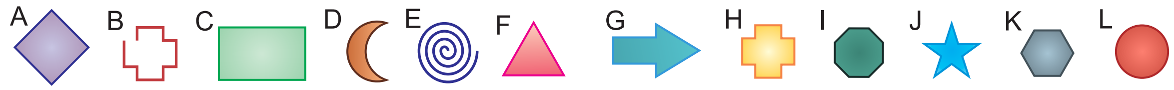
Lección 1: Polígonos regulares

Lección 2: Círculos

Unidad 6 Polígonos regulares y el círculo

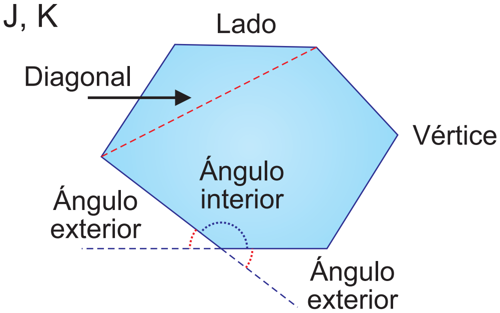
Recordemos
Clasifique las siguientes figuras en polígonos y no polígonos.

Un polígono es una figura formada por una línea poligonal cerrada.



Solución: Polígonos: A, C, F, G, H, I, J, K

La figura de la derecha muestra los elementos de un polígono.

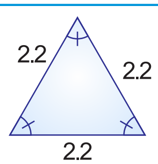
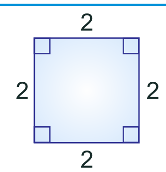
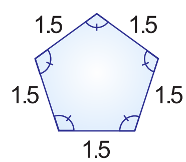
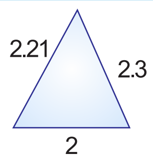
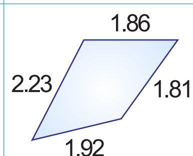
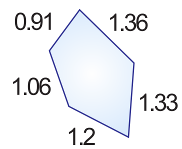


Lección 1: Polígonos regulares

Sección 1: Polígonos regulares

Ejemplo 1.1

Se presentan los siguientes polígonos. Complete la tabla.

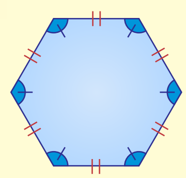
	Polígonos			Característica de acuerdo a la medida de sus lados y sus ángulos
1				
2				

Un polígono se nombra según el número de lados: triángulo (3), cuadrilátero (4), pentágono (5), hexágono (6), heptágono (7), octágono (8), etc.

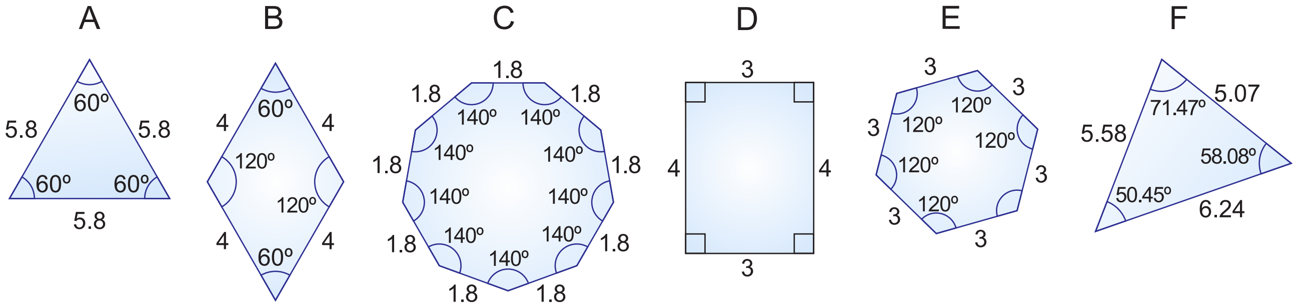
Solución:

Grupo 1 : las medidas de sus lados y ángulos son iguales.
Grupo 2 : las medidas de sus lados y ángulos son diferentes.

Un **polígono regular** es un polígono que tiene todos sus lados congruentes y todos sus ángulos internos congruentes.



Ejercicio 1.1 Diga cuáles de los siguientes polígonos son regulares:



Ejemplo 1.2

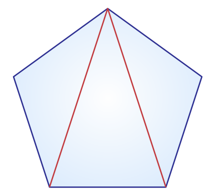
Calcule.

a) La suma de las medidas de los ángulos internos de un pentágono regular.

b) La medida de cada ángulo interno de un pentágono regular.

Solución:

a) Dos diagonales que parten de un mismo vértice dividen un pentágono regular en 3 triángulos



$\left(\textit{La suma de las medidas de los ángulos internos del pentágono}\right) = \left(\textit{La suma de las medidas de los ángulos internos de los triángulos}\right)$

$= 180° \times 3$

$= 540°$

La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Respuesta: 540°

b) Como cada ángulo interno mide lo mismo y el pentágono tiene 5 ángulos internos se da que:

$540° \div 5 = 108°$

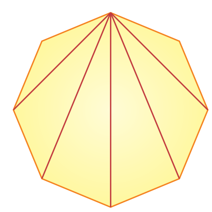
Respuesta: 108°

La suma total de los ángulos internos de un polígono que tiene n lados se calcula con la fórmula $180°(n-2)$.

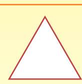
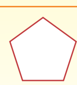
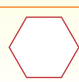
Ejercicio 1.2 Utilizando la estrategia del **Ejemplo 1.2** calcule.

a) La suma de las medidas de los ángulos internos de un octágono regular

b) La medida de cada ángulo interno de un octágono regular



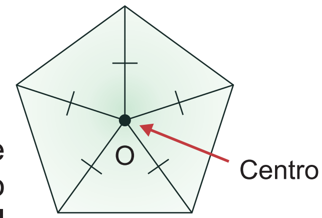
Ejercicio 1.3 Complete la siguiente tabla:

Número de lados	Polígono regular	Suma de los ángulos internos	Medida de cada ángulo interno
3			
4			
5		540º	108º
6			

Sección 2: Centro de un polígono regular

De aquí en adelante se estudia las propiedades de los polígonos regulares.

Si se da un punto O en el interior de un polígono regular y se cumple que las distancias del punto O a los vértices del polígono regular son iguales, entonces al punto O se le llama centro del polígono regular.



El **centro de un polígono regular** es el punto interior que equidista de cada uno de sus vértices.

Equidista: estar a la misma distancia.

A continuación se presenta como encontrar el centro de un polígono regular a través de las mediatrices de sus lados.

Ejemplo 1.3

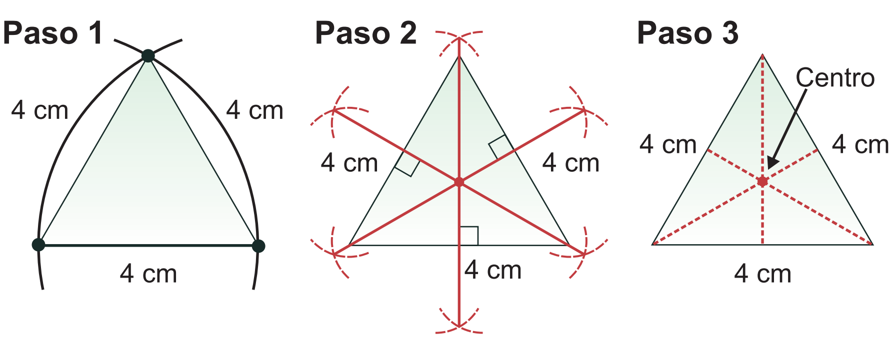
Utilizando compás y regla, trace un triángulo equilátero de 4 cm de lado y encuentre su centro.

Solución:

Paso 1: Dibujar el triángulo equilátero con regla y compás.
Paso 2: Trazar las mediatrices de los lados del polígono.
Paso 3: Ubicar el punto donde se intersecan las mediatrices y nombrarlo centro del polígono regular.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio.

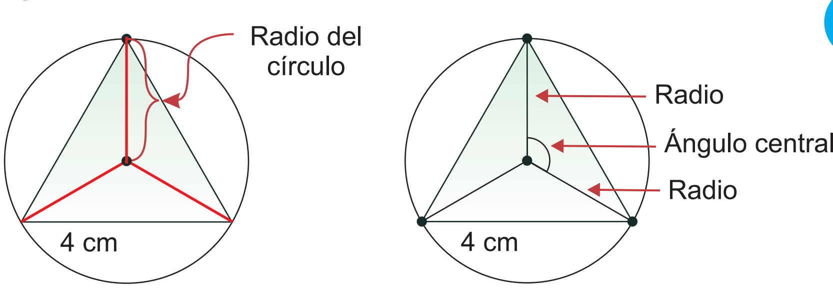
También se pueden utilizar las bisectrices de los ángulos internos del polígono para ubicar el centro.



Ejemplo 1.4

Utilizando la construcción anterior dibuje un círculo tomando como radio la medida del segmento que va del centro del polígono a uno de sus vértices.

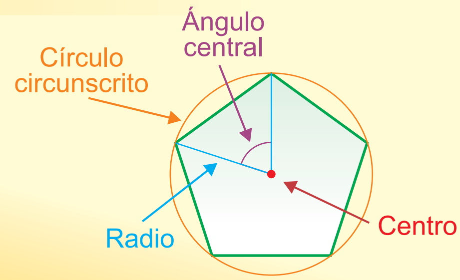
Solución:



Todo polígono regular está dentro de un círculo cuyo radio es el segmento que va del centro del polígono a uno de sus vértices.

Círculo circunscrito es el círculo que pasa por los vértices de un polígono regular.

Ángulo central de un polígono regular es el ángulo formado por dos radios determinados por dos vértices consecutivos.



Ejemplo 1.5

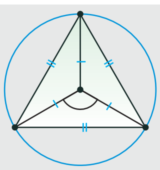
Calcule la medida del ángulo central en la construcción del Ejemplo 1.4 .

Solución:

Como los triángulos que se forman con los radios del círculo y los lados del polígono regular son congruentes por el criterio LLL entonces los ángulos centrales son congruentes entre sí por lo tanto la medida de cada uno de ellos es:

$360° \div 3 = 120°$

El ángulo central de un círculo es 360°.
En un polígono regular los ángulos centrales son congruentes.

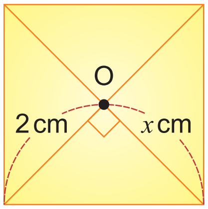


Respuesta: 120°

La medida de cada ángulo central de un polígono regular es $\frac{360º}{n}$, donde n es el número de lados del polígono.

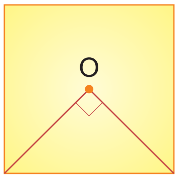
Ejercicio 1.4 Resuelva.

a) En el cuadrado de la derecha, O es el centro, determine el valor de x.

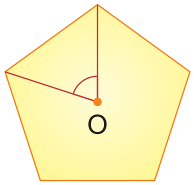


b) Determine la medida de los ángulos centrales de:

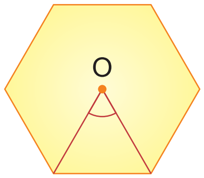
b.1) Cuadrado



b.2) Pentágono regular



b.3) Hexágono regular



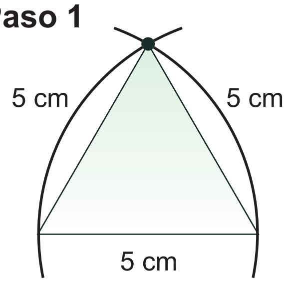
Ejemplo 1.6

Utilizando regla y compás construya un triángulo equilátero de 5 cm de lado y encuentra su centro trazando las mediatrices de sus lados.

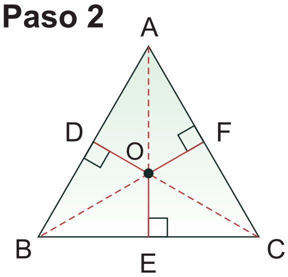
Solución:

Paso 1: Construir el triángulo equilátero de lado 5 cm.
Paso 2: Nombrar los vértices con A, B y C, ubicar el centro trazando las mediatrices de sus lados, nombrar los puntos medios de los lados como D, E y F y el centro con O.

Paso 1



Paso 2



$\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{OD}$ son perpendiculares a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ respectivamente.

Tomando como referencia la construcción anterior utilice el compás para comparar la longitud de los segmentos OE, OF y OD.

A los segmentos OE, OF y OD se les llama **apotemas** y se simboliza con a. Las apotemas son congruentes.
La apotema es el segmento cuyos extremos son el centro del polígono regular y el punto medio de cualquiera de sus lados.

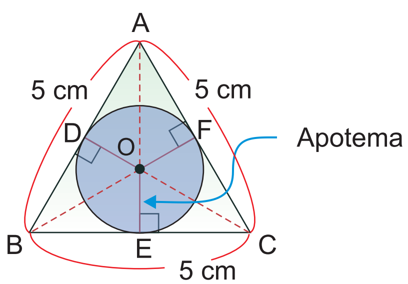
La apotema es perpendicular al lado del polígono regular.

Ejemplo 1.7

En el triángulo construido en el **Ejemplo 1.6** dibuje un círculo cuyo radio sea igual a la longitud del segmento OE, tomando el punto O como centro.

Solución:

Con ayuda del compás tomar la medida de la apotema OE y luego trace el círculo.



Círculo inscrito es el círculo en el interior de un polígono regular cuyo radio es la apotema del polígono y su centro es el centro del polígono regular.

Ejemplo 1.8

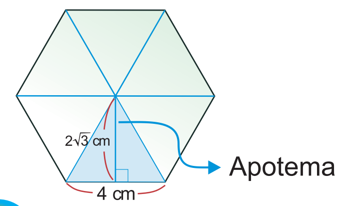
Encuentre el área de un hexágono regular cuyo lado mide 4 cm y la apotema mide $2\sqrt{3}$ cm y deduzca la fórmula para encontrar el área de cualquier polígono regular.

Solución:

Observe que el hexágono regular se divide en 6 triángulos congruentes, por lo tanto tienen la misma área.

El área A de cada triángulo cuya base mide 4 cm y la altura mide $2\sqrt{3}$ cm es:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \times (\mathit{base}) \times (\mathit{altura}) \\ &= \frac{1}{2} \times (\mathit{lado\ del\ hexágono}) \times (\mathit{apotema}) \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$



La apotema del hexágono es la altura del triángulo.

El área de cada triángulo es $4\sqrt{3}$ cm^2.

Como el hexágono está dividido en 6 triángulos congruentes se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Área del hexágono regular} &= 6 \text{ veces el área del triángulo} \\ &= 6 \times 4\sqrt{3} \\ &= 24\sqrt{3} \end{aligned}$$

Respuesta: $24\sqrt{3}$ cm^2

Un polígono regular de n lados se puede dividir en n triángulos congruentes.

El área A de un polígono regular que tiene n lados está dada por:

$$\begin{aligned} A &= n \text{ veces al área del triángulo congruente} \\ &= n \times \frac{1}{2} \times (\mathit{lado\ del\ polígono}) \times (\mathit{apotema}) \\ &= \frac{nla}{2} \end{aligned}$$

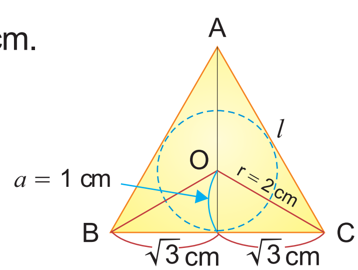
donde l es la longitud del lado del polígono y a es la longitud de la apotema del polígono.

En la fórmula del área note que nl es el perímetro P del polígono regular, por lo tanto el área se puede expresar como $A = \frac{nla}{2} = \frac{Pa}{2}$.

Ejercicio 1.5 Resuelva.

a) Encuentre el área de un hexágono regular cuyo lado mide 2 cm y la apotema mide $\sqrt{3}$ cm.

b) En la figura de la derecha encuentre:
   b.1) El área del ΔBOC.
   b.2) El área del ΔABC.



c) Encuentre el área de un pentágono regular cuyo lado mide 4 cm y la apotema mide 2.8 cm.

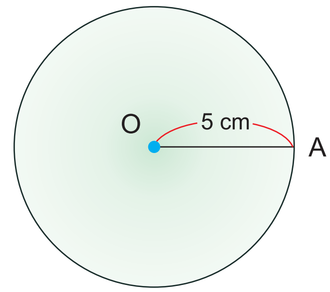
Ejemplo 1.9

Construya con compás, regla y transportador un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 5 cm.

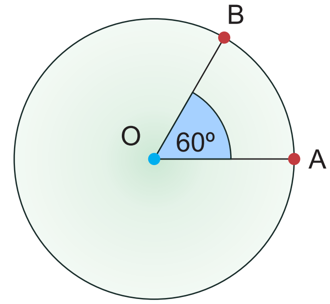
Solución:

1) Dibuje un círculo O de radio 5 cm.

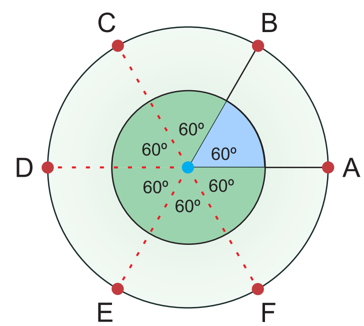
2) Dibuje un radio OA.



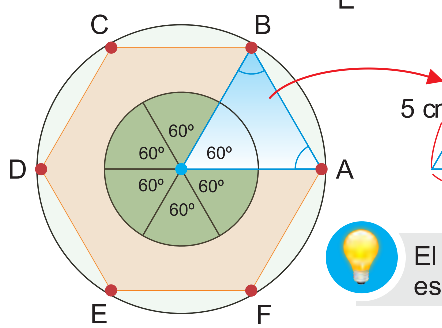
3) Como el hexágono tiene 6 lados, el ángulo central mide $\frac{360°}{6} = 60°$, utilizando el transportador dibuje un ángulo central de 60° a partir del radio OA, y marque el otro extremo con B en la circunferencia.

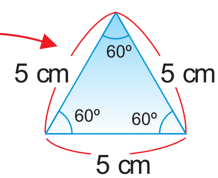


4) A partir del radio OB trace otro ángulo central de 60° y marque con C el otro extremo en la circunferencia. Repita este proceso partiendo del último radio trazando los ángulos centrales de 60° hasta completar los 360° y marque los extremos de los radios con D, E y F en la circunferencia.



5) Una los puntos con segmentos y se obtiene el hexágono regular.





El triángulo formado es equilátero

Ejercicio 1.6

Construya con compás, regla y transportador los siguientes polígonos regulares inscritos en un círculo de radio 4 cm. (Se debe tener en cuenta la medida del ángulo central del polígono regular)

a) Triángulo equilátero
b) Cuadrado
c) Octágono regular

Ejemplo 1.10

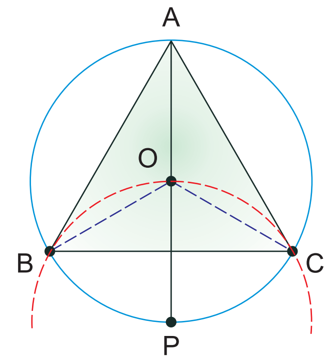
Construya con regla y compás los siguientes polígonos regulares inscritos en un círculo de 4 cm de radio: (No usar transportador)

a) Triángulo equilátero b) Cuadrado c) Hexágono regular

Solución:

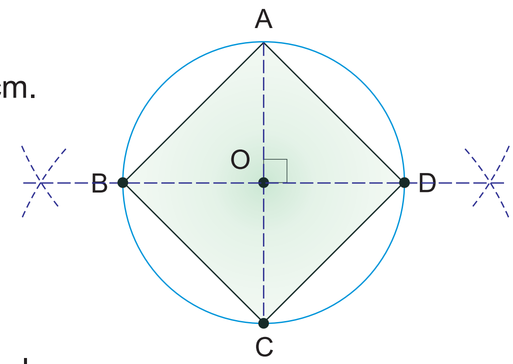
a) Para trazar un triángulo equilátero inscrito en un círculo realizamos los siguientes pasos:

1) Ubicar el centro O y trazar el círculo de radio 4 cm.
2) Trazar un diámetro, marcar los extremos del diámetro como A y P.
3) Trazar un arco con centro en P y el mismo radio del círculo dado y marcar los puntos que intersecan la circunferencia con B y C respectivamente.
4) Unir los puntos A, B y C.



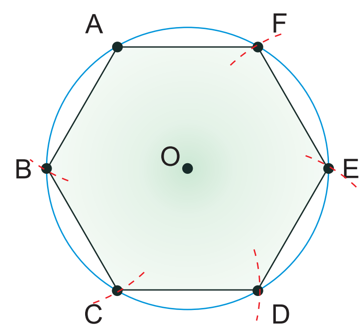
b) Para trazar un cuadrado inscrito en un círculo hacemos los siguientes pasos:

1) Ubicar el centro O y trazar el círculo de radio 4 cm.
2) Trazar un diámetro AC.
3) Trazar la mediatriz del $\overline{AC}$.
4) Marcar los puntos que intersecan la circunferencia con B y D respectivamente.
5) Trazar los segmentos AB, BC, CD y DA.

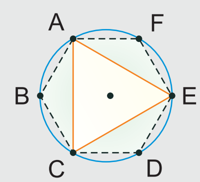


c) Para trazar un hexágono regular inscrito en un círculo realizamos los siguientes pasos:

1) Ubicar el centro O y trazar el círculo de radio 4 cm.
2) Dividir la circunferencia utilizando el compás con una abertura igual al radio del círculo de la siguiente manera:
   Colocar un punto en la circunferencia y nombrarlo A.
   Trace un arco a partir de A, nombre con B la intersección de la circunferencia con el arco.
   Repita el proceso hasta completar la circunferencia y nombre los puntos con C, D, E y F.
3) Una los extremos trazando los segmentos AB, BC, CD, DE, EF y FA.



El triángulo equilátero se puede trazar utilizando la construcción del hexágono regular, uniendo los vértices A, C y E.



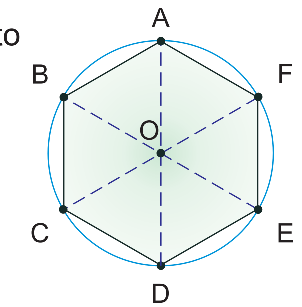
Ejercicio 1.7

Construya las siguientes figuras con regla y compás inscritas en un círculo de radio 5 cm:

a) Triángulo equilátero b) Cuadrado c) Hexágono regular

Ejemplo 1.11

Encuentre la longitud del lado de un hexágono regular inscrito en un círculo de 2 cm de radio.



