VERSIÓN NO VALIDADA

República de Honduras
Secretaría de Educación

LIBRO DEL ESTUDIANTE
MATEMÁTICAS

9no

PROGRAMA DE TELEVISIÓN EDUCATIVA HONDUREÑA

SUYAPA TV EDUCATIVA TELEBÁSICA

Libro del Estudiante Matemáticas

Bibliografía al final de la obra

1.- MATEMÁTICAS-ENSEÑANZA.

PRESENTACIÓN

La Secretaría de Educación y **TELEBÁSICA,** promueven aprendizajes significativos en el Tercer Ciclo de la Educación Básica, con la ayuda de materiales impresos y audiovisuales. Por lo que a continuación, se presenta el libro del estudiante como herramienta base de contenidos para los educandos, por lo tanto, es responsabilidad de los docentes ampliar, enriquecer y aclarar los contenidos que se encuentren desarrollados en el Libro del Estudiante de matemáticas de 9º Grado, que ha sido elaborado de acuerdo a los lineamientos del Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica (DCNEB).

Secretaría de Estado en el Despacho de Educación.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La matemática es una disciplina que sistematiza la capacidad intuitiva del ser humano de poder encontrar las ideas y medias necesarias para resolver problemas. El conocimiento matemático, es un conocimiento esencialmente intuitivo que precisa de la demostración para poder ser explicado y explicitado, convirtiéndose así en conocimiento demostrativo por excelencia.

En la enseñanza, la matemática es una disciplina vinculada al desarrollo de las estructuras del pensamiento lógico, la capacidad de abstracción, a los procesos deductivos e inductivos y a la capacidad de síntesis y análisis. Con la apropiación de procesos y métodos de carácter cuantitativo, simbólico y gráfico, se cuenta con un instrumento de apoyo indispensable para los diferentes campos del saber.

La finalidad de la matemática se halla entonces en la división de las dificultades presentadas como problemas al razonamiento, así como la demostración, aparte de las proposiciones incidentales para reducirlas a los conocimientos intuitivos. Su propósito es el ejercitar esta habilidad del razonamiento de inferir lógicamente la conveniencia manifiesta de las ideas. Como tal, la finalidad de la matemática es la de fundamentar las facultades de la razón humana que es inherente e imprescindible al ser humano.

Lo fundamental en la finalidad de la matemática, es el uso de la inferencia para el desarrollo del razonamiento sobre la base del conjunto, desde el cual pueden preverse, anticiparse y abstraerse las consecuencias de las interrelaciones y estructuras lógicas.

Los objetos de estudio de la Matemática, son conjuntos de objetos (números, figuras, vectores, etc.) y estructuras. Para formalizar el idioma en el cual se describen estos objetos, se utiliza la lógica matemática que permite hacer proposiciones matemáticas, definir reglas para inferir una proposición de otra, analizar formas de proposiciones y desarrollar procedimientos de demostraciones.

Fundamental para la enseñanza de la matemática, es el concepto de números y operaciones entre números. Por eso es tan importante la teoría del Sistema de Números Reales, en la cual se definen los Números Naturales, Enteros, Racionales, Reales. Por su importancia, no solamente en la Matemática sino también en la vida diaria y profesional, esta teoría ocupa un lugar prominente en el programa de estudio de la Educación Básica.

La teoría del Álgebra estudia conjuntos algebraicamente estructurados, es decir, conjuntos con elementos para los cuales se definen operaciones internas y externas (suma, multiplicación), con propiedades especiales (asociativa, conmutativa, distributiva, existencia de elementos neutrales e inversos etc.). El álgebra es importante porque ofrece métodos para la solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, herramientas de suma importancia para las profesiones técnicas. En su nivel más sencillo se introduce el álgebra en el Segundo Ciclo y se amplía en el Tercer Ciclo de la Educación Básica.

Un papel especial juega la Geometría, como teoría que estudia la forma y el tamaño de figuras. La comprensión de sus conceptos facilita a los alumnos y alumnas de la Educación Básica el acceso a la matemática.

En el Tercer Ciclo se combina la Geometría con los números y funciones para presentar en la Trigonometría una herramienta importante de varias profesiones.

La teoría de Estadística Descriptiva y Probabilidad Discreta provee a los alumnos y alumnas conceptos, modelos y herramientas para recolectar, procesar, presentar e interpretar datos, para investigar la probabilidad de eventos y para la comprobación de hipótesis.

La enseñanza de la Matemática juega además un papel como herramienta didáctica para facilitar el aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos. Se integra en los bloques de contenido en la parte metodológica.

Con el estudio de los temas mencionados se pretende que los alumnos y alumnas desarrollarán competencias que les permitirán reconocer y resolver problemas de la vida diaria mediante la aplicación de métodos matemáticos, usando el razonamiento lógico para hacer conclusiones, explicar su pensamiento y justificar sus argumentos y de esta manera ganar confianza para desarrollar sus habilidades de razonar y justificar sus puntos de vista en general.

EXPECTATIVAS DE LOGRO

Al finalizar el Noveno Grado de la Educación Básica los estudiantes:

- Aplican el tanto por ciento y el interés en situaciones de la vida real.
- Resuelven gráfica y algebraicamente inecuaciones lineales en una variable.
- Reconocen situaciones que se pueden describir mediante ecuaciones cuadráticas.
- Resuelven ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado y mediante la fórmula cuadrática.
- Reconocen ecuaciones lineales en dos variables en sus tres formas.
- Grafican ecuaciones lineales en dos variables en el sistema de coordenadas cartesianas.
- Resuelven gráfica y algebraicamente sistemas de dos ecuaciones lineales.
- Construyen tangentes a círculos.
- Construyen polígonos regulares.
- Calculan el perímetro y el área de polígonos regulares.
- Calculan el perímetro y el área de círculos.
- Calculan áreas laterales y volúmenes de poliedros, cilindros y esferas.
- Reconocen la importancia de las medidas de dispersión para clasificar datos.
- Desarrollan el concepto de la probabilidad de eventos iguales, más o menos probables, seguros e imposibles en situaciones del entorno.

SENDEROS DE MATEMÁTICAS

¿Hacia dónde vamos?

En el presente libro de matemáticas de noveno grado se presentan variados temas de los cuatro bloques **(Números y operaciones, Álgebra, Geometría y Estadística descriptiva y probabilidad discreta)** correspondientes a matemáticas según el Diseño Curricular Nacional Básico (DCNB) para el tercer ciclo.

Cada contenido desarrollado en este texto se basa en las programaciones y estándares de la educación básica nacional, es por eso que como estudiante debe prestar mucha atención a cada una de las secuencias desarrolladas ya que luego del desarrollo se evalúa la comprensión del contenido.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Enunciar de forma general los principales temas que se desarrollarán durante el año lectivo.
2. Comprender el uso de la metodología y la forma en que se desarrollan los temas que se basan en las programaciones nacionales para noveno grado.

¿Qué conoce de esto?

A lo largo de la vida de cada ser humano existe una relación muy estrecha con las matemáticas de forma consciente o inconsciente y esto pasa por que las matemáticas están presentes en todas partes, al momento de salir de compras, en la escuela, en los juegos deportivos, en la estructura de las casas, etc. Es por ello que las matemáticas se tienen que estudiar con mucha dedicación y empeño para comprender cada tema. Noveno grado no es la excepción de este estudio es más bien parte fundamental de la educación básica ya que lo prepara a usted como estudiante para ingresar a la educación media y abordar los retos educativos futuros.

¿Cuál es la dificultad?

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿El interés es la utilidad o ganancia que se obtiene al prestar dinero?, ¿Por qué?
2. ¿El método de completación al cuadrado es un método para resolver ecuaciones cuadráticas?
3. ¿Los polígonos son figuras geométricas de muchos lados?

¿Qué piensan otros?

Contenidos de matemáticas

Para noveno grado existe una selección de temas muy variada, como se había dicho se abarcan los cuatro bloques fundamentales en matemáticas. Los contenidos a desarrollar son los siguientes:

- Cálculo de porcentajes
- Interés simple
- Interés compuesto
- Inecuaciones
- Ecuación cuadrática
- Sistema de ecuaciones lineales
- Función lineal
- Grafica de una función lineal
- Ecuación de la recta
- Polígonos
- Circunferencia
- Construcción de polígonos
- Poliedros
- Cuerpos redondos
- Medidas de dispersión
- Técnicas de conteo
- Probabilidad

¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado “**Senderos”** este interesante programa muestra un panorama general sobre la metodología de trabajo que se implementa con el programa de TELEBÁSICA.

¡A trabajar!

En base a los contenidos anunciados para noveno grado en la clase de matemáticas responda las siguientes interrogantes.

1. ¿Cuáles son sus expectativas de la clase en base a los contenidos enunciados en la sección anterior?
2. ¿Cuál de los contenidos enunciados cree usted que será más fácil de abordar en clase?
3. ¿Cuál de los contenidos cree usted que será más difícil de abordar en clase? ¿Por qué?
4. ¿Qué temas cree usted que son necesarios saber para afrontar los nuevos retos educativos de matemáticas en este texto?

¿Qué piensan otros?

La estructura del texto

El libro del estudiante de noveno grado está estructurado de la misma forma que los textos anteriores de séptimo y octavo grado. Cuentan con iconos o símbolos que representan cada uno de los apartados o secciones de la secuencia y que serán utilizados a lo largo del desarrollo de los contenidos de cada una de ellas.

Es importante comprender el significado de cada símbolo para mejorar el rendimiento en las clases y comprender la forma correcta de trabajo con los textos de Telebásica, en este caso el texto de matemáticas de noveno grado. Por tanto, se presenta un breve resumen de cada uno de los iconos de trabajo:

¿Hacia dónde vamos?