Solución:

De la construcción del hexágono regular se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{OA}$, es decir, que el radio tiene la misma longitud que el lado del hexágono regular inscrito en el círculo, por tanto:

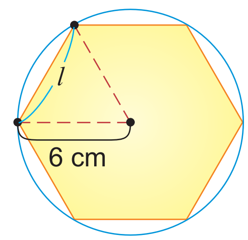
$AB = BC = CD = DE = EF = FA = 2$ cm.

Respuesta: 2 cm

El lado l de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio r es igual al radio ($l = r$).

Ejercicio 1.8 Resuelva.

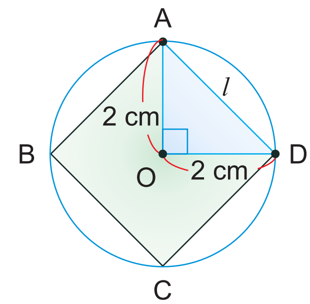
a) Encuentre la longitud del lado del hexágono regular de la derecha.



b) Un hexágono regular está inscrito en un círculo cuyo radio es 9 cm. Encuentre la longitud del lado del hexágono regular.

Ejemplo 1.12

Encuentre la longitud del lado de un cuadrado inscrito en un círculo de 2 cm de radio.



Solución:

Para calcular la longitud del lado del cuadrado se usará el teorema de Pitágoras ya que el ΔAOD es isósceles rectángulo por lo tanto:

$2^2 + 2^2 = l^2$ ... l es la hipotenusa del ΔAOD

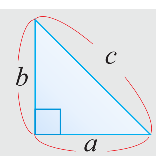
$l^2 = 8$, como $l > 0$

$l = \sqrt{8}$

$= 2\sqrt{2}$

Respuesta: $2\sqrt{2}$ cm

Teorema de Pitágoras:
$a^2 + b^2 = c^2$

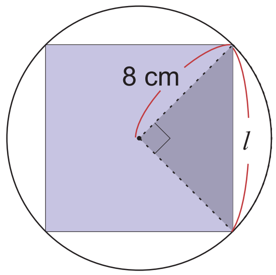


(solo para triángulos rectángulos)

El lado l de un cuadrado inscrito en un círculo de radio r está dado por
$l = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}\, r$

Ejercicio 1.9 Resuelva.

a) Encuentre la longitud del lado del cuadrado en la figura de la derecha.



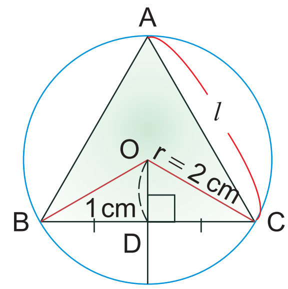
b) Encuentre la longitud del lado de un cuadrado inscrito en un círculo de radio 3 cm.

Ejemplo 1.13

En la figura los triángulos ODC y ODB son rectángulos y $\Delta ODC \cong \Delta ODB$, el ΔABC es equilátero, OD = 1 cm encuentre:

a) La longitud del lado DC

b) La longitud del lado del ΔABC



Solución:

a) Para calcular la longitud DC en el ΔODC se aplica el teorema de Pitágoras

$$DC^2 + 1^2 = 2^2$$
$$DC^2 + 1 = 4$$
$$DC^2 = 3, \text{ como } DC > 0$$
$$DC = \sqrt{3}$$

Respuesta: $\sqrt{3}$ cm

b) Como los triángulos ODC y ODB son congruentes entonces se tiene que $\overline{BD} \cong \overline{CD}$, por lo tanto

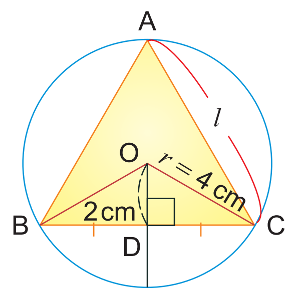
$$\begin{aligned} BC &= BD + DC \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Respuesta: $2\sqrt{3}$ cm

Ejercicio 1.10 Resuelva.

a) En la figura de la derecha el ΔABC es equilátero, OC = 4 cm y OD = 2 cm. Encuentre la longitud del segmento DC y la longitud del lado del ΔABC.

b) Utilizado la figura del inciso a) encuentre OD si $r = 6$ cm y $l = 6\sqrt{3}$ cm.



Ejemplo 1.14 Encuentre el área del triángulo ABC del Ejemplo 1.13.

Solución:

Para encontrar el área del triángulo ABC se pueden utilizar tres formas:

a) Utilizando la fórmula del área de un polígono regular. Dado que el triángulo ABC es equilátero se tiene:

$$\begin{aligned} A &= \frac{nla}{2} \\ &= \frac{(3)(2\sqrt{3})(1)}{2} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

b) Considerar que el ΔABC lo forman 3 triángulos congruentes: ΔABO, ΔBCO y ΔACO que tienen la misma área

$$\begin{aligned} \text{Área } \Delta ABC &= 3 \, (\text{área } \Delta BCO) \\ &= 3\left(\tfrac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1\right) \\ &= 3\left(\sqrt{3}\right) \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

c) En el ΔABC la medida de su altura es 3 cm ya que el radio del círculo es 2 cm y la apotema del triángulo es 1 cm. Aplicando la fórmula del área de un triángulo se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Área } \Delta ABC &= \tfrac{1}{2} (base)(altura) \\ &= \tfrac{1}{2} \left(2\sqrt{3}\right)(3) \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Respuesta: $3\sqrt{3}$ cm²

Ejercicio 1.11 Encuentre el área del triángulo ABC del Ejercicio 1.10 inciso a).

Lección 2: Círculos

Sección 1: Círculos

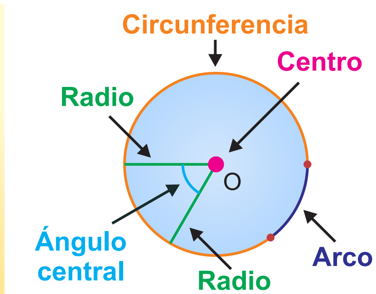
¿Cuál es la diferencia entre círculo y circunferencia?

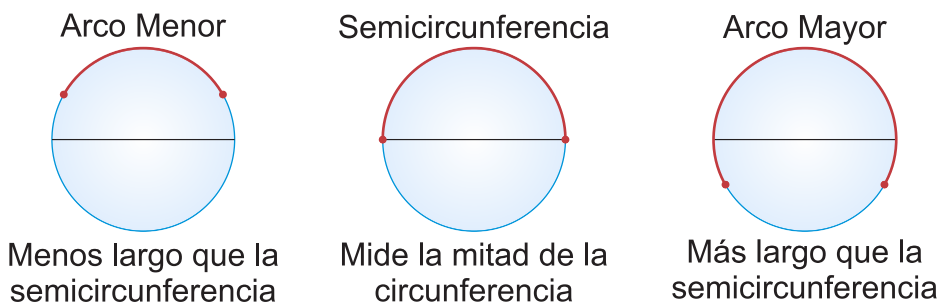
La **circunferencia** es el conjunto de puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto llamado centro.
Un **círculo** es la unión de la circunferencia y su interior.

Un círculo se nombra normalmente por su centro, es decir, si el centro de un círculo es el punto O, se le llama "círculo O".

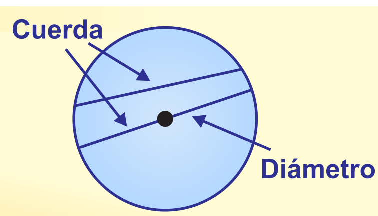
Aprenderemos los elementos del círculo.

Un **radio** de un círculo es el segmento que une el centro con algún punto de la circunferencia.
Un **ángulo central** de un círculo es el ángulo formado por dos radios.
Un **arco** de un círculo es una parte continua de la circunferencia.

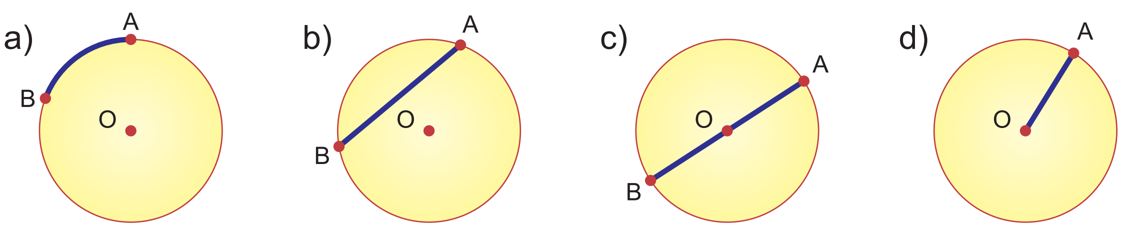




Una **cuerda** de un círculo es el segmento que une dos puntos de la circunferencia. A la cuerda que pasa por el centro del círculo se le llama **diámetro**.

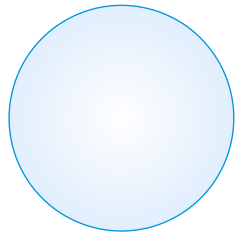


Ejercicio 2.1 Identifica en las siguientes figuras que elementos del círculo se representan:

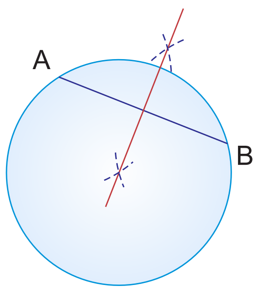


Ejemplo 2.1

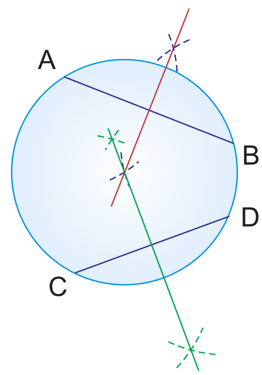
Construya con regla y compás el centro de un círculo.



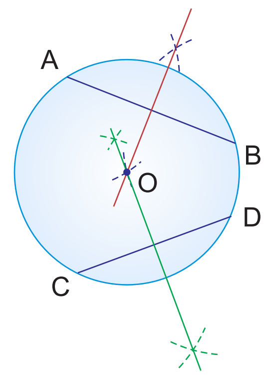
Solución:



1. Tomar dos puntos A y B en la circunferencia, trazar la cuerda AB y su mediatriz.



2. Tomar dos puntos C y D en la circunferencia y trazar la cuerda CD que no sea paralela a la cuerda AB. Trazar la mediatriz de la cuerda.

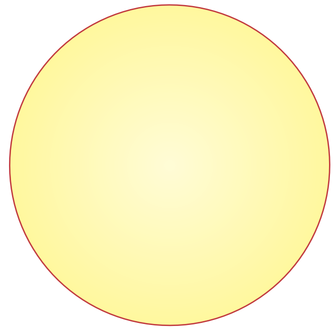


3. El punto O que es la intersección de las dos mediatrices es el centro del círculo.

El punto de intersección de las mediatrices de dos o más cuerdas es el centro del círculo.

Ejercicio 2.2

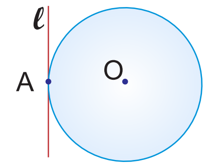
Utilice un objeto que tenga forma circular (puede ser tapón de jugo, termo, no muy grande, ni muy pequeño) y dibuje la circunferencia en su cuaderno, luego construya su centro con regla y compás.



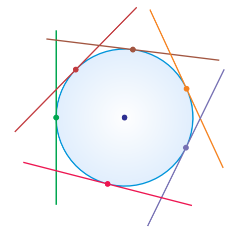
Sección 2: Tangentes

La **tangente** a un círculo es una recta que tiene un solo punto en común con el círculo.

En la figura de la derecha ℓ es una recta tangente al círculo O en el punto A.



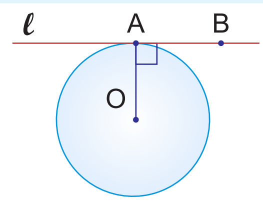
A un círculo se le pueden trazar infinitas rectas tangentes. Observe en la figura de la derecha que cada recta trazada solo toca la circunferencia en un único punto.



De lo anterior se puede definir la siguiente propiedad:

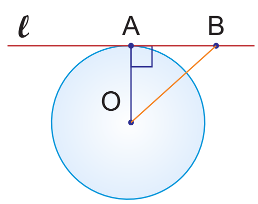
Si una recta es tangente a un círculo, entonces el radio trazado hasta el punto de contacto es perpendicular a la tangente.

La recta ℓ es tangente al círculo O en el punto A.
El radio OA es perpendicular a la recta ℓ.

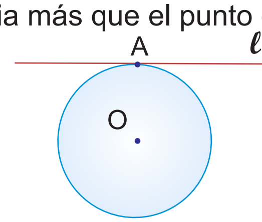


De esta propiedad se pueden obtener las siguientes afirmaciones:

1) Si se toma en la recta ℓ un punto B distinto de A, el $\overline{OB}$ mide más que $\overline{OA}$.

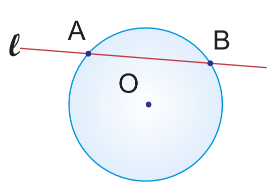


2) La recta ℓ no tiene otro punto en común con la circunferencia más que el punto de contacto A.

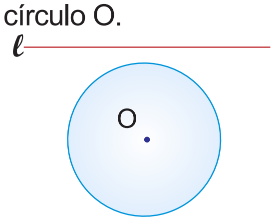


Como OB ≠ OA, B no está en la circunferencia.

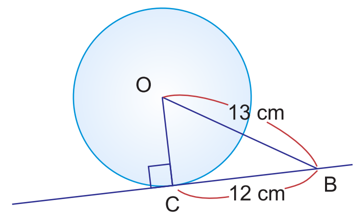
3) Si la recta ℓ toca dos puntos de la circunferencia, entonces la recta ℓ no es tangente al círculo O.



4) Si la recta ℓ no tiene ningún punto en común con el círculo O, entonces ℓ no es tangente al círculo O.



Ejemplo 2.2



Encuentre la longitud del radio del círculo O si $OB = 13$ cm y $CB = 12$ cm . La recta CB es tangente al círculo en el punto C.

Solución:

Para encontrar la longitud del radio del círculo O se aplica la propiedad anterior ya que la recta CB es tangente al círculo y es perpendicular al radio, por lo tanto se forma el triángulo rectángulo OCB y se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar OC.

$OC^2 + CB^2 = OB^2$

$OC^2 = 13^2 - 12^2$

$OC^2 = 25$, como $OC > 0$

$OC = 5$

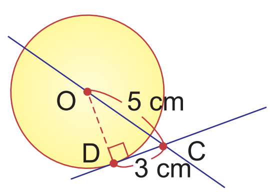
Respuesta: 5 cm

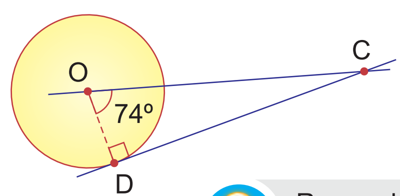
Ejercicio 2.3 Resuelva.

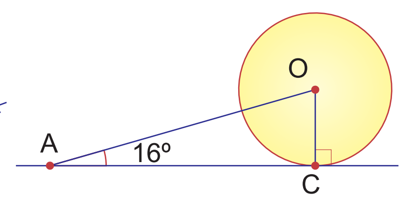
a) Cuál es la longitud del radio del círculo O si $OC = 5$ cm y $DC = 3$ cm. La recta DC es tangente al círculo en el punto D.

b) Cuál es la medida de los $\angle ODC$ y $\angle OCD$ del ΔODC si el ángulo central $\angle DOC$ del círculo O mide 74°, la recta DC es tangente al círculo en D.

c) En la figura de la derecha la recta AC es tangente al círculo O en el punto C ¿Cuánto mide el $\angle AOC$?.







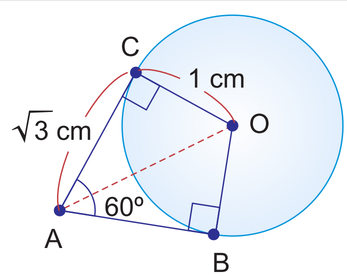
Recuerde que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180˚.

Ejemplo 2.3

En la figura de la derecha $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son tangentes del círculo O en los puntos B y C respectivamente, encuentre:

a) La longitud del $\overline{AB}$

b) La medida de los ángulos: $\angle ABO$, $\angle OCA$, $\angle BOC$



Solución:

a) Para encontrar la longitud del segmento AB, primero se encuentra la longitud de la diagonal OA del cuadrilátero ABOC.

Se tiene el triángulo rectángulo AOC.

$AC^2 + OC^2 = Oa^2$

$(\sqrt{3})^2 + 1^2 = OA^2$

$OA^2 = 4$, como $OA > 0$

$OA = 2$

Los segmentos AB y AC están contenidos en las rectas AB y AC que son tangentes al círculo, por lo tanto los segmentos son tangentes al círculo O.

Como OA = 2 cm y OB = 1 cm por ser radio del círculo O se tiene:

$AB^2 + OB^2 = OA^2$

$AB^2 + 1^2 = 2^2$

$AB^2 = 3$, como $AB > 0$

$AB = \sqrt{3}$

Respuesta: $\sqrt{3}$ cm

b) Como ABOC es un cuadrilátero entonces se sabe que la suma de sus ángulos internos es 360°, además los segmentos AB y AC son perpendiculares a los radios OB y OC respectivamente por ser tangentes del círculo O por lo tanto:

$m\angle ABO = 90°$; $m\angle OCA = 90°$; $m\angle CAB = 60°$

$m\angle BOC = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$.

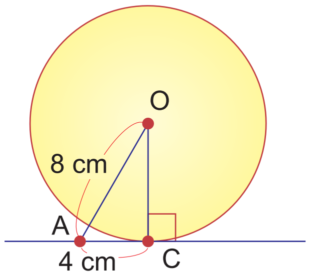
Respuesta: $m\angle ABO = 90°$

$m\angle OCA = 90°$

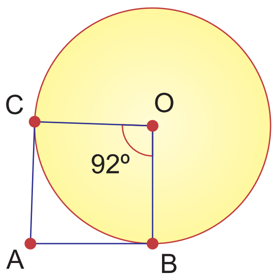
$m\angle BOC = 120°$

Ejercicio 2.4 Resuelva aplicando la propiedad de la tangente a un círculo.

a) La recta AC es tangente al círculo O en el punto C; AO = 8 cm, AC = 4 cm ¿Cuál es la longitud del $\overline{OC}$?



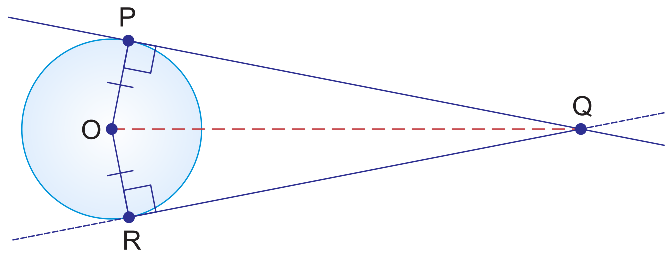
b) En la figura de la derecha $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son tangentes al círculo O en los puntos C y B respectivamente, encuentre la medida de los ángulos $\angle OCA$, $\angle OBA$ y $\angle CAB$ del cuadrilátero ABOC si $m\angle COB = 92°$.



Tangentes a un círculo (Demostraciones)

Ejemplo 2.4

Las rectas PQ y RQ son tangentes al círculo O en P y R respectivamente. Demuestre que: $\overline{QP} \cong \overline{QR}$.



Solución:

Hipótesis: Las rectas PQ y RQ son tangentes al círculo O en P y R respectivamente

Conclusión: $\overline{QP} \cong \overline{QR}$

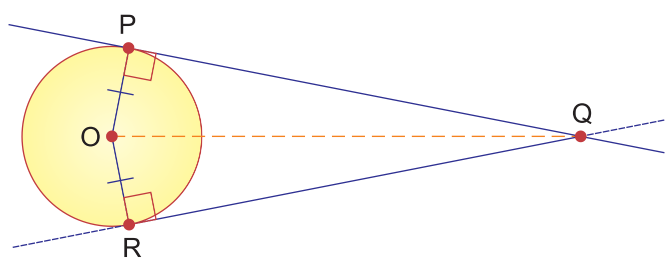
Entre los ΔPOQ y ΔROQ,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{OP} \cong \overline{OR}$	Por ser radios del círculo O
2) $m\angle OPQ = m\angle ORQ = 90°$	Por hipótesis y propiedad de tangente
3) $\overline{OQ} \cong \overline{OQ}$	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta POQ \cong \Delta ROQ$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia hipotenusa - cateto de triángulos rectángulos
5) $\overline{QP} \cong \overline{QR}$	Por 4) y lados correspondientes de triángulos congruentes

Ejercicio 2.5 Complete la siguiente demostración.

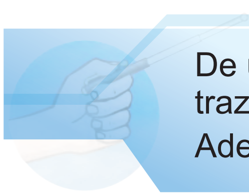
Hipótesis: Las rectas PQ y RQ son tangentes al círculo O en P y R respectivamente

Conclusión: $\angle PQO \cong \angle RQO$

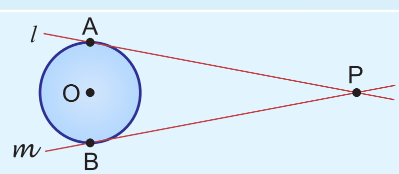


Entre los ΔPOQ y ΔROQ,

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{OP} \cong$ ______	Por ser ______ del círculo O
2) $m\angle OPQ =$ ______ $= 90°$	Por hipótesis y propiedad de tangente
3) $\overline{OQ} \cong$ ______	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta POQ \cong \Delta ROQ$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia hipotenusa - cateto de triángulos rectángulos
5) $\angle PQO \cong \angle RQO$	Por 4) y ángulos correspondientes de triángulos congruentes



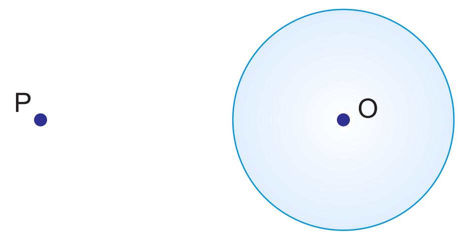
De un punto fuera de un círculo se pueden trazar solo dos rectas tangentes al círculo. Además PA = PB.