Hace una descripción general de los temas con una intención motivadora que informa a los estudiantes de lo que se tratará en la secuencia; además, se presentan los resultados del aprendizaje, para que los estudiantes tengan claridad respecto a lo que lograron al término de las sesiones que integran la secuencia de aprendizaje.

¿Qué conoce de esto?

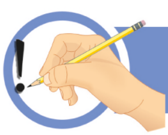
Se busca que los estudiantes recuperen experiencias y/o conocimientos previos con referencia al contenido de la Secuencia. Se invita a una reflexión breve que les permita recordar los conocimientos que ya poseen y/o experiencias relacionadas con el tema.
En ocasiones se les solicita que respondan en su cuaderno, algunas preguntas planteadas en el Libro del Estudiante .

¿Cuál es la dificultad?

Presenta la problematización, consistente en plantear situaciones que requerirán que los estudiantes pongan en juego sus habilidades ante situaciones y/o cuestionamientos específicos; funciona como un incentivador y organizador de todas las actividades de la secuencia; cumple con un sentido motivacional y hace referencia al contenido temático que se busca desarrollar en las sesiones.

¿Qué piensan otros?

Esta sección incluye la información básica para el tratamiento del tema, a través de referencias conceptuales, testimonios, cuadros, artículos, estadísticas, etc.



¡A trabajar!

En esta sección se ubican las actividades sugeridas para el desarrollo de la secuencia.
Se proponen actividades para realizar individualmente o bien para trabajar en equipo o todo el grupo; su propósito es propiciar el análisis y síntesis mediante lecturas de textos, observación de programas televisivos, investigaciones, discusión de situaciones o problemas, etc. En las actividades se remite a los estudiantes a la utilización de otras secciones del Libro del Estudiante, como **¿Qué piensan otros?** y **¡Descúbralo en la tele!** entre otras.

¡Descúbralo en la tele!

Invita e induce a observar el programa de televisión, propone la entrega de contenidos mediante un estímulo audiovisual; asimismo, destaca el propósito del programa televisivo haciendo una breve referencia a los contenidos y sugerencias para la observación activa de los mensajes.

¿Cómo se hace?

Contiene la información procedimental necesaria e indispensable para la realización de diversas actividades, tanto individuales como en grupo, relacionadas con el desarrollo de habilidades y actitudes.

¿Qué dice la ley?

Apartado que hace referencia a artículos relacionados con la legislación, preceptos, reglamentos, reglas gramaticales, teoremas de Ciencias Naturales, Matemáticas, Ciencias Sociales y otras disciplinas.

¡Valorando lo aprendido!

Permite evaluar y valorar el desempeño de los estudiantes al final de la secuencia.
Define los criterios, indicadores y actividades para a apreciar las competencias y/o los productos del aprendizaje. Se incluye actividades que promueven la autoevaluación, las cuales pueden ser utilizadas para la coevaluación.

¡Valorando lo aprendido!

La exploración del texto matemáticas de noveno grado le permitirá a usted tener una visión general de los contenidos que se desarrollarán durante todo el año escolar, por esta razón, es importante que se realice esta actividad de forma individual y siguiendo las instrucciones que a continuación se detallan:

- Revise la portada y contraportada para conocer el nombre del autor, la revisión y validación, el título, editorial y año de publicación.
- Lea la introducción, pues ahí están los motivos por los cuales el texto de matemáticas de noveno grado fue creado.
- Revise el índice, ya que es la presentación de los capítulos y partes que conforman el texto.
- Comprenda la distribución del texto, con los iconos que componen cada secuencia ya que son fundamentales para entender el desarrollo de cada tema.
- Revise el enunciado, ¿Qué dice la ley? En los primeros dos bloques y trate de aprender cada una de las leyes matemáticas.
- Consulte la bibliografía, que es un listado de obras usadas por el autor para construir el texto.
- Revise el tipo de letra del texto y comente con sus compañeros que le parece el tamaño de si es legible o no.
- Observe detenidamente las ilustraciones, diagramas, graficas, figuras geométricas y cuadros resumen que hay en el texto.

BLOQUE I
NÚMEROS Y OPERACIONES

PRESENTACIÓN

En el bloque de Números y Operaciones se amplía el sistema de números hasta los Números Reales con sus operaciones básicas resaltando la aplicación en la resolución de problemas en la vida diaria.

Los estudiantes conocen las relaciones de proporcionalidad como conocimiento fundamental para la aplicación en la solución de problemas de la vida cotidiana. De igual modo, es de suma importancia para resolver problemas propios de la administración, el cálculo de intereses y porcentajes, para tratar problemas de la vida profesional como el Impuesto sobre venta, descuentos, crecimiento porcentual, ahorro de dinero, compra a plazos, salario y sus deducciones, contaduría pública, etc. Estos conocimientos son elementales para la vida de cualquier ciudadano y ciudadana.

Secuencia 1
MÁS ALLÁ DE LOS PORCENTAJES

¿Hacia dónde vamos?

En la vida cotidiana es muy común que se utilice el cálculo de porcentajes de una o más cifras; sea para calcular descuentos, promedios en nuestras clases, impuestos u otras circunstancias.

El porcentaje es un número que se calcula en función a otro principal, dado como una fracción de 100 partes. Es usado para definir relaciones entre dos cantidades: el por ciento (%) de una cantidad se refiere a una parte proporcional de un número, y es muy utilizado como fundamento de decisiones, así como también para entender la magnitud de cambios.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Encontrar el porcentaje de un número dado.
2. Encontrar que por ciento representa un número de otro número dado.
3. Resolver problemas de la vida cotidiana que impliquen el cálculo de diversos porcentajes.

¿Qué conoce de esto?

Recuerde el concepto de porcentaje:

El **porcentaje** es un símbolo matemático, que representa una cantidad dada como una fracción en 100 partes iguales. También se le llama comúnmente tanto por ciento, donde por ciento significa «de cada cien unidades».

¿Cómo podemos calcular el porcentaje de un número dado?
Una forma sencilla de calcular el porcentaje de un numero dado, es seguir los siguientes pasos:

1. Convertir el porcentaje en un número decimal.
   Ejemplo: Dado que 20% es igual a $\frac{20}{100}$, podemos decir que, $20\% = 0.20$ o 0.2

2. Realizar la multiplicación del número entero por el número decimal.
   Ejemplo: $\mathbf{130}$ por 0.2, esto se puede expresar como: $130 \times 0.2 = 26$

3. Si se realiza la multiplicación de forma vertical, se debe mantener el valor posicional.

$$\begin{array}{r} 130 \\ \times \quad 0.2 \\ \hline 026.0 \end{array}$$

¿Cuál es la dificultad?

Responda los siguientes enunciados planteados en esta sección:
1. Calcule el 40% de 100, 150 y 175.
2. Un examen de ciencias naturales tiene un valor de 70 puntos. ¿Qué por ciento representa 55 puntos obtenidos del examen?
3. José recibe una bonificación del 13% de las ventas que realiza. ¿Cuánto tendrá que vender para ganar L.3,600?

¿Qué piensan otros?

Cálculo de porcentajes (%) o Tanto por ciento

Comience realizando ejercicios de cálculos sencillos, tomando en cuenta los pasos que ya conoce.

Calcular el 45 % de 560.

PASO 1

Convertir el porcentaje en un número decimal

Dado que 45% es igual a $\frac{45}{100}$,
podemos decir que, $45\% = 0.45$

PASO 2

Realizar la multiplicación del número entero por el número decimal

560 por 0.45 se puede expresar como: $560 \times 0.45 = 252$

Calcular el 28 % de 620 de forma vertical.

Paso 1:

Dado que **28%** es igual a $\frac{28}{100}$, se puede decir que, **28% = 0.28**

Paso 2:

Realizar la multiplicación del número entero por el número decimal:

$$
\begin{array}{r}
6\,2\,0 \\
\times \quad 0.2\,8 \\
\hline
4\,9\,6\,0 \\
1\,2\,4\,0 \\
\hline
1\,7\,3.6\,0
\end{array}
$$

Tiene 2 cifras decimales

Colocamos el punto para que haya 2 decimales

¿Qué dice la ley?

El cálculo de la multiplicación de números decimales de forma vertical se realiza mediante la siguiente instrucción:

Para realizar multiplicaciones de números decimales por números decimales se realiza la operación como si fuesen números enteros.
En el resultado se separan tantas cifras decimales como decimales tengan entre los dos números.

¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado “**El porcentaje es real”** este interesante programa muestra el cálculo de diversos porcentajes aplicados en la vida cotidiana.

¡A trabajar!

Resuelva en su cuaderno los siguientes problemas y ejercicios de forma clara y ordenada.

a) Calcular el 35% de 750

b) Calcular el 12% de 125

c) En una tienda, una camisa de la selección nacional tiene un valor de L.425.00 sin el impuesto sobre venta, que es de 15% ¿Cuál es el precio final a la hora de pagar la camisa?

¿Qué piensan otros?

Fórmulas en el cálculo de porcentajes

En general para realizar el cálculo de porcentajes de un número dado se realiza el planteamiento de la fórmula siguiente:

Fórmula del cálculo de un número que representa un porcentaje de otro número.

Si tenemos el número A dado y hay que calcular el número B que representa P porciento de A, entonces;

$$B = \frac{A \times P}{100\%} \quad \text{es decir} \quad \text{"parte"} = \frac{\text{"total"} \times \text{"parte en \%"}}{100\%}$$

Ejemplos:

En un grupo de clase hay 30 personas, 10% de las cuales son mujeres.

¿Cuántas mujeres hay en el grupo?

Paso 1:

Identificar A, P y B

A: 30 personas

P: 10%

B: La cantidad de mujeres

Paso 2:
La cantidad de mujeres

Resultado: En el grupo hay 3 mujeres. $= \frac{30 \cdot 10\%}{100\%} = 3$

Papá depositó L. 4,000.00 en el banco bajo 12% de interés anual. ¿Qué ingreso obtendrá la familia dentro de un año?