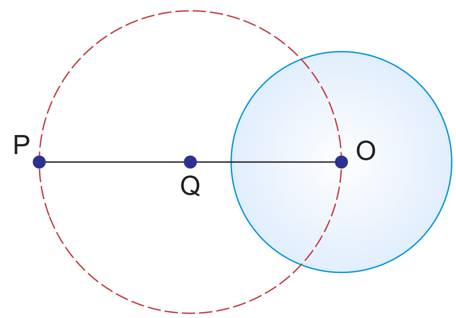
Ejemplo 2.5

Vamos a construir una tangente a un círculo dado que pase por un punto en el exterior del círculo:

1) Trazar un círculo de centro O y un punto P en el exterior del círculo.

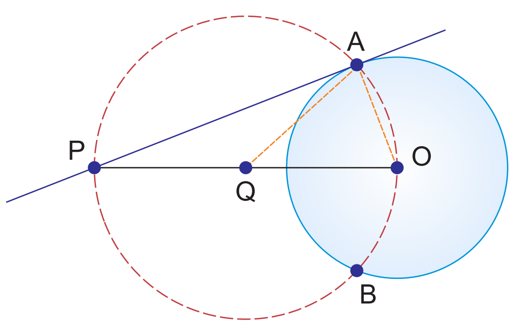


2) Trazar el segmento PO y ubicar su punto medio, nombrarlo Q, luego dibuje el círculo con centro en Q y radio QP.



Para encontrar el punto medio del $\overline{PO}$ trace su mediatriz.

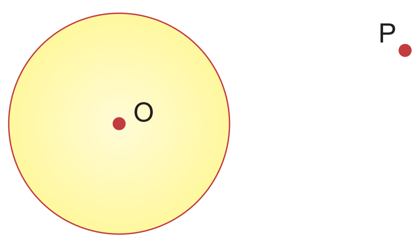
3) Ubicar los puntos A y B en la intersección de los círculos O y Q, y trazar la recta PA la cual es tangente al círculo O en A.



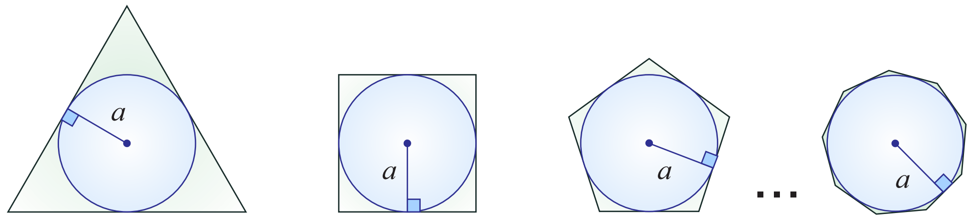
La recta PB también es tangente al círculo O.

Se puede trazar la recta PB tangente al círculo O en el punto B.

Ejercicio 2.6 Dibuje un círculo de radio 4 cm y construya la recta tangente que pase por un punto exterior a él.



El área de un círculo se puede aproximar empleando el concepto de área del polígono regular en el que está inscrito.
Observa que entre más lados tiene el polígono regular más se acerca al círculo.



Si las variables n, l y a representan, n: número de lados de un polígono regular; l: longitud del lado del polígono regular; a: apotema del polígono regular. El área del polígono está dada por $\frac{nla}{2}$.

Si se aumenta la cantidad de lados del polígono regular, el perímetro del polígono (nl) se acerca al perímetro del círculo ($2\pi r$), por lo tanto nl se acerca a $2\pi r$. Por otra parte el apotema a es igual al radio r, $a = r$.

Se establece la siguiente relación:

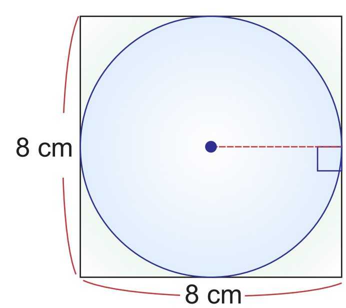
$$\frac{nla}{2} = \frac{(2\pi r)r}{2} = \pi r^2$$

En 5to grado se estudió el perímetro de la circunferencia: C $= 2\pi r$ donde r es el radio del círculo y π es un número irracional.
$\pi = 3.1415926535...$

El área A de un círculo de radio r es: A $= \pi r^2$.

Ejemplo 2.6

Encuentre el área A del círculo inscrito en un cuadrado de 8 cm de lado.



Solución:

La longitud del diámetro del círculo es igual a la longitud del lado del cuadrado por lo tanto el radio del círculo es 4 cm.

A $= \pi r^2$

$= \pi(4)^2$

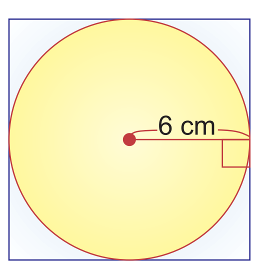
$= 16\pi$

Respuesta: 16π cm^2

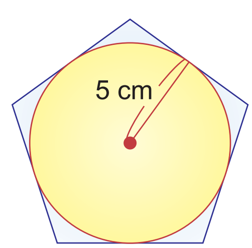
Note que la apotema a del cuadrado es el radio r del círculo inscrito
$a = r$

Ejercicio 2.7 Encuentre el área del círculo inscrito en las siguientes figuras:

a)



b)

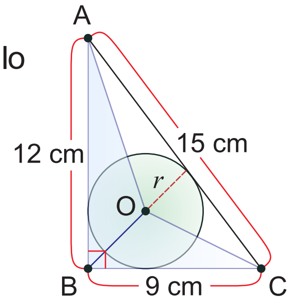


En general se puede inscribir un círculo en un triángulo no regular, es decir, en un triángulo que no sea equilátero, en el siguiente ejemplo estudiamos un triángulo escaleno donde los lados son tangentes al círculo O.

Ejemplo 2.7

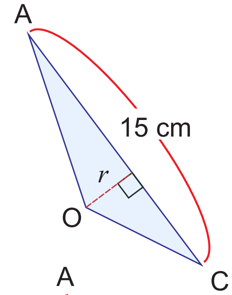
En la figura de la derecha, r es el radio del círculo inscrito en el triángulo rectángulo ABC.

a) ¿Cuál es la altura del ΔAOC? si su base es el lado AC.
b) ¿Cuál es la altura del ΔAOB? si su base es el lado AB.
c) Encuentre el radio del círculo O inscrito en el ΔABC.



Solución:

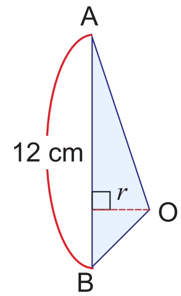
a) Una base del ΔAOC es $\overline{AC}$ por lo tanto su altura es el radio del círculo O, es decir r.



Se sabe que r es perpendicular al $\overline{AC}$ porque $\overline{AC}$ es tangente al círculo O.

Respuesta: r

b) Una base del ΔAOB es $\overline{AB}$ por lo tanto su altura es el radio del círculo O, es decir r.



Se sabe que r es perpendicular al $\overline{AB}$ porque $\overline{AB}$ es tangente al círculo O.

Respuesta: r

c) Para encontrar r se calcula el área de los triángulos ΔAOC, ΔAOB, ΔBOC y ΔABC.
Área ΔABC = Área ΔAOC + Área ΔAOB + Área ΔBOC

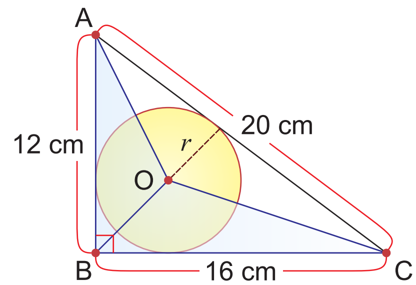
$$\frac{1}{2}(9)(12) = \frac{1}{2}(15)(r) + \frac{1}{2}(12)(r) + \frac{1}{2}(9)(r)$$
$$54 = \frac{15}{2}r + 6r + \frac{9}{2}r$$
$$54 = 18r$$
$$\frac{54}{18} = r$$
$$r = 3$$

La altura del ΔBOC también es r al igual que las alturas de los ΔAOC y ΔAOB.

El área A de un triángulo está dada por $A = \frac{1}{2}bh$ donde b: base
h: altura.

Respuesta: 3 cm

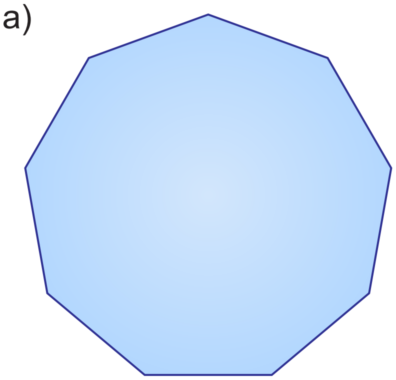
Ejercicio 2.8 Encuentre el radio del círculo O inscrito en el ΔABC.



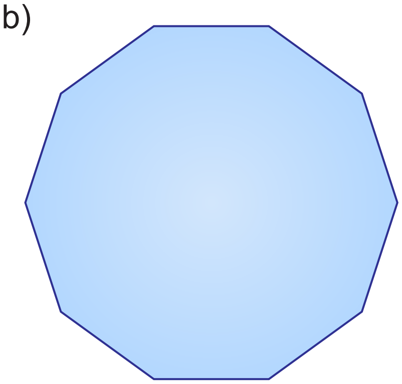
Ejercicios

1 Dados los siguientes polígonos regulares encuentre la medida de los ángulos internos:

a)



b)

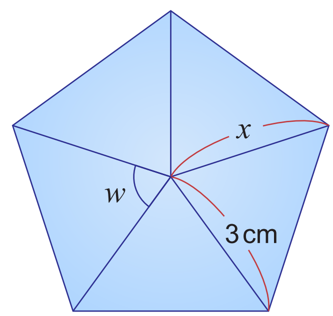


2 Utilizando regla y compás construya un triángulo equilátero de 5 cm de lado y ubique su centro.

3 En el pentágono regular de la derecha encuentre:

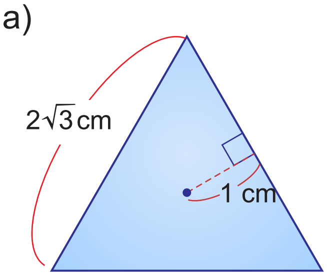
a) La medida de x

b) La medida del ángulo w

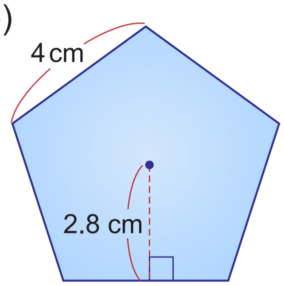


4 Encuentre el área de los siguientes polígonos regulares:

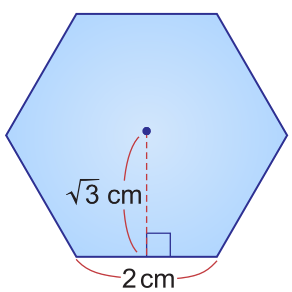
a)



b)



c)

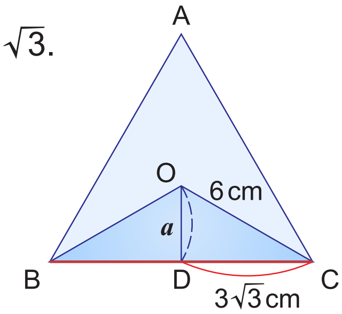


5 El ΔABC es equilátero, $OC = 6$ cm y $CD = 3\sqrt{3}$.
Encuentre:

a) La longitud de la apotema a

b) La longitud del lado del triángulo ABC

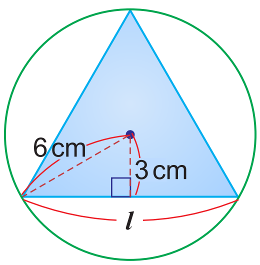
c) El área del triángulo ABC



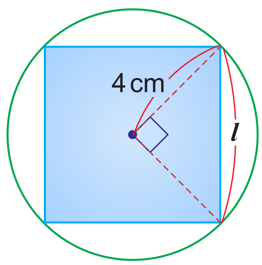
6 Construya con regla y compás un hexágono regular inscrito en un círculo de 8 cm de diámetro.

7 Calcule la longitud del lado de los siguientes polígonos regulares:

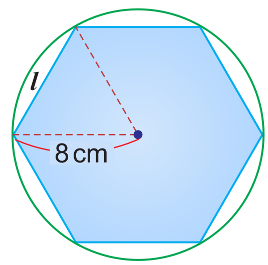
a)



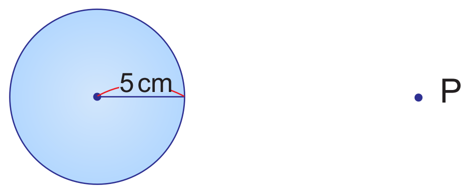
b)



c)



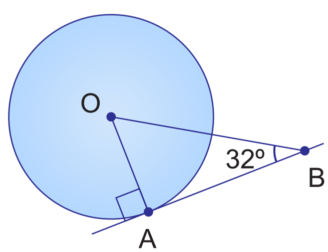
8 Construya un círculo de 5 cm de radio y un punto P fuera de él, luego trace una tangente al círculo que pase por P.



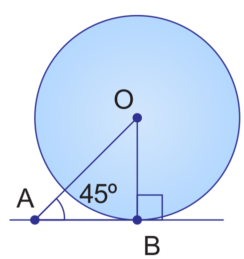
9 Resuelva aplicando la propiedad de la tangente de un círculo.

a) En las figuras a.1) y a.2), el $\overline{AB}$ es tangente al círculo O. Encuentra la medida de los ángulos del ΔAOB.

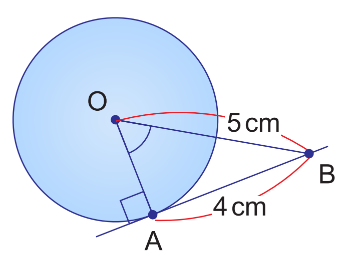
a.1)



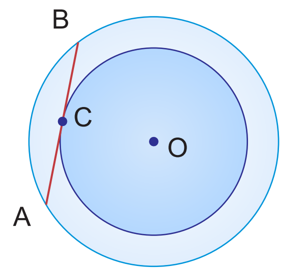
a.2)

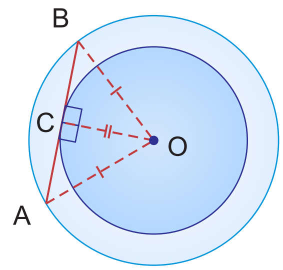


b) En la figura el $\overline{AB}$ es tangente al círculo O. Encuentre la medida del $\overline{OA}$.



10 Complete la siguiente demostración:





Proposición: En la figura de la derecha ambos círculos tienen el mismo centro O. Si la cuerda AB del círculo mayor es tangente en el punto C al círculo menor, demuestre que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

Hipótesis: La cuerda AB del círculo mayor es tangente en el punto C al círculo menor.

Conclusión: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

Sugerencia: trazar los segmentos OA, OB, OC y formar los ΔACO y ΔBCO

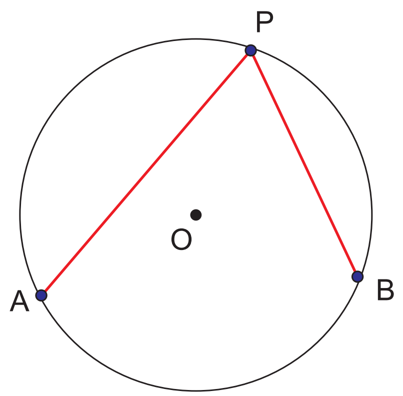
Entre los ΔACO y ΔBCO

Afirmaciones	**Justificaciones**
1) $\overline{OA} \cong \overline{OB}$	Por ser ______ del círculo mayor
2) $m\angle ACO =$ ______ $= 90°$	Por hipótesis y la propiedad de tangente
3) $\overline{OC} \cong$ ______	Por congruencia del mismo segmento
4) $\Delta ACO \cong \Delta BCO$	Por 1), 2), 3) y criterio de congruencia ______ de triángulos rectángulos
5) $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	Por 4) y ______ correspondientes de triángulos congruentes

Propiedades de los ángulos dentro de un círculo

Un círculo tiene muchas propiedades. Vamos a conocer dos propiedades del ángulo inscrito en una circunferencia.

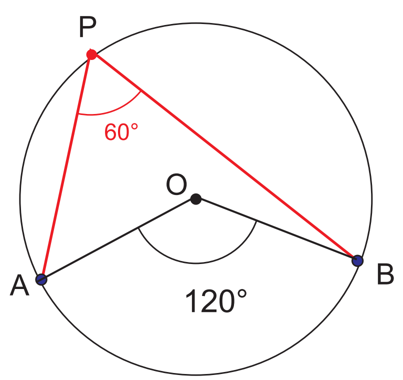
¿Qué es ángulo inscrito?



Hay 3 puntos A, B y P en la misma circunferencia.
Trace las cuerdas PA y PB. El ángulo APB se llama ángulo inscrito (del arco AB).

Propiedad 1

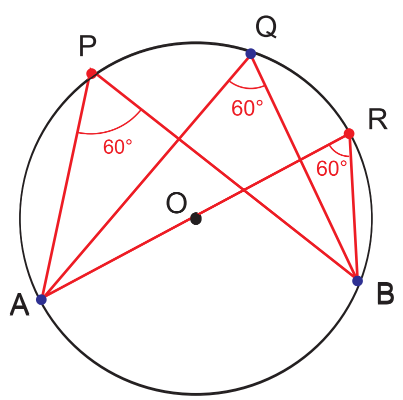
La medida del ángulo central de un arco es el doble de la medida del ángulo inscrito de ese arco.



Los puntos A, B y P están en la circunferencia del círculo O.
$\angle$APB y $\angle$AOB subtienden el mismo arco AB.
$m\angle \text{APB} = 60°$ y $m\angle \text{AOB} = 120°$
La medida del ángulo AOB es el doble de la medida del ángulo APB.
La medida del ángulo APB es la mitad de la medida del ángulo AOB.

Propiedad 2

Las medidas de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son iguales.



Los puntos A, B, P, Q y R están en la circunferencia del círculo O.
Las medidas de los ángulos inscritos del arco AB son iguales. Es decir:
$m\angle \text{APB} = m\angle \text{AQB} = m\angle \text{ARB} = 60°$

Unidad 7

Sólidos geométricos

Lección 1: Áreas laterales y volumen de sólidos geométricos

Unidad 7 Sólidos geométricos

Lección 1: Áreas laterales y volumen de sólidos geométricos

Sección 1: Construcción de sólidos geométricos

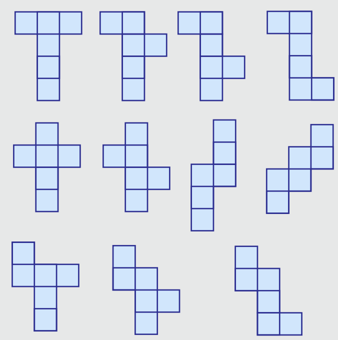
Vamos a construir sólidos geométricos dados varios desarrollos.

Ejemplo 1.1

Dado el siguiente desarrollo de un cubo, cálquelo en cartulina, luego recórtelo y arme el cubo.

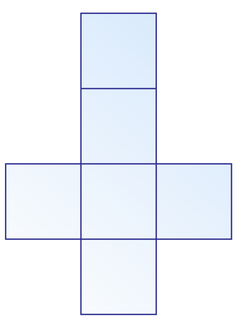
Un desarrollo de un sólido no tiene pestañas, éstas se consideran cuando se quiere construir dicho sólido.

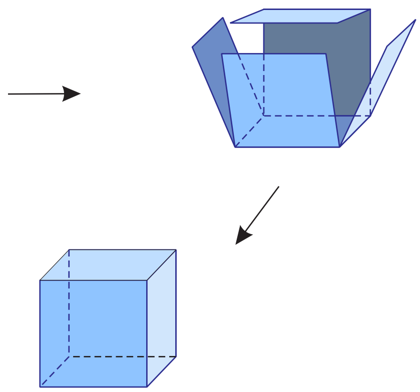
Un cubo se puede construir a partir de 11 desarrollos diferentes



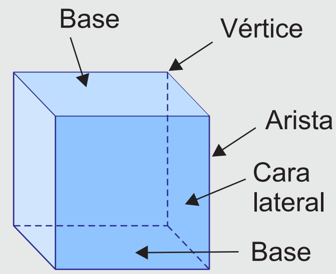
(Ver desarrollo para calcar en la página 162)

Solución:

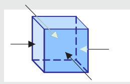




Elementos de un cubo
Un cubo tiene:
6 caras cuadradas,
12 aristas y
8 vértices.



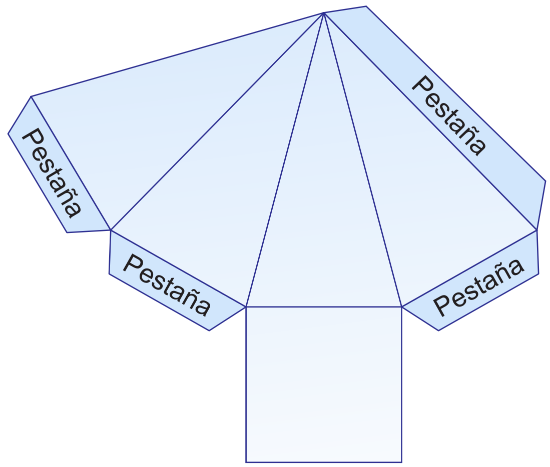
El cubo tiene 4 caras laterales



Ejercicio 1.1 Elija uno de los desarrollos presentados en el recuadro del **Ejemplo 1.1** y construya un cubo cuya arista mida 6 cm.

Ejemplo 1.2

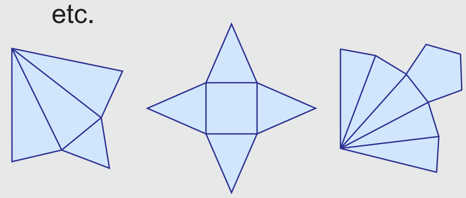
Dado el siguiente desarrollo de una pirámide cuadrangular, cálquelo en cartulina, luego recórtelo y arme la pirámide.