Paso 1:
Identificar A, P y B

A: Deposito de L. 4,000.00
P: 12%
B: Ingreso obtenido

Paso 2:
Ingreso obtenido

$$= \frac{4000 \cdot 12\%}{100\%} = 480$$

Resultado: La familia obtendrá L. 480.00 de ingreso.

Cálculo del número inicial por el porcentaje dado del número

Fórmula del cálculo de número a través de su porcentaje.
Si se tiene el número B que representa P por ciento del A y hay que calcular el número A, entonces;

$$A = \frac{B \times 100\%}{P} \quad \text{es decir} \quad \text{"total"} = \frac{\text{"parte"} \times \text{"100\%"}}{\text{parte en \%}}$$

Ejemplos:

En una fábrica trabajan 270 hombres. Es el 30% de todos los obreros. ¿Cuántas personas trabajan en esta fábrica?

Solución.

$$\frac{270 \cdot 100\%}{30\%} = 900$$

Resultado: En la fábrica trabajan 900 obreros.

¿Cuánto dinero hay qué depositar bajo 10% de interés anual para obtener el ingreso de L. 1,000.00 en un año?

Solución.

$$\frac{1000 \cdot 100\%}{10\%} = 10{,}000$$

Resultado: hay que depositar L. 10,000.00

¿Qué dice la ley?

Siempre que se divide porcentajes entre porcentajes, hay que tener presente que el símbolo % se cancela.

¡A trabajar!

Resuelva en grupo los siguientes problemas y discútalos en el salón de clases.

a) Mi hermana me prestó L. 1,500.00 al 10% de interés mensual. ¿Cuánto debo pagar de interés al terminar el mes?

b) Compré un refresco a L. 17.00 y una galleta a L. 12.00 en una cafetería sin impuestos sobre venta, si a los productos se les cobra el 15% de isv. ¿Cuánto tengo que pagar de impuesto por llevar ambos productos?

c) En una fábrica de zapatos trabajan 420 mujeres. Es el 25% de todos los obreros. ¿Cuántas personas trabajan en esta fábrica?

d) ¿Cuánto dinero hay qué depositar bajo 15% de interés anual para obtener el ingreso de L. 3,000.00 en un año?

e) En un aula de clases hay 40 niños, ellos representan el 10% de la población de una escuela. ¿Cuántos niños hay en total en dicha escuela?

¿Qué piensan otros?

Cálculo del porcentaje que representa un número del otro

Fórmula del cálculo de porcentaje que representa un número del otro.

Se tiene dados dos números A y B y hay que calcular cual el porcentaje que representa B de A, entonces;

$$P = \frac{B}{A} \times 100\% \quad \text{es decir} \quad \text{"parte en \%"} = \frac{\text{"parte"} \times \text{"100\%"}}{\text{total}}$$

Ejemplos:

- En la librería un libro cuesta 40 lempiras y en el mercado 38 lempiras. Calcular el porcentaje que representa el costo del libro en el mercado con respecto al costo en la librería.

$\frac{38 \cdot 100\%}{40}$	= 95%

Solución.

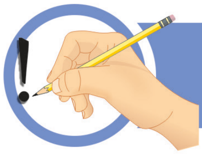
Resultado: Es decir que el libro en el mercado cuesta el 95% de lo que cuesta en la librería.

Un examen de ciencias naturales tiene un valor de 70 puntos. ¿Qué por ciento representa 55 puntos obtenidos del examen?

Solución.

$\frac{55 \cdot 100\%}{70}$	= 78.57%

Resultado: Eso quiere decir que si obtiene 55 puntos del examen es equivalente a decir que se obtuvo el 78.57% del valor total del examen.



¡A trabajar!

Resuelva los siguientes problemas y ejercicios en el salón de clases.

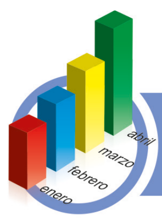
a) Calcular el porcentaje que representa el número 5 del 40.

b) Calcular el porcentaje que representa el número 33 del 128.

c) Calcular el porcentaje que representa el número 150 del 300.

d) En un colegio, 48 estudiantes practican deporte, el colegio tiene 240 estudiantes. ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes que practican deporte?

e) Un obrero de una empresa constructora gana L.10,000.00 al mes, mientras que el ingeniero encargado de la obra gana L. 23,000.00 ¿Cuál es el porciento que gana el obrero respecto al salario del ingeniero?



¡Valorando lo aprendido!

En esta sección se integrarán los conocimientos de forma puntual que se han desarrollado hasta este momento.

El cálculo de porcentajes o tanto por ciento

- **Sirve para:** **Calcular el porcentaje de un número dado.**
- **Sirve para:** **Calcular el número a través de su porcentaje.**
- **Sirve para:** **Calcular el porcentaje que representa un número del otro.**

Actividad: En grupos de trabajo inventar tres problemas, aplicando cada una de las situaciones antes mencionadas, resolverlos y exponerlos en el aula de clases. Todo el trabajo se debe realizar en el cuaderno de trabajo de matemáticas.