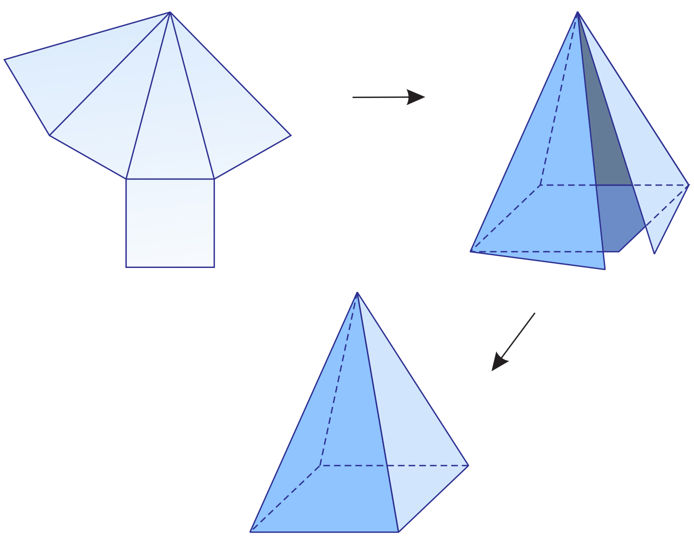
(Ver desarrollo para calcar en la página 163)

Una pirámide se nombra de acuerdo a la forma del polígono de su base, es decir, si la base es un:

- Triángulo: pirámide triangular.
- Cuadrado: pirámide cuadrangular.
- Rectángulo: pirámide rectangular.
- Pentágono: pirámide pentagonal, etc.

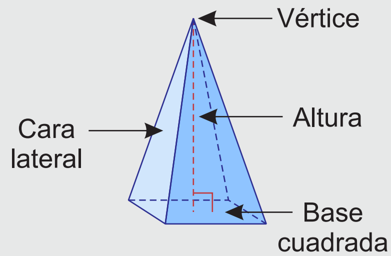


Solución:



Elementos de una pirámide cuadrangular

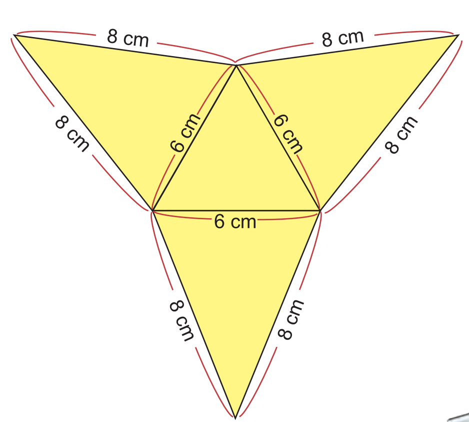
En 4to grado aprendimos los elementos de una pirámide:



Una pirámide tiene tantas caras laterales como lados tenga el polígono de la base, éstas siempre serán triangulares, por ejemplo, la pirámide triangular tienen 3 caras laterales, la pirámide pentagonal tiene 5 caras laterales, etc.

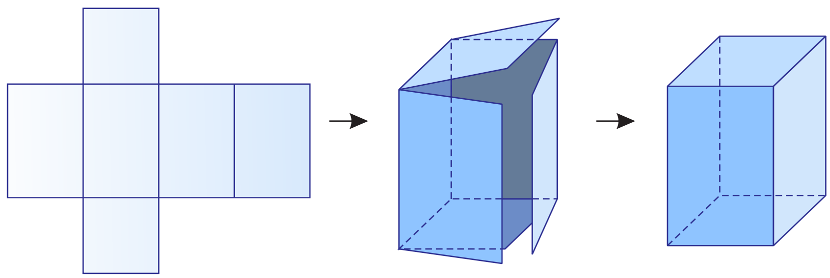
Ejercicio 1.2

Construya una pirámide triangular cuyo lado de la base mide 6 cm y los lados de los triángulos isósceles de las caras laterales miden 8 cm, 6 cm y 8 cm.



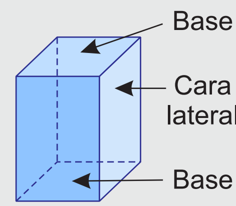
Recordemos los desarrollos de los sólidos geométricos vistos en años anteriores.

Prisma rectangular

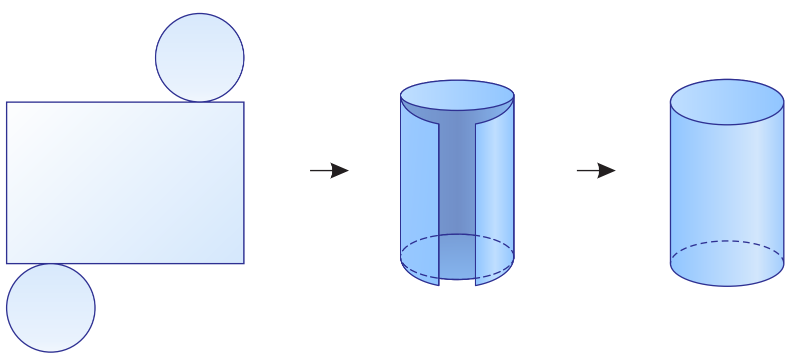


Las caras laterales de los prismas siempre son rectángulos, sin embargo sus bases pueden ser cualquier polígono.

Un prisma se nombra de acuerdo a la forma de sus bases:
Prisma triangular,
Prisma cuadrangular o rectangular,
Prisma pentagonal, etc.

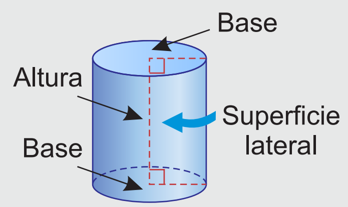


Cilindro

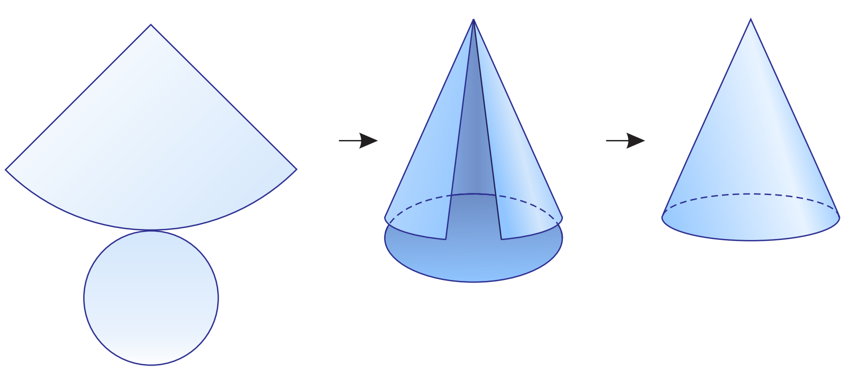


El cilindro es un sólido geométrico formado por dos caras circulares y una superficie curva.

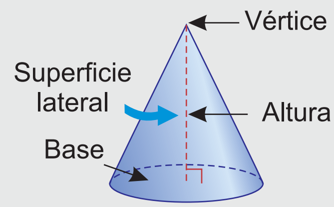
Elementos de un cilindro:



Cono



El cono es un sólido geométrico formado por una cara circular y una superficie curva.

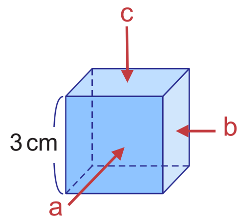


Observemos las caras laterales o superficies laterales de los siguientes sólidos:

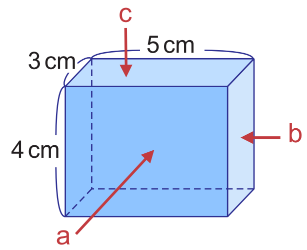
Ejemplo 1.3

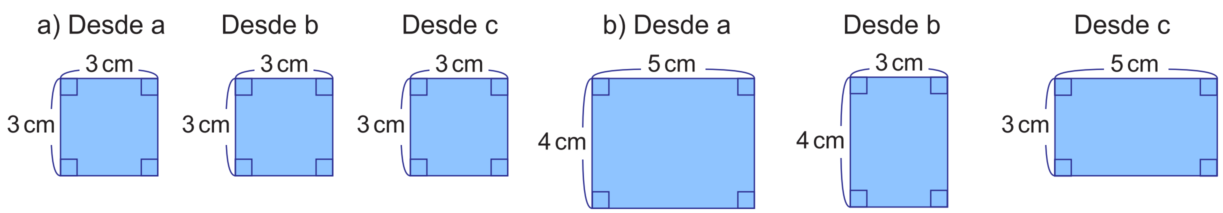
Dibuje en su cuaderno cada uno de los lados vistos desde la dirección indicada por las flechas a, b y c de cada uno de los siguientes sólidos.

a) Cubo



b) Prisma rectangular

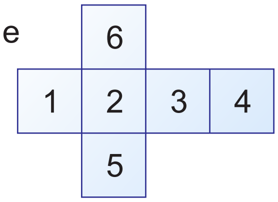




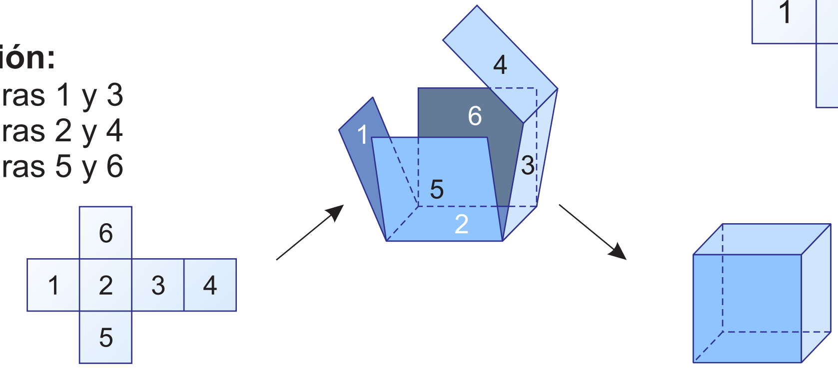
Observe que en el cubo hay tres pares de caras paralelas que son cuadrados congruentes. En el prisma rectangular hay tres pares de caras paralelas las cuales son rectángulos. Cada pareja de rectángulos son congruentes entre sí.

Ejemplo 1.4

Dado el siguiente desarrollo de un cubo señale los tres pares de caras paralelas.

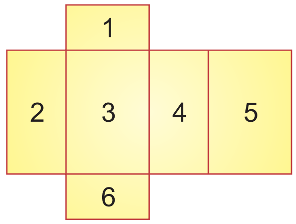


Solución:
Las caras 1 y 3
Las caras 2 y 4
Las caras 5 y 6



Ejercicio 1.3

Dado el siguiente desarrollo de un prisma señale los tres pares de caras paralelas.



Ejemplo 1.5

Encuentre el área total de las superficies (laterales y bases) de los sólidos del *Ejemplo* 1.3 .

Solución:

a) Cubo

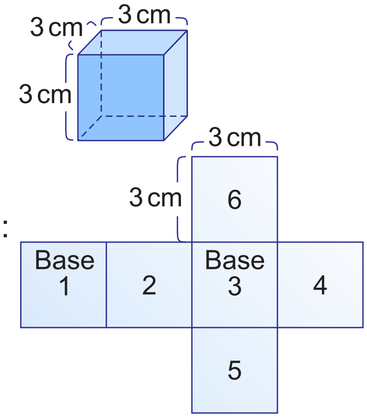
El cubo tiene 6 caras cuadradas congruentes, cuatro superficies laterales y dos bases, su área total será la suma de cada superficie lateral y el área de las bases.

Área A de una cara ($A = \text{lado} \times \text{lado}$)

$A = 3 \times 3$ ... la longitud del lado del cuadrado es 3 cm

$= 9$

Área del cuadrado es 9 cm^2 ...... área de cada cara



Como las seis caras del cubo son congruentes entonces:

Área total de la superficie $=$ área de una cara $\times$ 6 caras

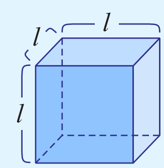
$= 9 \times 6$

$= 54$

Respuesta: 54 cm^2

El área A de un cuadrado está dado por:
$A = \text{lado} \times \text{lado}$

El área total de las superficies (laterales y bases) del cubo se obtiene al multiplicar por 6 el área de una cara.



b) Prisma rectangular

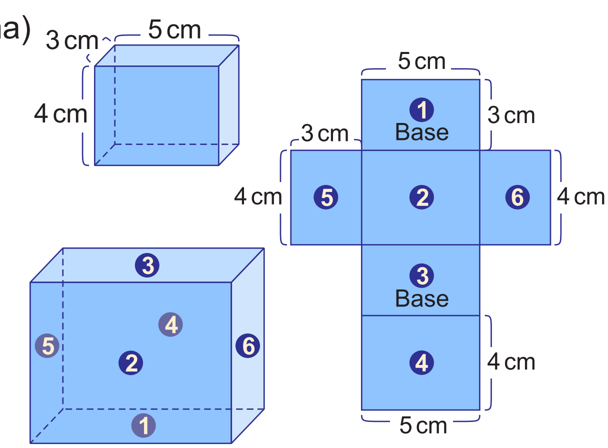
El prisma rectangular tiene seis caras o superficies rectangulares, el área total de las superficies es la suma del área de todas sus caras.

Área de la superficie 1 (base del prisma)

$A = 5 \times 3$ ... base $= 5$, altura $= 3$

$= 15$

El área de la superficie 1 es 15 cm^2.



Área de la superficie 2 (cara lateral)

$A = 5 \times 4$ ... base = 5, altura = 4

$= 20$

El área de la superficie 2 es 20 cm^2.

El área A de un rectángulo está dado por $A = bh$ donde b es la base y h es la altura del rectángulo.

Área de la superficie 5 (cara lateral)

$A = 3 \times 4$ ... base = 3, altura = 4

$= 12$

El área de la superficie 5 es 12 cm^2.

Como las superficies 1 y 3, 2 y 4, 5 y 6 son congruentes entonces el área total de las superficies está dada por:

Área total de la superficie = (área superficie 1) $\times$ 2 + (área superficie 2) $\times$ 2 + (área de la superficie 5) $\times$ 2

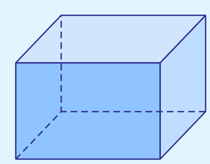
= 2 (área superficie 1 + área superficie 2 + área superficie 5)

$= 2\,(15 + 20 + 12)$

$= 94$

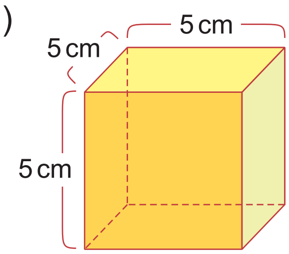
Respuesta: 94 cm^2

El área total de las superficies (laterales y bases) de un prisma rectangular se obtiene al sumar el área de las tres superficies distintas y luego multiplicar esta suma por 2.

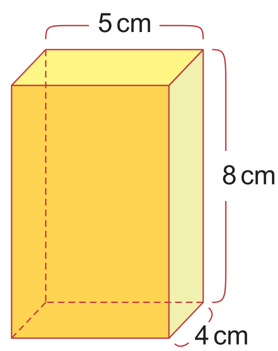


Ejercicio 1.4 Encuentre el área total superficial (laterales y bases) de los siguientes sólidos.

a)



b)

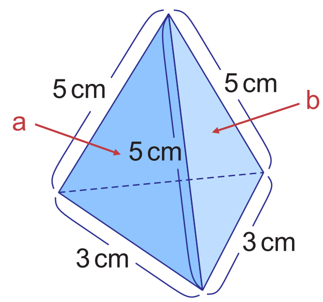


El área total de un prisma rectangular también se puede obtener sumando el área de todas sus caras.

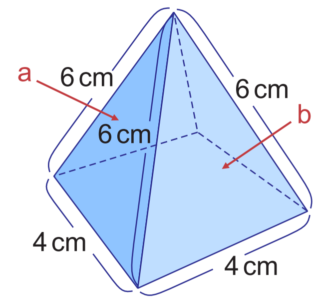
Ejemplo 1.6

Dibuje en su cuaderno el lado visto desde la dirección indicada por las flechas a y b de cada uno de los siguientes sólidos.
¿Qué forma tienen las superficies laterales de una pirámide triangular y de una pirámide cuadrangular?

Pirámide triangular



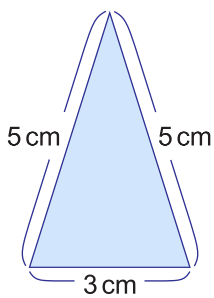
Pirámide cuadrangular



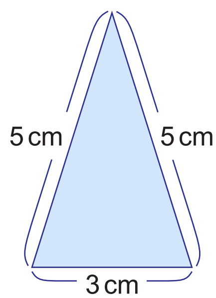
Solución:

Pirámide triangular

Desde a

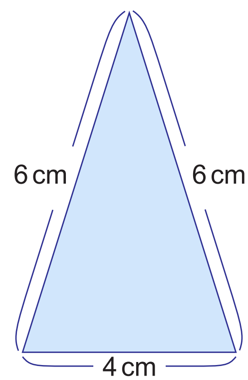


Desde b

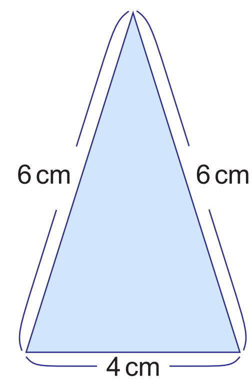


Pirámide cuadrangular

Desde a



Desde b

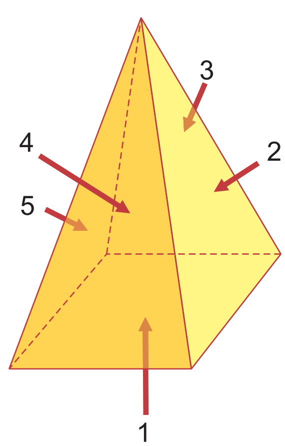


Las superficies laterales de las pirámides triangulares y las pirámides cuadrangulares son triángulos.

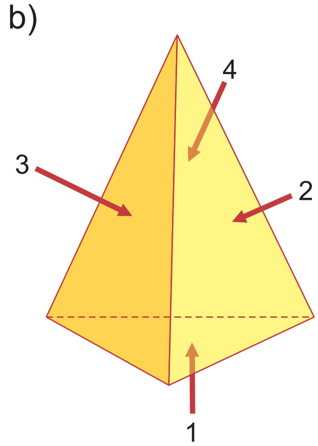
Ejercicio 1.5

En las siguientes pirámides indique si los números señalan una base o una superficie lateral.
Identifique qué tipo de pirámide es.

a)



b)

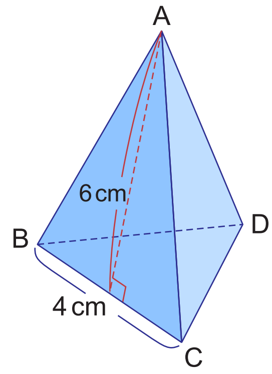


Ejemplo 1.7

Encuentre el área de cada superficie lateral de la pirámide cuya base es un triángulo equilátero y luego encuentre el área total de las superficies laterales (todas las caras laterales de la pirámide son congruentes).

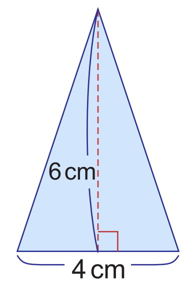
Solución:

En la pirámide, los triángulos ABC, ACD y ABD son congruentes por lo tanto tienen la misma área, entonces:



$$\text{El área del } \Delta ABC = \frac{1}{2}(\text{base} \times \text{altura})$$
$$= \frac{1}{2}(4 \times 6) \quad \text{... base} = 4\text{, altura} = 6$$
$$= 12$$

El área de cada superficie lateral es 12 cm^2.



Luego para encontrar el área total de las superficies laterales de la pirámide se debe considerar que hay tres triángulos congruentes, por lo tanto el área total es:

Área total de las superficies laterales = (área de cada superficie lateral) × 3 caras laterales

$$= 12 \times 3$$
$$= 36$$

El área A de un triángulo está dada por: $A = \frac{1}{2}bh$ donde b es la base y h es la altura del triángulo.

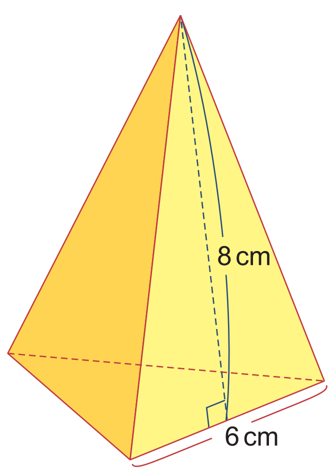
Respuesta: El área total de la superficies laterales es 36 cm^2.

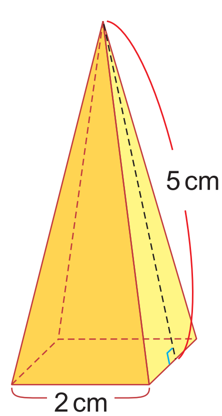
Ejercicio 1.6

Encuentre el área de las superficies laterales de las siguientes pirámides. (Todas los caras laterales de la pirámide son congruentes).

a) La base de la pirámide es un triángulo equilátero.

b) La base de la pirámide es un cuadrado



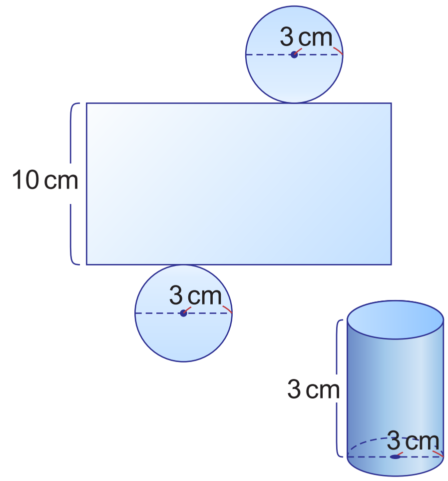


Ejemplo 1.8

Dada la figura de un cilindro cuyo radio de la base mide 3 cm y su altura 10 cm

a) Observe su desarrollo, ¿qué figuras geométricas lo forman?

b) Encuentre el área de la superficie lateral del cilindro.



Solución:

a) Observe que en el desarrollo del cilindro se tienen tres figuras geométricas:
un rectángulo que representa la superficie lateral del cilindro y dos círculos que representan sus bases. (Observe página 142)

b) Para obtener el área de la superficie lateral del cilindro se necesita conocer las longitudes del rectángulo.

La longitud de la circunferencia es la base del rectángulo y está dado por:

$$\begin{aligned}\text{Longitud de la circunferencia} &= 2 \times \pi \times \text{radio}\\ &= 2 \times \pi \times 3\\ &= 6\pi\end{aligned}$$

La longitud C de la circunferencia es lo mismo que el perímetro del círculo y está dado por: $C = 2\pi r$ donde r es el radio.

La base del rectángulo es 6π cm y su altura es 10 cm.

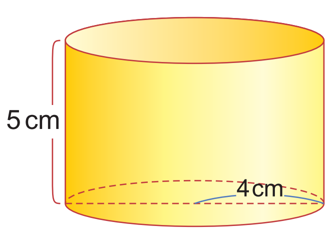
$$\begin{aligned}\text{Área de la superficie lateral del cilindro} &= \text{área del rectángulo}\\ &= (\text{base}) \times (\text{altura})\\ &= 6\pi \times 10\\ &= 60\pi\end{aligned}$$

Respuesta: El área total de la superficie lateral es 60π cm^2.

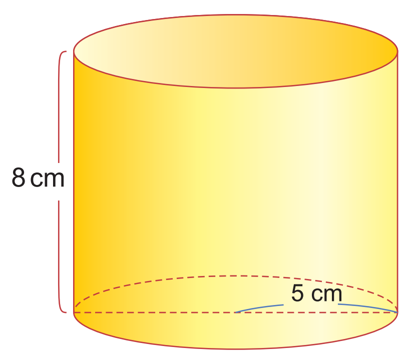
Ejercicio 1.7

Encuentre el área de la superficie lateral de los siguientes cilindros.

a)

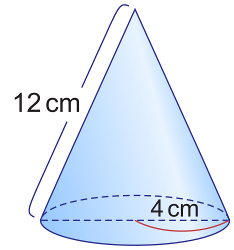


b)



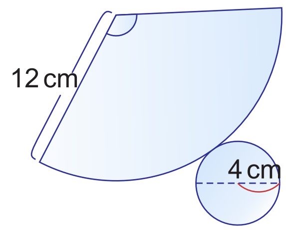
Ejemplo 1.9

Dada la figura del cono a la derecha
a) Observe su desarrollo. ¿Qué figuras geométricas lo forman?
b) Encuentre el área de la superficie lateral del cono.



Solución:

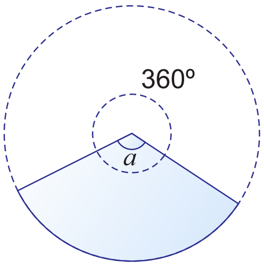
a) Observe que en el desarrollo del cono se tiene un sector circular, donde el círculo que lo contiene tiene radio 12 cm y representa la superficie lateral del cono, además se tiene un círculo que representa la base del cono con un radio de 4 cm.
(Observe página 142)



b) Como la superficie lateral del cono es un sector circular para encontrar su área se necesita la medida del ángulo del sector circular.

Observe la relación entre la longitud del arco y la longitud de la circunferencia de radio 4 cm.

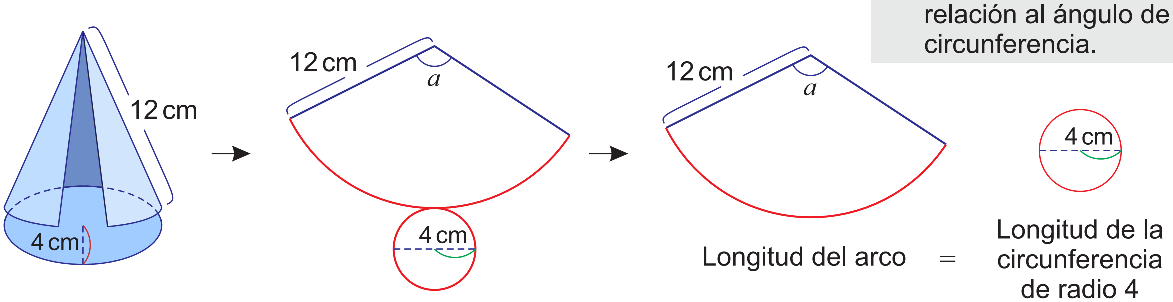
Si a es la medida del ángulo del sector circular entonces:



$$a : 360° = \left(\begin{array}{c}\text{longitud del arco}\\ \text{circunferencia de radio 12 cm}\end{array}\right) : \left(\begin{array}{c}\text{longitud de la}\\ \text{circunferencia de radio 12 cm}\end{array}\right)$$

La longitud del arco de la circunferencia de radio 12 cm es igual a la longitud de la circunferencia de radio 4 cm.

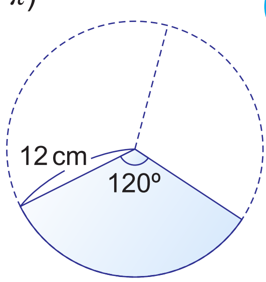
La razón a : 360° surge de comparar el ángulo del sector circular en relación al ángulo de la circunferencia.



$$a : 360° = \left(\begin{array}{c}\text{longitud de la}\\ \text{circunferencia de radio 4}\end{array}\right) : \left(\begin{array}{c}\text{longitud de la}\\ \text{circunferencia de radio 12}\end{array}\right)$$

$$a : 360° = (2 \times 4 \times \pi) : (2 \times 12 \times \pi)$$
$$a : 360° = 4 : 12$$
$$12a = 360° \times 4$$
$$a = 360° \times \frac{4}{12}$$
$$= 360° \times \frac{1}{3}$$
$$= 120°$$

$$\begin{aligned} a: 360° &= (\cancel{2} \times 4 \times \pi) : (\cancel{2} \times 12 \times \pi)\\ &= (4 \times \cancel{\pi}) : (12 \times \cancel{\pi})\\ &= 4 : 12 \end{aligned}$$



El sector circular representa $\frac{1}{3}$ del círculo de radio 12 cm.

El ángulo central del sector circular del cono mide 120°.

El área A de la superficie lateral del cono es el área del sector circular.

$A = 12^2 \times \pi \times \frac{120°}{360°}$ ... el área del círculo de radio 12 por la razón del ángulo del sector circular y del ángulo de la circunferencia.

$= 144 \times \pi \times \frac{1}{3}$ ... el área del sector circular es $\frac{1}{3}$ del área del círculo que lo contiene

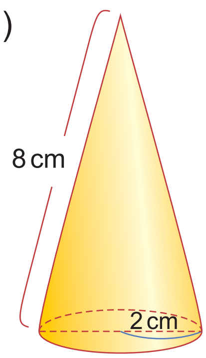
$= 48\pi$

El área A de un círculo es πr^2 donde r es el radio.

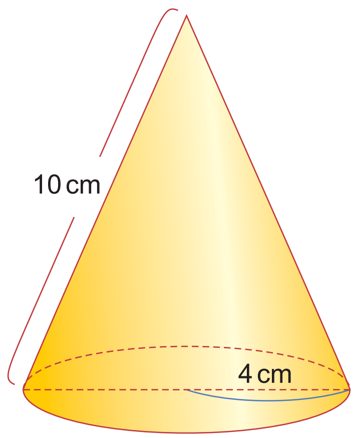
Respuesta: El área de la superficie lateral del cono es 48π cm^2.

Ejercicio 1.8 Encuentre el área de la superficie lateral de los siguientes conos.

a)

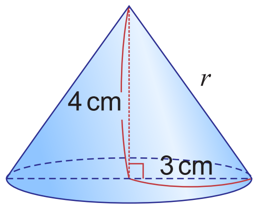


b)



Ejemplo 1.10

Encuentre el área de la superficie lateral del cono de la derecha.



Solución:

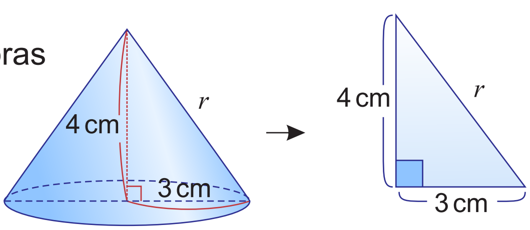
En el cono dado se puede observar que no se tiene la medida del radio del círculo que contiene el sector circular, sin embargo se puede encontrar considerando un triángulo rectángulo.

$3^2 + 4^2 = r^2$ ... Aplicar teorema de Pitágoras

$r^2 = 25$ como $r > 0$

$r = \sqrt{25}$

$r = 5$

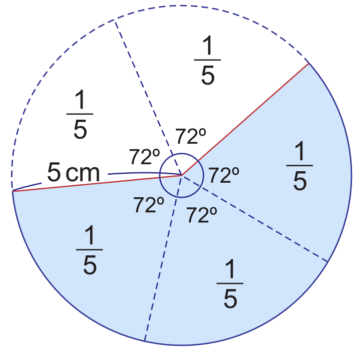


El radio del sector circular es 5 cm.

Si a es la medida del ángulo del sector circular entonces:

$$a : 360° = \left(\begin{array}{c}\text{longitud de la}\\ \text{circunferencia de radio 3}\end{array}\right) : \left(\begin{array}{c}\text{longitud de la}\\ \text{circunferencia de radio 5}\end{array}\right)$$

$$a : 360° = (2 \times 3 \times \pi) : (2 \times 5 \times \pi)$$
$$a : 360° = 3 : 5$$
$$5a = 360° \times 3$$
$$a = 360° \times \frac{3}{5}$$
$$= 72° \times 3$$
$$= 216°$$



El ángulo del sector circular es 216°.

El área A de la superficie lateral del cono, es el área del sector circular.

$$A = 5^2 \times \pi \times \frac{216º}{360º}$$

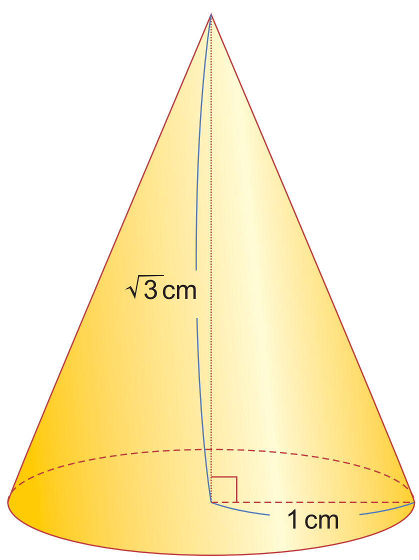
Antes de multiplicar fracciones simplifique si se puede.

$= 25 \times \pi \times \frac{3}{5}$ ...... el área del sector circular es $\frac{3}{5}$ del área del círculo que lo contiene

$= 15\pi$

Respuesta: El área de la superficie lateral del cono es 15π cm^2

Ejercicio 1.9 Encuentre el área de la superficie lateral del siguiente cono.



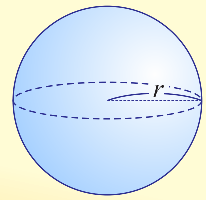
La **superficie de la esfera** la forman los puntos del espacio que distan lo mismo de un punto fijo llamado centro. La distancia es el radio.

El área de la superficie de la esfera se encuentra con la siguiente fórmula.

El **área A de la superficie de la esfera** se obtiene con la fórmula:

$$A = 4\pi r^2$$

donde r es el radio de la esfera.



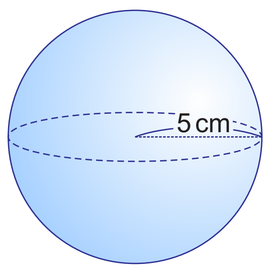
Ejemplo 1.11

Encuentre el área A de la superficie de la esfera cuyo radio mide 5 cm.

Solución:

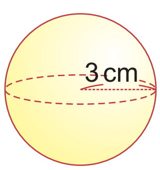
$$\begin{aligned} A &= 4\pi r^2 \\ &= 4\,\pi\,(5)^2 \\ &= 100\pi \end{aligned}$$

Respuesta: 100π cm^2

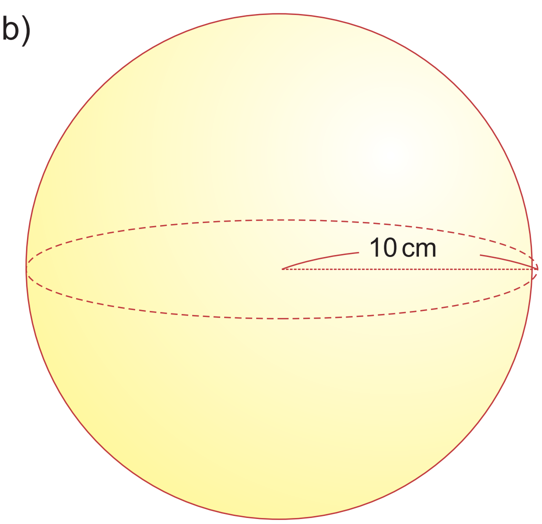


Ejercicio 1.10 Encuentre el área de la superficie de las siguientes esferas.

a)



b)



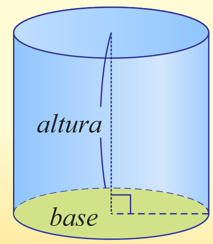
Sección 3: Volumen de cilindros, pirámides, conos y esferas

Volumen del cilindro

El cálculo del volumen del cilindro se aprendió en 6to grado.

Puedes consultar en la unidad 8, lección 2 de 6to grado.

Volumen del cilindro $=$ (área de la base) $\times$ (altura)



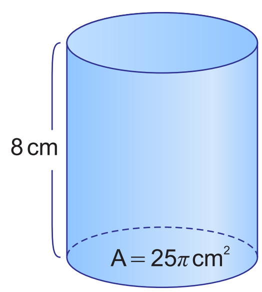
Ejemplo 1.12

Encuentre el volumen V del cilindro de la derecha.

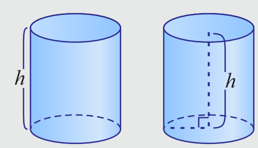
Solución:

$$\begin{aligned} V &= (\text{área de la base}) \times (\text{altura}) \\ &= 25\pi \times 8 \\ &= 200\pi \end{aligned}$$

Respuesta: 200π cm^3

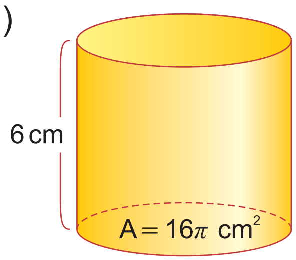


La altura del cilindro se puede considerar:

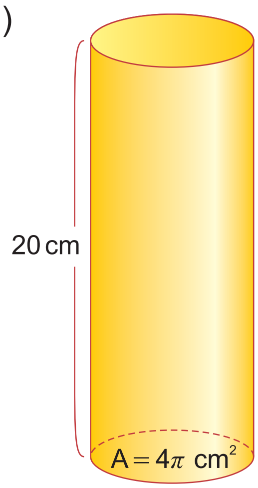


Ejercicio 1.11 Encuentre el volumen de los siguientes cilindros dado el área de la base y su altura.

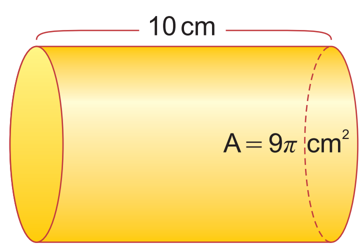
a)



b)

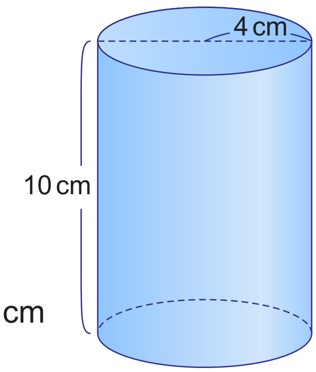


c)



Ejemplo 1.13

Encuentre el volumen V del cilindro si el radio de la base mide 4 cm y su altura mide 10 cm.



Solución:

$V = (\text{área de la base}) \times (\text{altura})$

$= (\pi \times (\text{radio})^2) \times (\text{altura})$

$= (\pi \times 4^2) \times 10$...... el radio del círculo de la base es 4 cm y la altura del cilindro es 10 cm

$= 16\pi \times 10$

$= 160\pi$

Respuesta: 160π cm^3

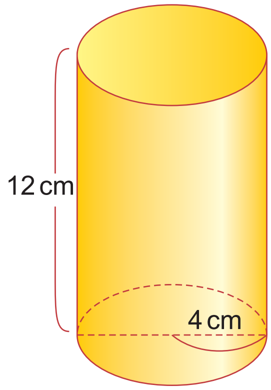
La base de un cilindro es un círculo y el área A de un círculo se obtienen mediante la fórmula:

$$A = \pi r^2$$

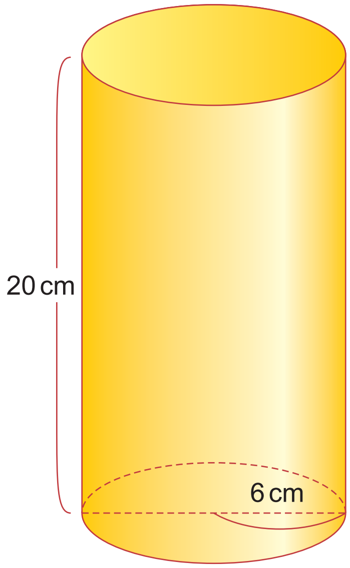
donde r es el radio del círculo.

Ejercicio 1.12 Encuentre el volumen de los siguientes cilindros dado su radio.

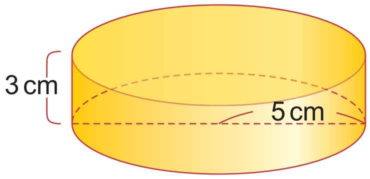
a)



b)



c)

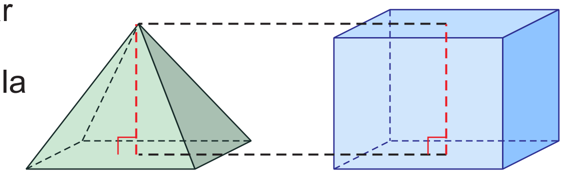


Volumen de la pirámide

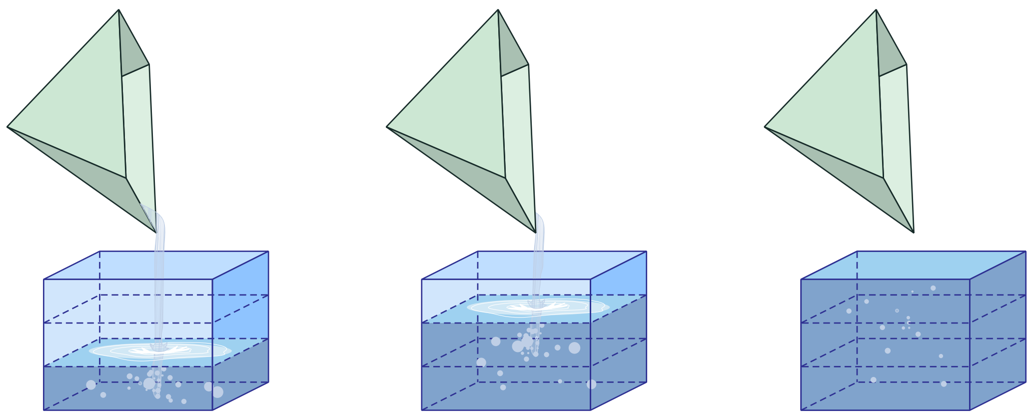
En 6to grado se aprendió como calcular el volumen V de un prisma con la fórmula V = (área de la base) $\times$ (altura), en este grado se estudiará como calcular el volumen de una pirámide, por lo que se analizará la relación entre la pirámide y el prisma.

Entre el volumen de una pirámide y el volumen de un prisma que tiene la misma base y la misma altura que la pirámide existe una relación la cual se estudia a continuación:

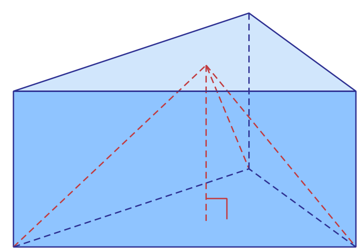
Se tienen 2 recipientes, un prisma cuadrangular y una pirámide cuadrangular.
El prisma y la pirámide tienen la misma base y la misma altura.



Si se llena la pirámide de agua y se deposita en el prisma, ¿cuántas veces necesita llenar la pirámide con agua y depositarla en el prisma para llenarlo?



Como se ve en la figura el volumen del prisma es 3 veces el volumen de la pirámide, en forma análoga, el volumen de cada pirámide es la tercera parte del volumen del prisma.

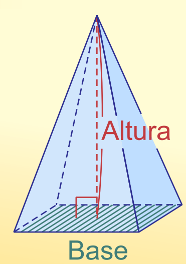


$$\text{Volumen de la pirámide} = \frac{1}{3} \times (\text{volumen del prisma})$$

Esta relación se establece para cualquier prisma de cualquier base y será válida solo si los dos sólidos (la pirámide y el prisma) tienen la misma base y la misma altura.

Volumen de la pirámide $= \frac{1}{3} \times$ (área de la base) $\times$ (altura)

La base de la pirámide puede ser cualquier polígono.



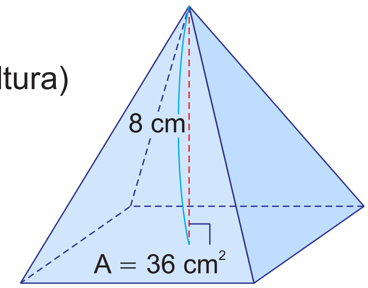
Ejemplo 1.14

Encuentre el volumen V de una pirámide cuadrangular cuya área de la base es 36 cm^2 y su altura es 8 cm.