Secuencia 2
¡QUÉ INTERÉS!

¿Hacia dónde vamos?

Por lo general si se le presta dinero a alguien, se espera que lo devuelva al cabo de un tiempo, y también se espera una compensación por el préstamo, ya que se hubiese podido gastar el dinero prestado en otras cosas.

También, al prestarle dinero a alguien, se está asumiendo riesgos, como que se demoren en pagar o no se pague el préstamo, o que cuando se devuelva el dinero no alcance para comprar lo que se podía comprar con él cuando lo cedió en préstamo, por esto mismo, también se espera una compensación.

La compensación que se espera es el interés, y este se fija a través de una tasa que por lo general es expresada en un porcentaje. Este se calcula teniendo en cuenta la cantidad de dinero, el tiempo durante el cual es prestado y el riesgo que asume la persona o entidad que presta el dinero.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Aplicar correctamente la fórmula para el cálculo del interés simple y compuesto.
2. Calcular el interés compuesto en intervalos iguales de tiempo y constituir un nuevo capital.
3. Resolver problemas de la vida cotidiana que impliquen el cálculo de interés simple y compuesto.

¿Qué conoce de esto?

El Interés es la utilidad o ganancia que se obtiene al prestar dinero.

Ejemplo.

a) Mi papá me prestó L. 600 al 7% de interés simple anual durante 5 años.
¿Cuánto es el interés que debo pagar en total?

Paso 1:

Para resolver el problema se enlistan los datos que se proporcionan:
Tasa de interés: 7% anual
Tiempo: 5 años
Cantidad recibida en concepto de préstamo L. 600 (Capital)

Paso 2:

Se calcula el interés a pagar:
En un año el interés es de: $I{:}600\times0.07=42$
En cinco años el interés es de: $I{:}600\times0.07\times5=210$

R: El interés que debo pagar al finalizar los 5 años es de L. 210
¿Cuánto tengo que pagar en total al finalizar los 5 años?

R: L. 810, ya que estoy pagando el capital más el interés.

¿Cuál es la dificultad?

Responda los siguientes enunciados o preguntas de esta sección:

1. Describa las ventajas y desventajas que usted cree que se tienen al prestar dinero.

2. ¿Cuánto se debe pagar en total si se saca un préstamo de L7,500 en un banco al 13% de interés simple anual durante 8 años?

3. José le presto a su amigo L. 5,200 por un plazo de 18 meses al 6% de interés mensual. ¿Cuánto recibirá José por concepto de interés al finalizar los 18 meses?

4. Realice el cálculo de interés que generan L. 350,000 prestados al 10% de interés simple durante 9 años. ¿Cuánto pagará el prestatario al final de los 9 años?

¿Qué piensan otros?

Interés Simple

$I=Crt$; donde $I=$ interés, $C=$ capital,
$r=$ tasa de interés y $t=$ tiempo o número de períodos.

Para facilitar el cálculo del interés simple en diversas circunstancias, se plantean las siguientes fórmulas sugeridas:

$$\textbf{Interés} = \textbf{Capital} \times \frac{\textbf{tasa \%}}{\textbf{100}} \times \textbf{t(años)}$$ Si la tasa anual se aplica por años.

$$\textbf{Interés} = \textbf{Capital} \times \frac{\textbf{tasa \%}}{\textbf{100}} \times \frac{\textbf{t(meses)}}{\textbf{12}}$$ Si la tasa anual se aplica por meses.

$$\textbf{Interés} = \textbf{Capital} \times \frac{\textbf{tasa \%}}{\textbf{100}} \times \frac{\textbf{t(días)}}{\textbf{365}}$$ Si la tasa anual se aplica por días

Ejemplo:
Calcular el interés simple producido por 30,000 lempiras durante 90 días a una tasa de interés anual del 5 %.

$$\textbf{Interés} = \textbf{Capital} \times \frac{\textbf{tasa \%}}{\textbf{100}} \times \frac{\textbf{t(días)}}{\textbf{365}}$$ si la tasa anual se aplica por días

Solución:
Identifique la fórmula a aplicar:

El 5% se expresa en decimal, y se obtiene 0.05

$$I = 30{,}000 \times 0.05 \times \frac{90}{365} = 369.86$$

Respuesta
El interés simple producido al cabo de 90 días es de 369.86 lempiras.

¿Qué dice la ley?

El interés simple es directamente proporcional al tiempo y al capital, es decir, a mayor tiempo (o capital) mayor interés.

¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**Interés aplicado"** este interesante programa muestra el cálculo del interés simple y compuesto aplicado en la vida cotidiana.

¡A trabajar!

Resuelva en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada los problemas planteados:

1. Al cabo de un año, un banco ha ingresado en una cuenta de ahorro, en concepto de intereses, 970 lempiras. La tasa de interés de una cuenta de ahorro es del 2 %. ¿Cuál es el saldo medio (capital) de dicha cuenta en ese año?