Solución:

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{área de la base}) \times (\text{altura})$$
$$= \frac{1}{3} \times 36 \times 8$$
$$= 96$$

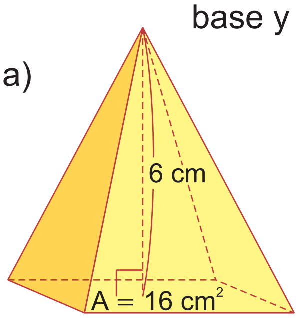
Respuesta: 96 cm^3



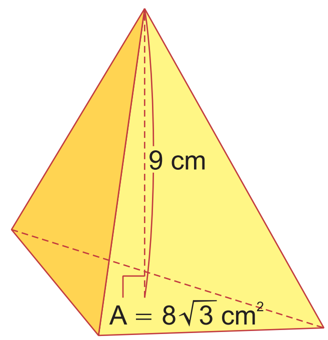
Ejercicio 1.13

Encuentre el volumen de las siguientes pirámides dada el área de la base y la altura.

a)

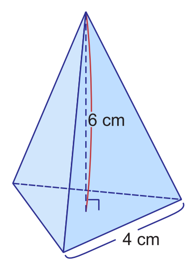


b)



Ejemplo 1.15

Encuentre el volumen V de una pirámide cuya altura mide 6 cm y su base es un triángulo equilátero de 4 cm de lado.



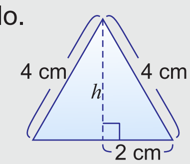
Solución:

Para encontrar el volumen de la pirámide se necesita encontrar el área de la base. La base es un triángulo equilátero de lado 4 cm.

$$\text{Área de la base} = \frac{1}{2} \times (\text{base}) \times (\text{altura})$$
$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3}$$
$$= 4\sqrt{3}$$

El área de la base es $4\sqrt{3}$ cm^2

Para encontrar el área de la base de la pirámide se necesita encontrar la altura del triángulo.



Aplicando el teorema de Pitágoras

$$h^2 + 2^2 = 4^2$$
$$h^2 = 12, \text{ como } h > 0$$
$$h = \sqrt{12}$$
$$= 2\sqrt{3}$$

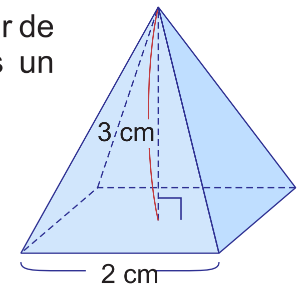
Volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{área de la base}) \times (\text{altura})$$
$$= \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times 6$$
$$= 8\sqrt{3}$$

Respuesta: $8\sqrt{3}$ cm^3

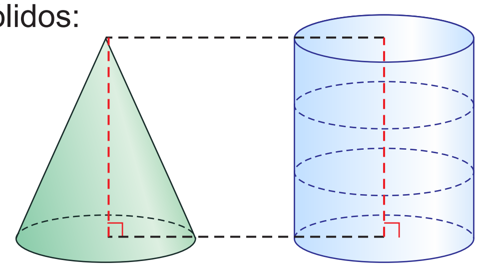
Recuerde que la base de una pirámide puede ser cualquier polígono por lo que la fórmula para encontrar el área de la base dependerá de ello.

Ejercicio 1.14 Encuentre el volumen V de la pirámide cuadrangular de la derecha cuya altura mide 3 cm y su base es un cuadrado de lado 2 cm.

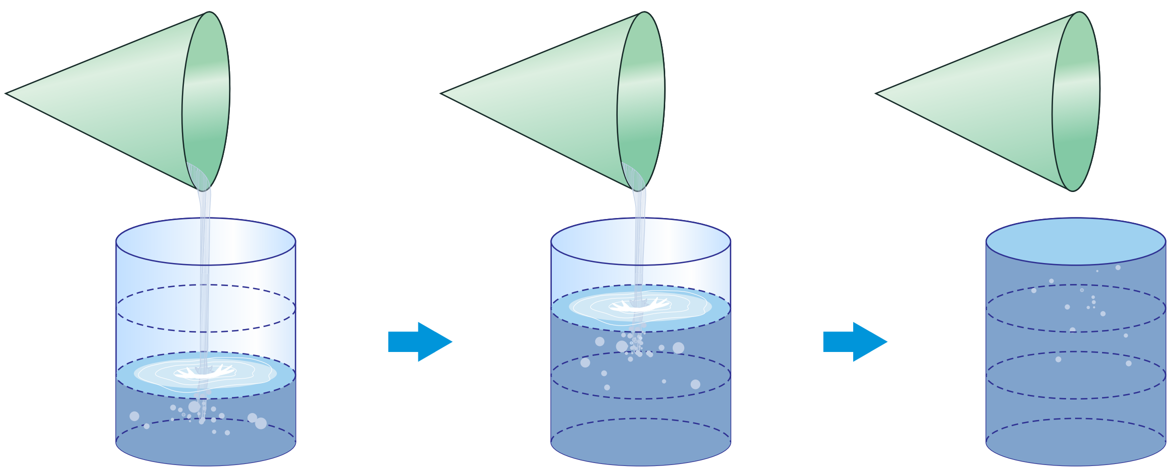


Volumen del cono

Al igual que se establece una relación entre la pirámide y el prisma que tienen la misma base y la misma altura, también se establece una relación entre el cilindro y el cono que tienen la misma base y la misma altura.
A continuación observe la relación entre ambos sólidos:



Se tienen 2 recipientes, un cilindro y un cono.
El cilindro y el cono tienen la misma base y la misma altura.
Si se llena el cono de agua y se deposita en el cilindro, ¿cuántas veces necesita llenar el cono con agua y depositarla en el cilindro para llenarlo?

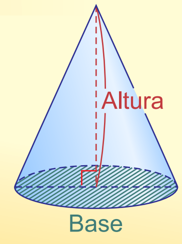


Como se ve en la figura el volumen del cilindro es 3 veces el volumen del cono, en forma análoga, el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.

$$\text{Volumen del cono} = \frac{1}{3} \times (\text{volumen del cilindro})$$
$$= \frac{1}{3} \times (\text{área de la base}) \times (\text{altura})$$

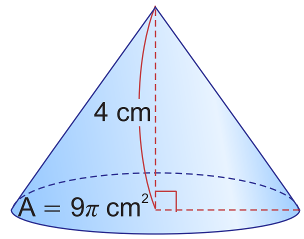
Esta relación es válida solo si los dos sólidos (el cono y el cilindro) tienen la misma base y la misma altura.

Volumen del cono $= \frac{1}{3} \times (\text{área de la base}) \times (\text{altura})$



Ejemplo 1.16

Encuentre el volumen V del cono de la derecha cuya área de la base es 9π cm^2 y su altura es 4 cm.



Solución:

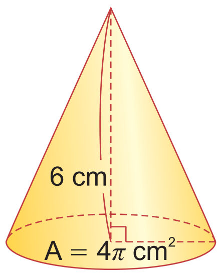
$$V = \frac{1}{3} \times (\text{área de la base}) \times (\text{altura})$$
$$= \frac{1}{3} \times 9\pi \times 4$$
$$= 12\pi$$

Respuesta: 12π cm^3

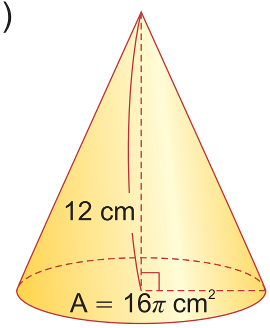
Ejercicio 1.15

Encuentre el volumen de los siguientes conos dado el área de la base y su altura.

a)

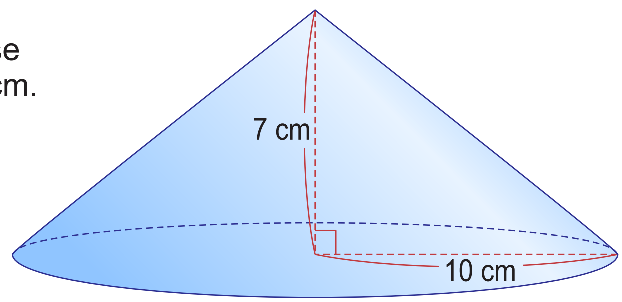


b)



Ejemplo 1.17

Encuentre el volumen V del cono cuya base tiene un radio de 10 cm y una altura de 7 cm.



Solución:

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{área de la base}) \times (\text{altura})$$
$$= \frac{1}{3} \times (10^2 \times \pi) \times 7$$
$$= \frac{700}{3}\pi$$

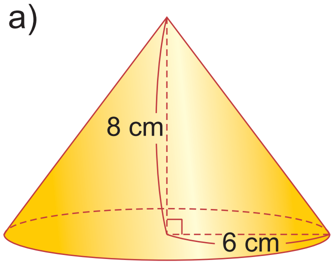
Respuesta: $\frac{700}{3}\pi$ cm^3

La base del cono es un círculo y su área A se calcula mediante la fórmula: $A = \pi r^2$ donde r es el radio.

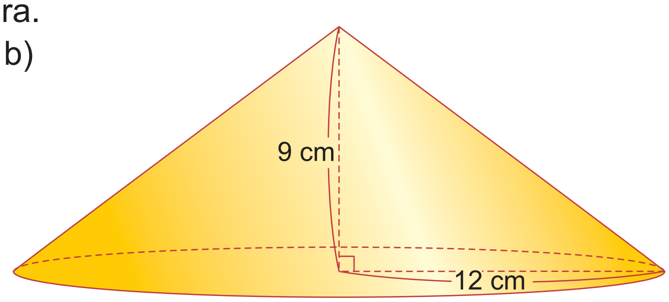
Ejercicio 1.16

Encuentre el volumen de los siguientes conos dado el radio de la base y su altura.

a)



b)

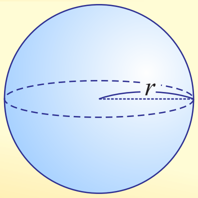


Volumen de la esfera

El **Volumen V de la esfera** se calcula con la fórmula:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

donde r es el radio de la esfera.

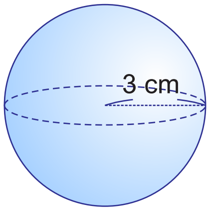


Ejemplo 1.18

Encuentre el volumen de la esfera cuyo radio mide 3 cm.

Solución:

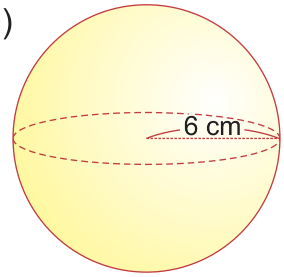
$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi r^3}{3} \\ &= \frac{4\pi\,(3)^3}{3} \\ &= 36\pi \end{aligned}$$



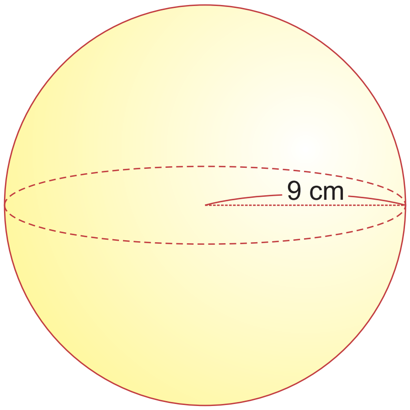
Respuesta: 36π cm^3

Ejercicio 1.17 Encuentre el volumen de las siguientes esferas.

a)

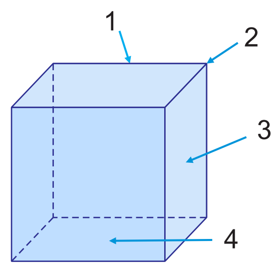


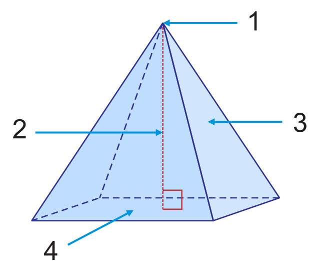
b)



Ejercicios

1 Dados los siguientes sólidos diga el nombre de cada uno de sus elementos.



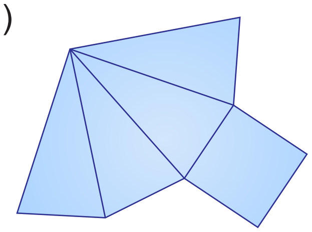


Cubo
1:______________________
2:______________________
3:______________________
4:______________________

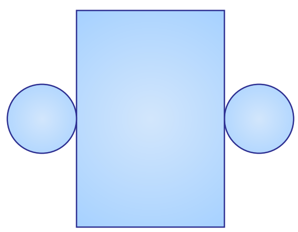
Pirámide
1:______________________
2:______________________
3:______________________
4:______________________

2 Nombre los sólidos que se obtienen con los siguientes desarrollos.

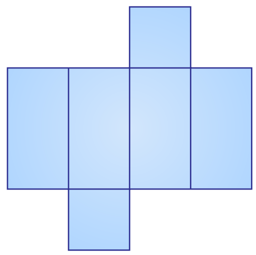
a)



b)

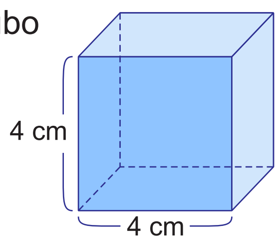


c)

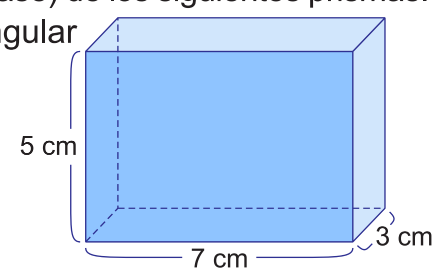


3 Calcule el área total de las superficies (laterales y base) de los siguientes prismas.

a) Cubo

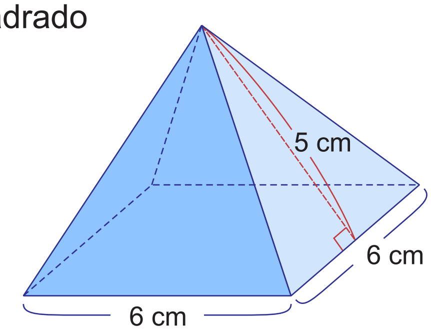


b) Prisma rectangular

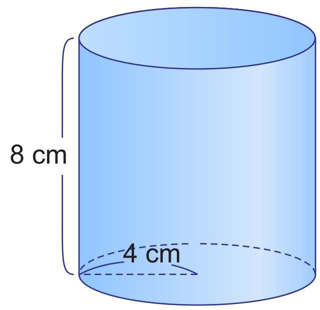


4 Encuentre el área total de las superficies laterales de las siguientes figuras.

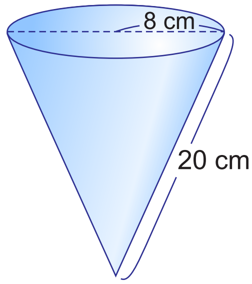
a) La base de la pirámide es un cuadrado



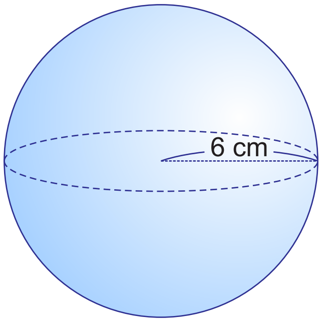
b)



5 Encuentre el área de la superficie lateral del siguiente cono.

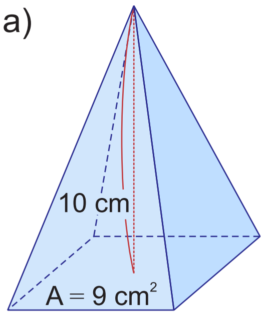


6 Encuentre el área de la superficie de la esfera cuyo radio mide 6 cm.

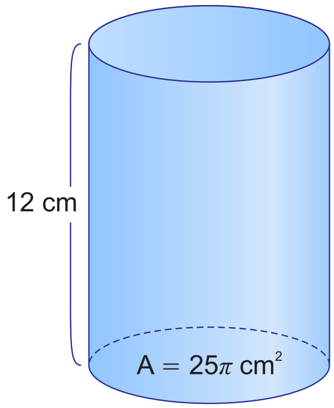


7 Encuentre el volumen de los siguientes sólidos dado el área de la base y su altura.

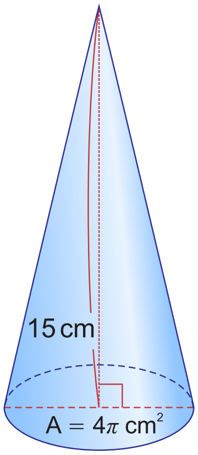
a)



b)

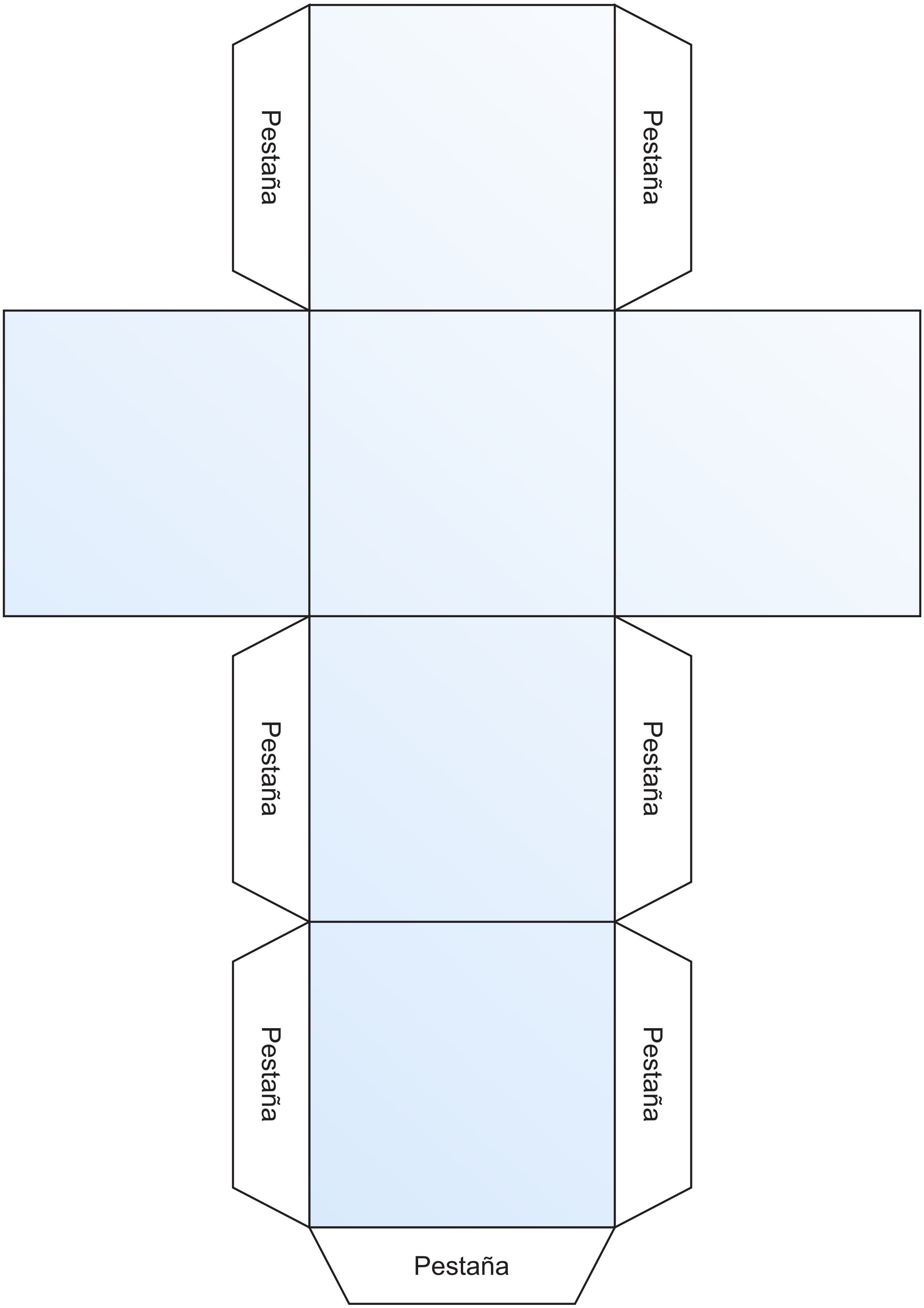


c)