2. Por un préstamo de 20,000 lempiras se paga al cabo de un año 22,400 lempiras. ¿Cuál es la tasa de interés cobrada?

3. Un capital de 300,000 lempiras invertido a una tasa de interés del 8 % durante un cierto tiempo, ha supuesto unos intereses de 12,000 lempiras. ¿Cuánto tiempo ha estado invertido?

4. Calcular a cuánto asciende el interés simple producido por un capital de 25,000 lempiras invertido durante 4 años a una tasa del 6 % anual.

¿Qué piensan otros?

Interés Compuesto

El **interés compuesto** representa el **costo del dinero, beneficio** o **utilidad** de un **capital inicial** (**Co**) o principal a una **tasa de interés** (**i**) durante un **período** (**t**), en el cual los intereses que se obtienen al final de cada período de inversión no se retiran, sino que se reinvierten o añaden al capital inicial; es decir, se **capitalizan,** produciendo un **capital final** (**C_f**).

Para un período determinado sería

Capital final (C_f) = capital inicial (Co) más los intereses.
Si hace una generalización el interés compuesto sería:

$\boldsymbol{C_f = C_o(1+i)^t}$; donde $\boldsymbol{C_f}$ = Capital final al termino de $\boldsymbol{t}$ períodos
$\boldsymbol{C_o}$ = capital inicial
$\boldsymbol{i}$ = tasa de interés
$\boldsymbol{t}$ = tiempo o número de períodos.

Ejemplo:
Averiguar en qué se convierte un capital de 1,200,000 lempiras al cabo de 5 años, y a una tasa de interés compuesto anual del 8 %.

Para resolver este ejercicio se utiliza la formula $\boldsymbol{C_f = C_o(1+i)^t}$ y se remplazan los valores conocidos:

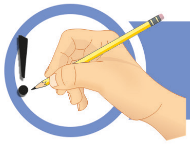
Tasa de interés $\boldsymbol{i} = 8\% = \frac{8}{100} = 0.08$

Capital inicial $\boldsymbol{C_o} = 1{,}200{,}000$

Tiempo en años $\boldsymbol{t} = 5$

$$C_f = 1{,}200{,}000(1+0.08)^5$$
$$C_f = 1{,}200{,}000(1.08)^5$$
$$C_f = 1{,}200{,}000 \times 1.4693280$$
$$C_f = 1{,}763{,}194$$

Respuesta:
El capital final es de 1,763,194 lempiras.



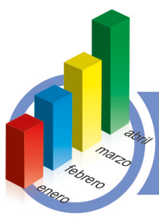
¡A trabajar!

Resuelva en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada los problemas planteados:

1. Un cierto capital invertido durante 7 años a una tasa de interés compuesto anual del 10 % se ha convertido en 1,583,945 lempiras. Calcular el capital inicial, sabiendo que los intereses se han pagado anualmente.

2. Calcular la tasa de interés compuesto anual que se ha aplicado a un capital de 1,500,000 lempiras para que al cabo de 4 años se haya convertido en 2,360,279 lempiras.

3. Suponer que se pretende tener L. 2,000,000 dentro de 5 años. Si el banco paga una tasa de 10% anual ¿cuánto se necesita como capital inicial?



¡Valorando lo aprendido!

En general, si se conoce el capital final o valor futuro y se quiere conocer el capital inicial o valor presente: Como se sabe que si se multiplica un valor presente (C_o) por $(1+i)^t$ da el valor futuro o capital final (C_f), se puede dividir directamente el capital final (C_f) por la tasa de interés compuesta $(1+i)^t$ para obtener el valor presente o actual.

Resolver un caso:

¿Cuánto hay que invertir ahora para tener L. 10,000,000 dentro de 10 años al 8% de interés?

A partir de la fórmula $C_f = (1+i)^t$ despejando se obtiene: $C_o = \dfrac{C_f}{(1+i)^t}$

Luego simplemente se reemplazan los valores conocidos y con esto se encuentra la respuesta.

Secuencia 3

VALORANDO LO QUE APRENDO

¿Hacia dónde vamos?

El bloque de números y operaciones comprende un concepto fundamental de la Matemática para representar formalmente regularidades, ordenar, clasificar y describir cuantitativamente relaciones entre números.

En noveno grado se comienza con el cálculo de porcentajes y tal contenido nos lleva a trabajar de forma correcta en el cálculo del interés simple y compuesto.

En esta secuencia se repasarán conceptos básicos de ambos temas para certificar los conocimientos aprendidos.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Aplicar correctamente el uso de las fórmulas de interés simple e interés compuesto en la solución de ejercicios y problemas.
2. Resolver ejercicios en los que se aplique el cálculo de interés simple y compuesto.

¿Qué conoce de esto?

En esta secuencia se presenta un resumen fundamental que servirá como retroalimentación de los contenidos abordados en el bloque de números y operaciones de noveno grado.