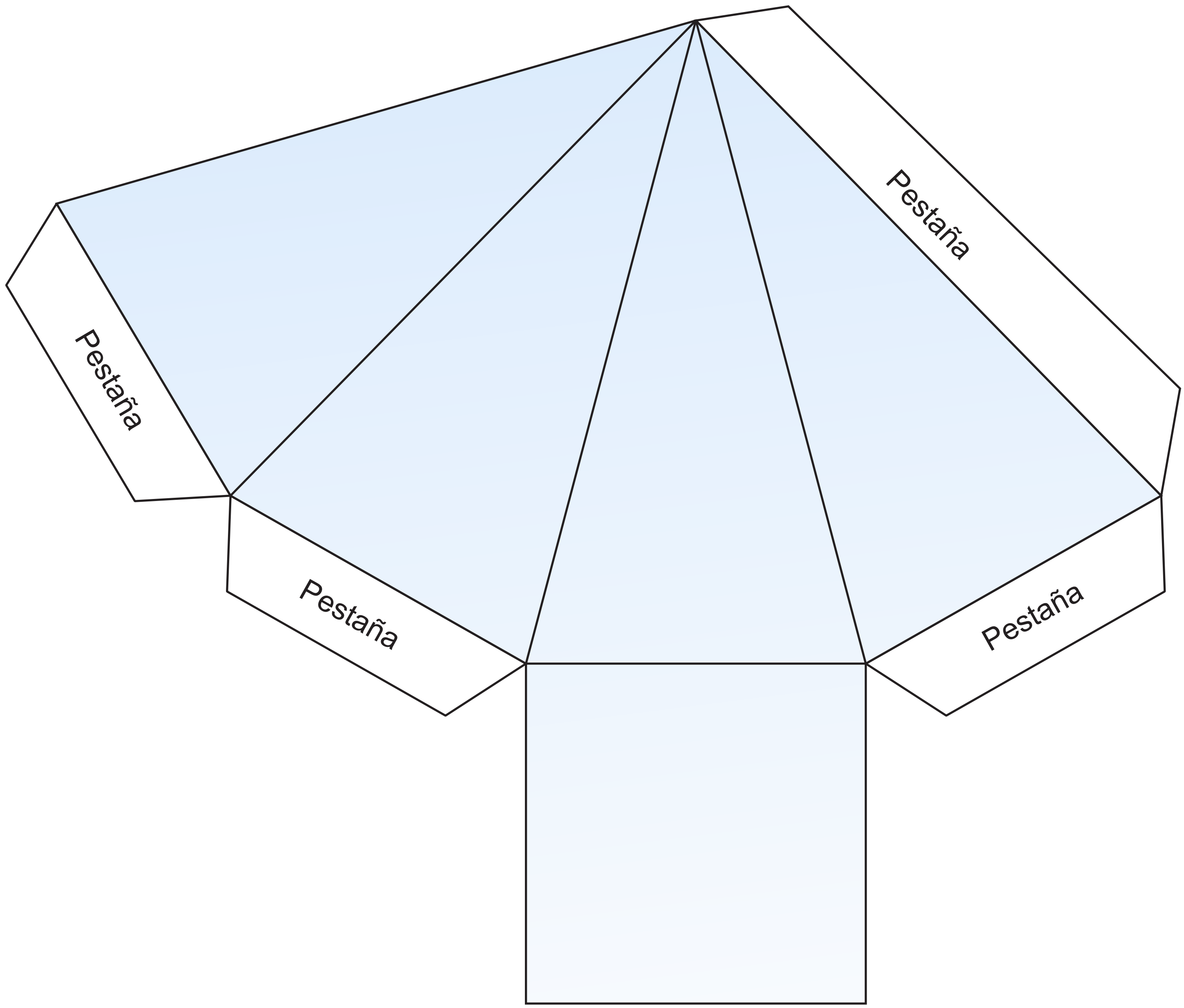


8 Encuentre el volumen de una esfera cuyo radio mide 2 cm.

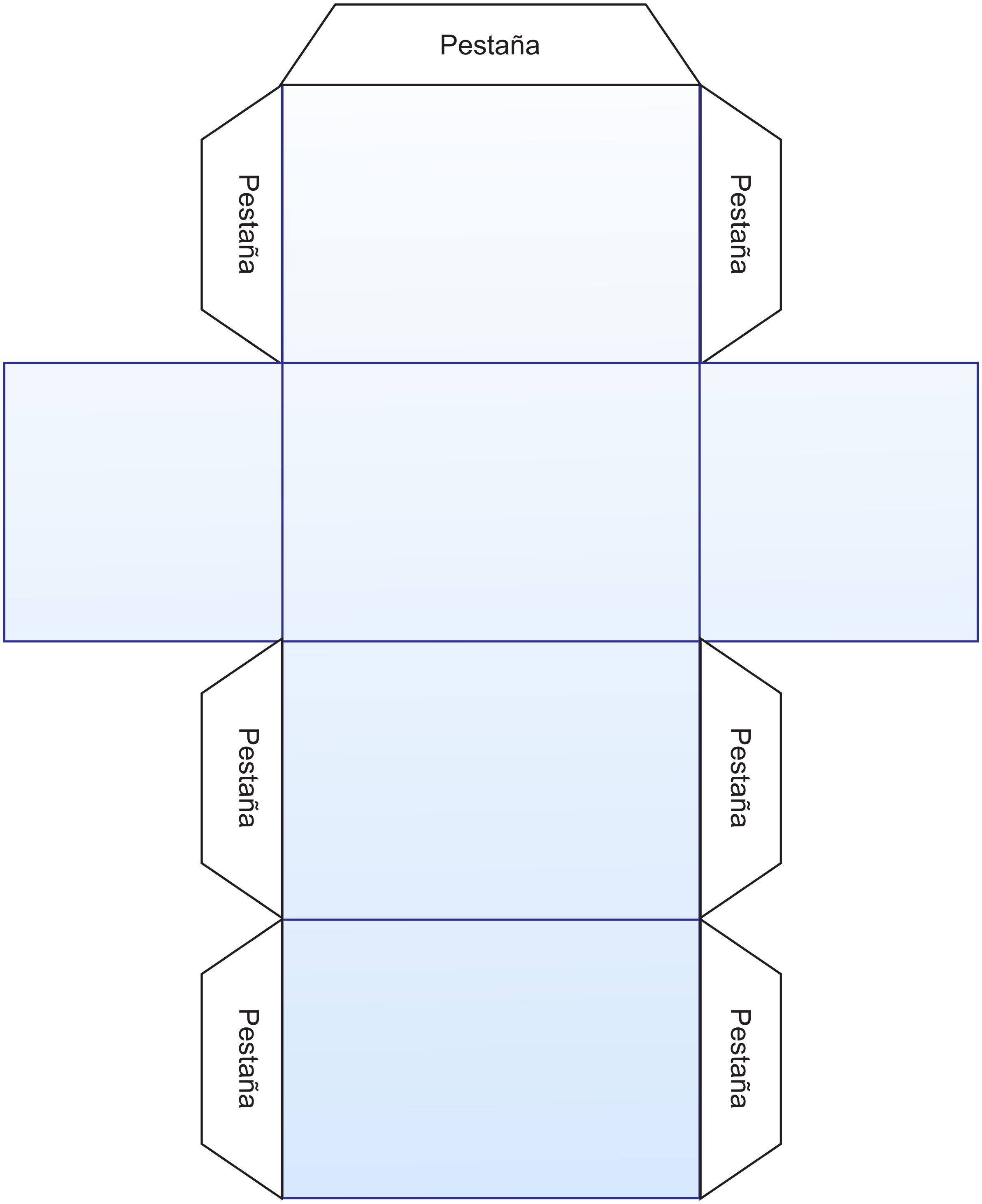
Desarrollo de un cubo



Desarrollo de una pirámide cuadrangular



Desarrollo de un prisma



Unidad 8

Organización y presentación de datos

Lección 1: Organización y presentación de datos

Lección 2: Extracción de la información

Unidad 8 Organización y presentación de datos

Lección 1: Organización y presentación de datos

Sección 1: Tabla de frecuencia

Ejemplo 1.1

Los siguientes datos representan la cantidad de partidos empatados de 10 equipos, en un torneo de apertura de la Liga Nacional de Honduras.
Olimpia 3, Real España 5, Marathón 3, Honduras Progreso 7, Motagua 5, Real Sociedad 3, Platense 7, Juticalpa 5, Social Sol 6 y Vida 3. Realice lo siguiente:

a) Ordene los datos en un arreglo de menor a mayor.
b) Responda las siguientes preguntas:
   b.1) ¿Cuántos equipos obtuvieron 5 empates?
   b.2) ¿Cuántos equipos obtuvieron 6 empates?
c) Ordene los datos en una tabla, con encabezado:

Cantidad de partidos empatados	Cantidad de equipos

Solución:

a) El arreglo de menor a mayor queda de la siguiente manera.
3 3 3 3 5 5 5 6 7 7

b.1) Los equipos que obtuvieron 5 empates según los datos ordenados en el inciso a) fueron 3.

b.2) Solamente un equipo obtuvo 6 empates.

c)

Cantidad de partidos empatados	Cantidad de equipos
3	4
5	3
6	1
7	2
Total	**10**

Observando la tabla, a la cantidad de equipos que empataron 3, 5, 6 y 7 partidos se le llama **frecuencia**.

La frecuencia de los equipos que empataron 3 partidos es 4.
La frecuencia de los equipos que empataron 5 partidos es 3.
La frecuencia de los equipos que empataron 6 partidos es 1.
La frecuencia de los equipos que empataron 7 partidos es 2.

Frecuencia es la cantidad de veces que se repite un dato estadístico.

A la tabla que representa la cantidad de cada valor de los datos se le llama **tabla de frecuencia**.

Ejercicio 1.1 Para cada uno de los siguientes datos hipotéticos complete la tabla de frecuencia. (Con los encabezados de la tabla indicados en cada inciso)

a) Litros de leche diario que proporcionan al ordeñar 10 vacas en una granja.

3 7 5 7 3 8 5 5 8 5

Leche (litros)	Frecuencia (vacas)
Total	

Frecuencia: Cantidad de vacas

b) Cantidad de goles anotados en 18 jornadas de la Liga Nacional de Honduras.

15 10 9 13 14 13 13 15 10 9 18 14 10 13 10 15 14 13

Goles anotados	Frecuencia (jornadas)
Total	

Frecuencia: Cantidad de jornadas

c) Suma de puntos de dos dados lanzados en 20 ocasiones.

2 4 5 6 7 8 4 3 5 6 7 8 9 10 6 7 8 9 10 11

Suma (puntos)	Frecuencia (ocasiones)
Total	

Frecuencia: Cantidad de ocasiones

Cuando la cantidad de datos es grande se deben agrupar si se quiere captar mejor las características de ellos.

Ejemplo 1.2

La lista de la izquierda (**Tabla 1**) muestra los resultados de evaluación de una asignatura en una sección de 40 estudiantes. Complete la **Tabla 2** de la derecha que muestra intervalos de calificaciones de 5 puntos, colocando la cantidad de estudiantes que sacaron la nota comprendida.

Tabla 1

Nº lista	Calificación (puntos)	Nº lista	Calificación (puntos)
1	74	21	79
2	76	22	83
3	80	23	74
4	86	24	78
5	85	25	83
6	91	26	71
7	89	27	77
8	67	28	84
9	70	29	73
10	77	30	76
11	81	31	82
12	74	32	73
13	94	33	78
14	98	34	82
15	89	35	74
16	68	36	73
17	71	37	77
18	78	38	74
19	82	39	79
20	72	40	73

Tabla 2

Calificación (puntos)		Frecuencia (estudiantes)
Mayor o igual que	Menor que	
65	70	
70	75	
75	80	
80	85	
85	90	
90	95	
95	100	
Total		**40**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

Si la cantidad de estudiantes es grande y dispersa es conveniente utilizar intervalos.

Solución:

Para llenar la **Tabla 2**, se deben contar cuantas calificaciones están contenidas en cada intervalo. Ese dato es la frecuencia.

Calificación (puntos)		Frecuencia (estudiantes)
Mayor o igual que	Menor que	
65	70	2
70	75	13
75	80	10
80	85	8
85	90	4
90	95	2
95	100	1
Total		**40**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

En la **Tabla 1** se puede tachar las calificaciones para contar y organizar mejor los datos.

Note que los datos que son mayores o iguales que 70 y menores que 75 son:

74, 70, 74, 71, 72, 74, 71,
73, 73, 74, 73, 74, 73

en total 13, este número representa la frecuencia.

El intervalo mayor o igual que 65 y menor que 70 se expresa como: 65 - 70
A los intervalos 65 - 70, 70 - 75, 75 - 80 ... 95 - 100 se les llama **clase.**
A la cantidad de datos de cada clase también se le llama **frecuencia.**

Otra forma de escribir la **Tabla 2** es:

Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)
65 – 70	2
70 – 75	13
75 – 80	10
80 – 85	8
85 – 90	4
90 – 95	2
95 – 100	1
Total	**40**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

Observe que en las clases el extremo derecho no se incluye dentro del intervalo.

En este libro la expresión 65 – 70 significa que la clase “es mayor o igual que 65” y “menor que 70”.

La frecuencia es el número de datos en cada intervalo por ejemplo:

La frecuencia de la clase 75 – 80 es 10.

La frecuencia de la clase 90 – 95 es 2.

Ejemplo 1.3

Se desea hacer una prueba de un cierto medicamento para personas con edades mayores o iguales que 50 años, para ello se toma una muestra de 40 personas cuyas edades son:

50	60	73	68	78	75	82	84	74	76
62	61	65	79	63	60	69	50	75	78
63	79	60	54	67	61	60	73	82	74
79	68	71	62	75	77	75	66	59	68

Complete la siguiente tabla de frecuencia dadas las clases y responda las preguntas de abajo.

a) ¿Qué clase tiene mayor frecuencia?
b) ¿Qué clase tiene menor frecuencia?
c) ¿Cuántas personas tienen una edad mayor o igual que 70 años?
d) ¿Cuántas personas tienen una edad mayor o igual que 60 y menor que 80 años?

Edad (años)	Frecuencia (personas)
50 – 55	
55 – 60	
60 – 65	
65 – 70	
70 – 75	
75 – 80	
80 – 85	
Total	

Frecuencia: Cantidad de personas

Para llenar la tabla es recomendable tachar los datos ya contados.

Solución:

Al contar los datos que corresponden a cada clase, la tabla queda de la siguiente manera:

Edad (años)	Frecuencia (personas)
50 – 55	3
55 – 60	1
60 – 65	10
65 – 70	7
70 – 75	5
75 – 80	11
80 – 85	3
Total	**40**

Frecuencia: Cantidad de personas

a) La clase con mayor frecuencia es la de 75 – 80 con 11 personas.

b) La clase con menor frecuencia es la de 55 – 60 con 1 persona.

c) Las clases que incluyen a las personas mayores o iguales que 70 años son 70 – 75, 75 – 80 y 80 – 85 con frecuencia de 5, 11 y 3 respectivamente, entonces las personas con edades mayores o iguales que 70 años son: $5 + 11 + 3 = 19$.

Respuesta: 19 personas.

d) Las clases que incluyen las personas con edades mayor o igual que 60 y menor que 80 años son 60 – 65, 65 – 70, 70 – 75 y 75 – 80 con frecuencias 10, 7, 5 y 11 respectivamente. Por lo tanto el total de personas es: $10 + 7 + 5 + 11 = 33$.

Respuesta: 33 personas.

Ejercicio 1.2 Conteste las siguientes preguntas con la información de la **Tabla 2** del Ejemplo 1.2.

a) ¿Qué clase tiene mayor frecuencia?
b) ¿Qué clase tiene menor frecuencia?
c) ¿Qué cantidad de estudiantes obtuvieron calificaciones menores que 70?
d) ¿Qué cantidad de estudiantes obtuvieron calificaciones mayores o iguales que 80 y menores que 100?

Un **histograma** está formado por rectángulos unidos cuya base es igual a la amplitud del intervalo y la altura es igual a la frecuencia.

La tabla de frecuencia (**Tabla 2**) del Ejemplo 1.2 se puede representar en forma gráfica como se muestra a continuación.

Ejemplo 1.4

Represente los datos de la **Tabla 2** del Ejemplo 1.2 mediante un histograma de frecuencia.

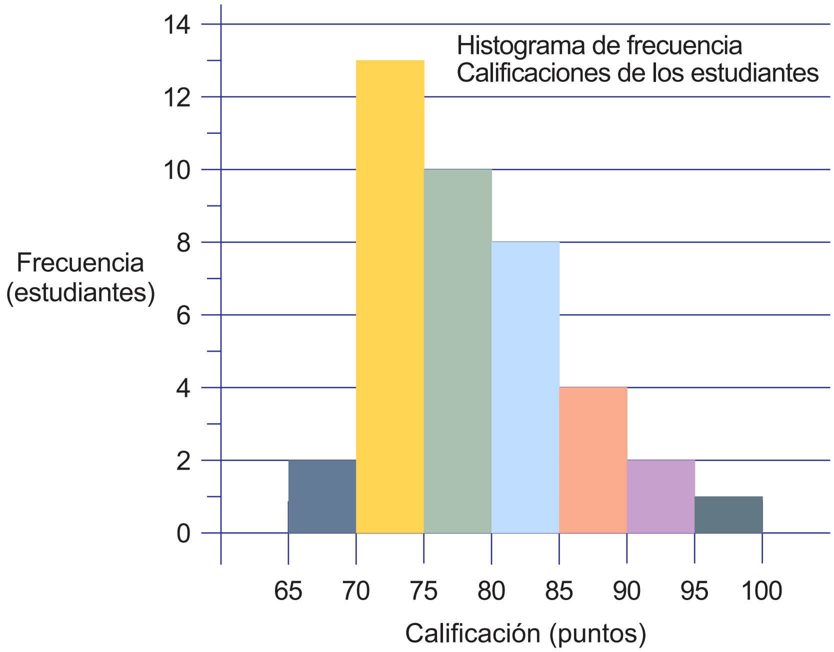
Tabla 2 del Ejemplo 1.2

Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)
65 – 70	2
70 – 75	13
75 – 80	10
80 – 85	8
85 – 90	4
90 – 95	2
95 – 100	1
Total	**40**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

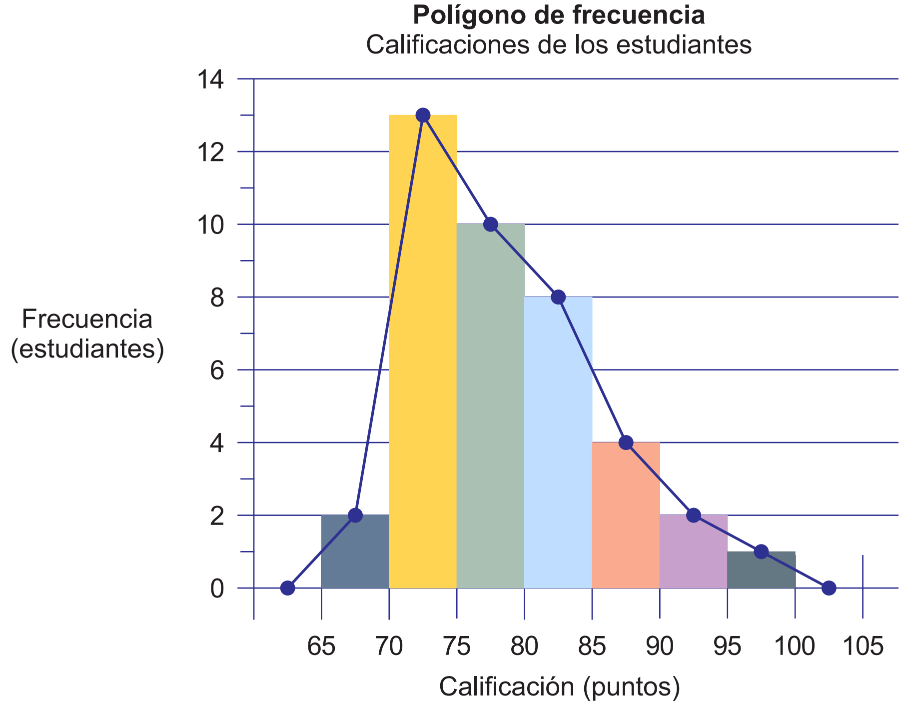
Un histograma es muy similar a una gráfica de barras, la diferencia es que la gráfica de barras compara elementos independientes y el histograma expresa solo un tipo de dato dividido en intervalos.
En el histograma no hay separación entre barras.

Solución:



En un histograma es más fácil identificar cual es la clase de mayor o menor frecuencia.

Uniendo los puntos medios de los lados superiores de las barras en el histograma, agregando una clase más a la izquierda y otra a la derecha con frecuencia 0 se obtiene una línea poligonal cerrada. A este tipo de gráfica se le llama **polígono de frecuencias.**



Al polígono de frecuencia se le agrega una clase antes y una al final, ambas con frecuencia cero, para cerrarlo. Las clases agregadas en este caso son:

	Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)
inicio	60 – 65	0
final	100 – 105	0

Ejercicio 1.3

a) Elabore un histograma de frecuencia con los datos de la siguiente tabla, y luego tomando como base el histograma dibuje el polígono de frecuencia en una misma gráfica.

Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)
30 – 40	3
40 – 50	4
50 – 60	6
60 – 70	9
70 – 80	7
80 – 90	6
90 – 100	5
Total	**40**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

b) Con los datos siguientes complete la tabla de frecuencias, elabore el histograma y el polígono de frecuencia correspondiente.

b1) Temperaturas en grados centígrados en 30 ciudades.

13	14	17	12	16	21	19	14	20	18	20	19	16	20	19
16	14	22	21	20	19	18	17	16	15	14	20	20	19	21

Temperatura (ºC)	Frecuencia (ciudades)
12 – 14	
14 – 16	
16 – 18	
Total	

Pista: Primero llene los espacios en blanco de la clase "Temperatura".

Clase "12 - 14" significa que se incluyen los datos mayores o iguales que 12 y menores que 14, no incluye 14. Se interpreta lo mismo para las demás clases.

Frecuencia: Cantidad de ciudades

b2) Duración en minutos de los capítulos de una serie grabada en 42 discos compactos.

41	45	43	48	42	42	48	44	49	45	50	42	44	41	45	43	47	43	52	51	48
43	41	49	55	69	67	60	49	54	47	43	53	52	56	62	65	42	48	54	60	43

Duración (minutos)	Frecuencia (capítulos)
40 – 45	
45 – 50	
50 – 55	
Total	

Frecuencia: Cantidad de capítulos

Ejemplo 1.5

La tabla de la derecha muestra la cantidad de equipos de sonido vendidos en una semana en las tiendas “A” y “B”. ¿Cuántos equipos de sonido vendió cada tienda en una semana?

Precio (lempiras)	Frecuencia (equipos)	
	Tienda A	Tienda B
1000 – 1500	5	3
1500 – 2000	10	10
2000 – 2500	7	11
2500 – 3000	12	8
3000 – 3500	10	9
3500 – 4000	6	9
Total	**50**	**50**

Frecuencia: Cantidad de equipos de sonido vendidos

Solución:

Cada tienda vendió 50 equipos de sonido.

Considerando los datos de la tabla se puede observar que ambas tiendas vendieron la misma cantidad de equipos de sonido, es decir, tienen la misma frecuencia total, por tanto se pueden comparar los datos.

Ejemplo

- Cuando el precio estaba entre 1000 y 1500 la tienda “A” vendió más equipos de sonido.
- Cuando el precio estaba entre 1500 y 2000 las dos tiendas vendieron la misma cantidad de equipos de sonido.
- Cuando el precio estaba entre 3500 y 4000 la tienda “B” vendió más equipos de sonido.

Ejercicio 1.4 Los datos de la siguiente tabla representan las edades de dos grupos de estudiantes “A” y “B” en un museo.

Edad (años)	Frecuencia (estudiantes)	
	Grupo “A”	Grupo “B”
10 – 12	3	0
12 – 14	12	12
14 – 16	1	4
Total	**16**	**16**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

Con los datos de la tabla, conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Qué grupo tiene más edades en la clase 10 - 12 años?
b) ¿Qué pasa en los grupos respecto a las edades en la clase 12 - 14 años?

Observe que la tabla de la derecha muestra una distribución de frecuencia de las estaturas de los estudiantes de 2 secciones “A” y “B”.
¿Se pueden comparar directamente las frecuencias?
¿Las dos secciones tienen la misma frecuencia total?
No es posible comparar directamente las dos secciones porque la frecuencia total es diferente.
Una forma de comparar las frecuencias es considerar en cada clase la razón:

frecuencia a *total de frecuencia* $\left(\dfrac{\textit{frecuencia}}{\textit{frecuencia total}}\right)$.

A este valor se le llama **frecuencia relativa**.

Estatura (cm)	Frecuencia (estudiantes)	
	Sección “A”	Sección “B”
135 – 140	0	2
140 – 145	1	4
145 – 150	2	7
150 – 155	4	15
155 – 160	8	20
160 – 165	13	16
165 – 170	8	11
170 – 175	3	5
175 – 180	1	0
Total	**40**	**80**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

Frecuencia relativa es el valor que se obtiene dividiendo la frecuencia de cada clase entre la **frecuencia total**.

Cuando se saca la frecuencia relativa generalmente se expresa como número decimal.

$$\textit{Frecuencia relativa} = \frac{\textit{frecuencia del dato}}{\textit{frecuencia total}}$$

Se puede usar calculadora para obtener la frecuencia relativa.

Para calcular la **frecuencia relativa** se debe seguir el siguiente procedimiento:

Estatura (cm)	Sección "A"	Sección "B"
135 – 140	$\frac{0}{40} = 0.0000$	$\frac{2}{80} = 0.0250$
140 – 145	$\frac{1}{40} = 0.0250$	$\frac{4}{80} = 0.0500$
145 – 150	$\frac{2}{40} = 0.0500$	$\frac{7}{80} = 0.0875$
150 – 155	$\frac{4}{40} = 0.1000$	$\frac{15}{80} = 0.1875$
155 – 160	$\frac{8}{40} = 0.2000$	$\frac{20}{80} = 0.2500$
⋮		
175 – 180	$\frac{1}{40} = 0.0250$	$\frac{0}{80} = 0.0000$

Se divide la frecuencia de cada clase entre la suma total de frecuencias.

Para dividir use la calculadora

En este libro se usan hasta cuatro cifras decimales para una mejor aproximación de los valores.

La tabla de la derecha muestra la frecuencia relativa de las secciones "A" y "B". Se le llama **Tabla de frecuencia relativa**.

Estatura (cm)	Frecuencia (estudiantes)		Frecuencia relativa	
	Sección "A"	Sección "B"	Sección "A"	Sección "B"
135 – 140	0	2	0.0000	0.0250
140 – 145	1	4	0.0250	0.0500
145 – 150	2	7	0.0500	0.0875
150 – 155	4	15	0.1000	0.1875
155 – 160	8	20	0.2000	0.2500
160 – 165	13	16	0.3250	0.2000
165 – 170	8	11	0.2000	0.1375
170 – 175	3	5	0.0750	0.0625
175 – 180	1	0	0.0250	0.0000
Total	**40**	**80**	**1**	**1**

Con la calculadora se suman las frecuencias relativas de la secciones "A" y "B".

La suma de todas las frecuencias relativas es 1.

Como la sección "A" y la sección "B" tienen la frecuencia relativa los datos se pueden comparar mediante un polígono de frecuencia relativa.

Ejemplo 1.6

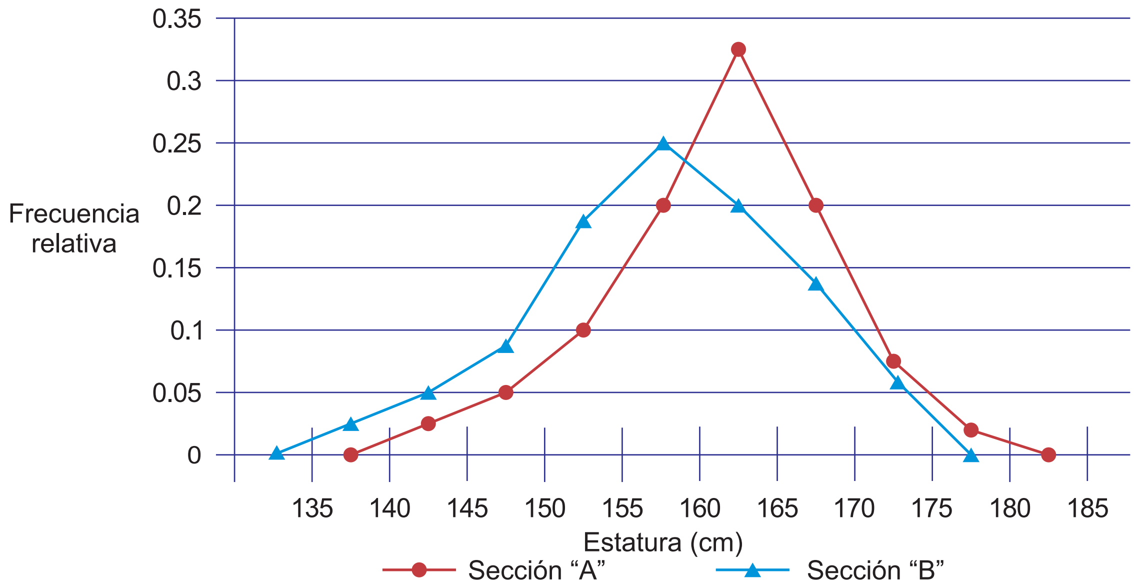
Construya en una misma gráfica el polígono de frecuencia relativa que represente las estaturas (cm) de los estudiantes de las secciones A y B de la página anterior, usando la tabla de frecuencia relativa.

Solución:

Primero escriba las clases en el eje horizontal y la frecuencia relativa en el eje vertical, usando una escala conveniente, en este caso lo haremos de 0.05 en 0.05. Luego considerando el punto medio de cada clase con su respectiva frecuencia relativa marque el punto para trazar después el polígono.

Polígono de frecuencia relativa

Estatura de los estudiantes de las secciones A y B



Observando la gráfica se puede concluir que los estudiantes de la sección “A” tienden a tener estaturas más altas que los de la sección “B”.

Se debe agregar una clase más al inicio y al final con frecuencia relativa 0 para cerrar el polígono.

Ejercicio 1.5 La siguiente tabla muestra las edades de los empleados de dos departamentos A y B de una empresa. Complete la tabla con la frecuencia relativa y trace en una misma gráfica el polígono de frecuencia relativa de cada departamento.

Edad de los empleados

Edad (años)	Frecuencia (empleados)		Frecuencia relativa	
	Departamento A	Departamento B	Departamento A	Departamento B
20 – 22	1	2		
22 – 24	3	1		
24 – 26	5	5		
26 – 28	12	20		
28 – 30	8	6		
30 – 32	4	3		
32 – 34	2	3		
Total	**35**	**40**		

Lección 2: Extracción de la información

Para representar las características o la tendencia de un grupo de datos o comparar los datos de dos o más grupos se utilizan las medidas de tendencia central.

Sección 1: Moda (Para datos no agrupados)

Ejemplo 2.1

En una escuela se realizaron actividades al aire libre. Los estudiantes de una sección decidieron mediante votación cuántas veces lo harán en el año. La siguiente tabla muestra el resultado de la votación. ¿Qué dato de la tabla tiene mayor frecuencia?

Número de veces de actividad al aire libre	Frecuencia (estudiantes)
1	0
2	4
3	2
4	11
5	5
6	7
7	0
8	3
9	1
Total	**33**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

Solución: El valor más frecuente es 4, pues obtuvo 11 votos.

Al dato estadístico que tiene mayor frecuencia se le llama **moda** de la distribución de frecuencia.

La **moda** de una distribución de frecuencias es el dato con mayor frecuencia o dato más frecuente.

Si todos los datos tienen la misma frecuencia la moda no existe.

Ejercicio 2.1 Encuentre la moda de los siguientes conjuntos de datos.

a) La siguiente tabla muestra la cantidad de niños que asistieron a una fiesta de cumpleaños clasificados por edad.

Edad (años)	Frecuencia (niños)
4	2
5	3
6	2
7	5
8	4
Total	**16**

Frecuencia: Cantidad de niños

b) La siguiente tabla presenta las horas de estudio que dedican los estudiantes de 9no grado de un instituto.

Estudio semanal (horas)	Frecuencia (estudiantes)
3	7
5	11
7	5
8	6
Total	**29**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

Ejemplo 2.2

Encuentre la moda del siguiente problema.

La edad en años de un grupo de estudiantes tomados al azar en un centro de Educación Básica.

14	12	16	11	13	18	18	16	16	15	12	13	11	9
12	14	11	15	14	12	15	11	10	9	15	14	18	12

Solución:

Ordene los datos en un arreglo de menor a mayor.

9 9 10 11 11 11 11 12 12 12 12 12 13 13 14 14 14 14 15 15 15 15 16 16 16 18 18 18

La edad que más se repite es 12 con 5 veces, entonces 12 es la moda.

Respuesta: 12 años.

Ejercicio 2.2 Encuentre la moda en los siguientes incisos:

a) Los siguientes datos corresponden a los resultados de una prueba de matemáticas (20 puntos) aplicada a 12 estudiantes de 9no grado.

16 15 19 10 11 15 12 12 15 10 15 14

b) Los datos representan los salarios diarios de 16 trabajadores de albañilería en la construcción de un edificio.

250	200	180	200	180	150	200	250
150	250	200	180	150	250	250	200

Si una distribución de frecuencias tiene dos datos estadísticos con la misma frecuencia siendo esta la mayor, entonces la distribución es bimodal, es decir, tiene dos modas.

Sección 2: Media

En 6to grado aprendimos la siguiente fórmula para calcular la media de un conjunto de valores numéricos.

$$\textit{Media} = \frac{\textit{Suma del valor de los datos}}{\textit{Cantidad de los datos}}$$

La cantidad de los datos es igual al total de la frecuencia.

A la media también se le llama promedio.

Ejemplo 2.3

En la asignatura de Ciencias Naturales un estudiante obtuvo las siguientes notas en cada uno de los 4 parciales:

Parcial	I	II	III	IV
Calificación (%)	80	85	80	75

¿Cuál es la media obtenida por el estudiante en la asignatura de Ciencias Naturales?

Solución:

La suma de las 4 notas se divide entre 4 porque cada dato tiene frecuencia 1 y son 4 datos.

$$\text{Media: } \frac{80 + 85 + 80 + 75}{4} = 80$$

Respuesta: 80%

Ejercicio 2.3

El peso en libras de 5 personas hospitalizadas es el siguiente:

Personas	A	B	C	D	E
Peso (libras)	150	170	140	190	200

Encuentre el promedio (media) en libras.

La media también se puede calcular con datos que se repiten, o datos con frecuencia.

Ejemplo 2.4

En un corral se registró la cantidad de huevos que pusieron las gallinas durante dos semanas. Los datos se resumen en la siguiente tabla de frecuencia.

Cantidad de huevos	Frecuencia (gallinas)
5	1
6	2
7	4
8	6
9	3
10	3
11	1
Total	**20**

Frecuencia: Cantidad de gallinas.

De la información de la tabla se sabe que 2 gallinas pusieron 6 huevos cada una, por lo tanto en lugar de sumar separadamente $6 + 6$ se multiplica 6×2 para calcular la cantidad de huevos que pusieron estas 2 gallinas.

Como en la media se divide entre el total de frecuencia, y en este ejemplo el total de frecuencia es la cantidad de gallinas, entonces se debe dividir entre la suma de las frecuencias que es 20.

Por lo tanto se tiene

$$\text{Media: } \frac{5+6+6+7+7+7+7+8+8+8+8+8+8+9+9+9+10+10+10+11}{1+2+4+6+3+3+1}$$

$$= \frac{(5\times 1)+(6\times 2)+(7\times 4)+(8\times 6)+(9\times 3)+(10\times 3)+(11\times 1)}{20}$$

$$= \frac{5+12+28+48+27+30+11}{20}$$

$$= \frac{161}{20}$$

$$= 8.05$$

$$\textit{Media} = \frac{\textit{Suma del (valor} \times \textit{frecuencia de cada clase)}}{\textit{Suma de las frecuencias}}$$

Ejercicio 2.4

a) En una sección de 9no grado les preguntaron a los estudiantes, ¿cuántos hermanos tienen? La respuesta se resume en la siguiente tabla:

Número de hermanos	Frecuencia (estudiantes)
0	8
1	13
2	14
3	5
Total	**40**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes.

Encuentre la media de hermanos de la sección de 9no grado.

b) En un hospital se registró el peso en libras de niños de 1 año de edad y los resultados fueron los siguientes:

Peso (libras)	Frecuencia (niños)
18	2
19	3
21	5
22	10
Total	**20**

Frecuencia: Cantidad de niños.

Encuentre la media del peso en libras.

Sección 3: Mediana

Para analizar datos estadísticos es necesario calcular otra medida de tendencia central llamada mediana.

La **mediana** es el valor que queda en el centro de un conjunto de datos estadísticos cuando estos se ordenan de menor a mayor.

Ejemplo 2.5

Encuentre el valor de la mediana de los siguientes datos:
6 5 9 10 15 7 12

Solución:
Ordene los datos de menor a mayor así:

5 6 7 9 10 12 15

Después de ordenar los datos, la mediana es el dato que se encuentra en el centro.

Respuesta: La mediana es 9.

Ejercicio 2.5 Encuentre la mediana de los siguientes datos:

a) Cantidad de útiles escolares de 9 estudiantes
5 7 8 8 9 11 12 12 15

b) Peso de 13 alumnos en kg
72 65 71 56 59 63 61 70 52 49 68 55 50

c) Lápices tinta en 13 bolsones escolares
4 2 3 1 0 3 4 2 1 1 3 2 5

Ejemplo 2.6

Encuentre el valor de la mediana de los siguientes datos:
10 13 11 9 20 7 6 4 18 16

Solución:
Se ordenan los datos de menor a mayor:

4 6 7 9 10 11 13 16 18 20

Después de ordenar los datos, la mediana es el promedio de los dos valores que se encuentran en el centro de la distribución.

Mediana: $\dfrac{10+11}{2} = 10.5$

Respuesta: La mediana es 10.5

Cuando hay un número impar de datos en una distribución la mediana es el dato que se encuentra en el centro. Cuando el número es par la mediana es el promedio de los dos datos en el centro.

Ejercicio 2.6 Encuentre la mediana de los siguientes datos:

a) Goles de un equipo de fútbol en 16 partidos.
2 1 1 0 0 4 5 3 4 6 2 3 3 1 0 0

b) Altura en centímetros de 10 alumnos.
153 169 172 158 163 150 165 171 170 163

Ejemplo 2.7

En una empresa 10 empleados tienen los siguientes salarios.

Empleado	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Salario (Lempiras)	10,000	10,500	11,000	10,000	11,000	10,500	10,500	10,500	36,000	36,000

Encuentra la media y la mediana.

Solución:

Media: $\dfrac{10000 + 10500 + 11000 + 10000 + 11000 + 10500 + 10500 + 10500 + 36000 + 36000}{10}$

$= \dfrac{156000}{10} = 15600$

Para calcular la mediana se deben ordenar los datos de menor a mayor (forma creciente):

10,000   10,000   10,500   10,500   10,500   10,500   11,000   11,000   36,000   36,000

Como la cantidad de datos es par:

Mediana: $\dfrac{10500 + 10500}{2} = 10500$

Como la cantidad de datos es par, la mediana es la media de los dos datos centrales.

Respuesta: La media es 15, 600
La mediana es 10,500

De la forma creciente se puede observar que la mayor parte de los datos está entre 10,000 y 11,000. Por lo tanto la mediana representa la tendencia de los datos, es decir que la mayoría de los empleados tienen un salario entre 10,000 y 11,000 lempiras.

En el Ejemplo 2.7 la media está fuertemente influenciada por los datos excepcionalmente altos como son los dos salarios de 36,000.

En conclusión, la media en algunos casos de distribución de frecuencias se ve influenciada por datos extremos muy bajos o muy altos, en este caso muy altos.

La mediana que es 10,500 es un valor cercano a 8 datos de la tabla.

Ejercicio 2.7

Calcula la media y la mediana de los siguientes datos.

a) Coeficiente intelectual de 9 niños.

77   91   85   91   90   92   90   91   85

b) Salarios mensuales de 8 trabajadores de una empresa.

Empleado	A	B	C	D	E	F	G	H
Salario	8,000	8,500	25,000	8,500	8,500	8,000	25,000	8,000

c) Edades de personas en un cine.

4   8   11   13   14   14   15   17   20   24

d) Duración en horas de bombillos de luz eléctrica.

93   87   80   86   87   94   95   103
94   82   86   86   98   94   85

Ejemplo 2.8

De los siguientes datos:

1 3 2 0 4 2 1 4 2 3 0 3 3 2 2 5 2 3 1 2

¿Cuál es la media, la mediana y la moda?

Solución:

a) **Media**

Se realiza lo siguiente:

1) Ordene los datos de menor a mayor.

0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 5

2) Resuma los datos en una tabla de frecuencia.

Dato	Frecuencia
0	2
1	3
2	7
3	5
4	2
5	1
Total	**20**

Frecuencia: Cantidad de datos.

3) Calcule la media.

Para sacar la media se usa la información de la tabla.

$$\text{Media} = \frac{(0\times 2)+(1\times 3)+(2\times 7)+(3\times 5)+(4\times 2)+(5\times 1)}{2+3+7+5+2+1}$$

$$= \frac{0+3+14+15+8+5}{20}$$

$$= \frac{45}{20}$$

$$= 2.25$$

b) **Mediana**

$$\underline{0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2}\ \ 2\ \ 2\ \ \underline{2\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 4\ \ 4\ \ 5}$$

Se toma (o subraya) la misma cantidad de datos a ambos extremos.
Se saca la media de los datos que quedan en el centro.

$$\text{Mediana: } \frac{2+2}{2} = 2$$

c) **Moda**

Para sacar la moda use el inciso a), el dato con mayor frecuencia es 2, que tiene una frecuencia de 7. (El dato de moda)
La moda es 2.

Respuesta: La media es 2.25.
La mediana es 2.
La moda es 2.

Ejercicio 2.8

a) En un examen de matemáticas 5 estudiantes obtuvieron las siguientes calificaciones: Calcule la media, la mediana y la moda.

Estudiantes	A	B	C	D	E
Calificaciones	70	60	60	65	70

b) Encuentre la media, la mediana y la moda de los siguientes datos.

b1) 14 8 20 13 14 4 24 15 17 11 14

b2) 87 83 82 83 83 82 82 82 82 80

c) Encuentre la media, la mediana y la moda del peso en kg de 13 alumnos.

72 65 71 56 72 59 65 70 65 52 56 62 54

d) Encuentre la media, la moda y la mediana en las tablas de frecuencia siguientes.

d1)

Dato	Frecuencia
3	1
5	2
7	3
9	6
11	8
Total	**20**

d2)

Dato	Frecuencia
18	16
21	10
24	7
27	4
30	3
Total	**40**

Recuerda que para obtener la media debes multiplicar cada dato por su frecuencia, luego sumar los resultados y dividir entre el total de frecuencia.

Para sacar la mediana, ubica los datos el número de veces que indica la frecuencia.
Ejemplo: 3 5 5 7 7 7 ...

Ejercicios

1 En los incisos siguientes:

i) Ordene los datos de menor a mayor.
ii) Elabore una tabla de frecuencia.
iii) Responda a la siguiente pregunta: ¿Cuál es el dato más frecuente?

a) Con un grupo de personas de la tercera edad se realizó un estudio de la reacción a cierto medicamento. Las edades de las personas que participaron fueron las siguientes:
65 68 74 78 80 65 78 86 86 86 68 68 86

b) Los siguientes datos representan el número de veces que han ido al cine en el último mes los alumnos de 8vo grado de un instituto.
2 3 0 1 5 3 2 1 0 0 2 1 2 3 5 0 5 4 1 1 1 2 0 1 1

2 Los goles que se han marcado en la última jornada de una liga de fútbol han sido en los siguientes minutos de juego:
20 11 89 3 20 4 2 65 84 29 59 30 89 33 78
54 21 19 60 34 56 63 45 31 26 32 5 78 88 85

Con los datos anteriores dados elabore:
a) Una tabla de frecuencia, con las clases: 0 – 15; 15 – 30; 30 – 45; ...
b) Un histograma.
c) El polígono de frecuencia.

3 Con los datos estadísticos:
5 9 8 8 9 7 1 3 5 3 9 6 9 9 7 5 2 2 7 8 5 7 1 4 6 4 3 8 6 3

Elabore:
a) Una tabla de frecuencia, con las clases: 1 – 3; 3 – 5; 5 – 7; ...
b) El histograma y el polígono de frecuencias en una misma gráfica.

4 La siguiente tabla de datos registra la distribución de las edades de los pacientes hospitalizados en una sala de cirugías.
Elabore el histograma y el polígono de frecuencia.

Edad (años)	Frecuencia (pacientes)
27 – 32	4
32 – 37	6
37 – 42	7
42 – 47	3
Total	**20**

Frecuencia: Cantidad de pacientes

5 Elabore los polígonos de frecuencia relativa de los siguientes datos:

Calificación (puntos)	Frecuencia (estudiantes)	
	Sección "A"	Sección "B"
28 – 30	5	7
30 – 32	3	5
32 – 34	3	3
34 – 36	3	2
36 – 38	1	1
38 – 40	0	4
Total	**15**	**22**

Frecuencia: Cantidad de estudiantes

6 Con los datos:
49 47 45 45 42 48 42 43 45 45 43 44 43 45 43

Realice:
a) Escriba los datos de menor a mayor.
b) Encuentre la media, la mediana y la moda.

7 Encuentre la media, la mediana y la moda de los datos del ejercicio **1** inciso a) y b).

8 Encuentre la media y la moda según la información dada en las tablas de frecuencia.

a)

Años trabajados	Frecuencia (empleados)
5	3
6	7
7	3
8	2
9	5
10	3
11	1
Total	**24**

Frecuencia: Cantidad de empleados

b)

Llegadas tarde (minutos)	Frecuencia (empleados)
15	3
16	3
17	3
18	6
19	9
20	3
21	3
Total	**30**

Frecuencia: Cantidad de empleados

Libro del Estudiante - Matemáticas
Noveno grado de Educación Básica
Se imprimió en imprenta _________________
Su tiraje consta de_______ejemplares
Tegucigalpa, M.D.C.,_______ de 2018

9

MATEMÁTICAS
Libro del Estudiante

ALTAR Q
Monumento de forma cuadrangular, es una escultura tallada en roca de toba volcánica que representa en sus cuatro caras esculpidas a diez y seis personajes, los cuales han sido identificados como los gobernantes de Copán, desde su fundador Yax Kuk Mo, hasta el último gobernante Yax Pasaj Chann Yoppat. Estos personajes se esculpieron sentados uno frente al otro, simbolizando el traspaso de poder, desde el fundador hasta el decimosexto gobernante.
(Descripción facilitada por el Instituto Hondureño de Antropología e Historia)
Fotografía: ©José Antonio Ramos Cartagena

República de Honduras
Secretaría de Educación