Los conocimientos básicos aprendidos en el bloque van desde el cálculo de porcentajes en diversas circunstancias hasta el cálculo del interés simple e interés compuesto. Todos estos conocimientos son de vital importancia para resolver problemas en la asignatura de matemáticas del noveno grado, además, son conocimientos que sirven para ser aplicados en la vida cotidiana.

Fórmulas en el cálculo de porcentajes

En general para realizar el cálculo de porcentajes de un número dado se realiza el planteamiento de la fórmula siguiente:

Si se tiene el número A dado y hay que calcular el número B que representa P porciento de A, entonces;

$$B = \frac{A \times P}{100\%} \quad \text{es decir} \quad \text{"parte"} = \frac{\text{"total"} \times \text{"parte en \%"}}{100\%}$$

Fórmula del cálculo de número a través de su porcentaje.
Si se tiene el número B que representa P por ciento del A y hay que calcular el número A, entonces;

$$A = \frac{B \times 100\%}{P} \quad \text{es decir} \quad \text{"total"} = \frac{\text{"parte"} \times \text{"100\%"}}{\text{parte en \%}}$$

Fórmula del cálculo de porcentaje que representa un número del otro.
Se tiene dados dos números A y B y hay que calcular cual es el porcentaje que representa B de A, entonces;

$$P = \frac{B}{A} \times 100\% \quad \text{es decir} \quad \text{"parte en \%"} = \frac{\text{"parte"} \times \text{"100\%"}}{\text{total}}$$

Tipos de intereses

Tipos de intereses

Interés simple

$\boldsymbol{I = Crt}$; donde:

$\boldsymbol{I}$ = interés,

$\boldsymbol{C}$ = capital,

$\boldsymbol{r}$ = tasa de interés

$\boldsymbol{t}$ = tiempo o número de períodos.

Interés compuesto

$\boldsymbol{C_f = C_o(1+i)^t}$; donde:

$\boldsymbol{C_f}$ = Capital final al termino de $\boldsymbol{t}$ períodos

$\boldsymbol{C_o}$ = capital inicial

$\boldsymbol{i}$ = tasa de interés

$\boldsymbol{t}$ = tiempo o número de períodos.

¡Valorando lo aprendido!

Comprenda el proceso de solución en los ejercicios planteados en esta sección:

1. Calcular el interés simple producido por 23,750 lempiras durante 3 años a una tasa de interés anual del 17 %.

Resolución:
Identifique la fórmula a aplicar:

$$\textbf{Interés} = \textbf{Capital} \times \frac{\textbf{tasa }\%}{\textbf{100}} \times \textbf{t(años)}$$

El 17% se expresa en decimal, y se obtiene 0.17

$$\boldsymbol{I} = 23{,}750 \ \text{x}\ 0.17 \ \text{x}\ 3 = 12{,}112.5$$

Respuesta

El interés simple producido al cabo de 3 años es de 12,112.5 lempiras.

2. Si se obtiene un préstamo de L. 7,712 y después de 6 meses se pagan L. 9,408 Determinar el interés y la tasa de interés.

Resolución:

Interés $= 9{,}408 - 7{,}712 = 1{,}696$

$$\mathbf{I = Crt} \quad \rightarrow \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{I}}{\boldsymbol{Ct}}$$

$$r = \frac{1696}{(7{,}712)(\frac{6}{12})} \quad \rightarrow \quad r = \frac{1696}{(7{,}712)(\frac{1}{2})} = \frac{1696}{3856} = 0.44$$

Respuesta

» El interés es de L. 1,696

» La tasa de interés es del 44%

BLOQUE II
ÁLGEBRA

PRESENTACIÓN

En el bloque del Álgebra, los estudiantes abordan estudios sobre los polinomios y sus operaciones, ecuaciones e inecuaciones lineales y cuadráticas de una variable y sus transformaciones. Además, aprenden a resolver sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales y no lineales en dos variables, sin olvidar el estudio que se realiza sobre las gráficas de funciones lineales, pendientes y otros elementos fundamentales en el estudio del álgebra de noveno grado. Estos conocimientos tienen una amplia aplicación en la vida profesional y en las carreras técnicas que presentan los diversos centros de estudios.

Secuencia 1
DESIGUALDADES CON INCÓGNITA

¿Hacia dónde vamos?

Se supone que ya se conocen los símbolos “>” (mayor que), “<” (menor que), “≥” (mayor o igual que) y “≤” (menor o igual que) que se usan para relacionar un número con otro.

Se escribe, por ejemplo, $4 > -1$ para señalar que 4 es mayor que –1. También se puede escribir $-2 < 3$ para señalar que –2 es menor que 3. Ejemplos como estos se conocen como desigualdades.

Sabido esto, se dirá que una inecuación es el enunciado de una desigualdad que incluye alguna de las siguientes relaciones de orden: “mayor que” (>); “menor que” (<); “mayor o igual que” (≥), y “menor o igual que” (≤). En la desigualdad aparece al menos una incógnita o valor desconocido y que se cumple para ciertos valores de ella.

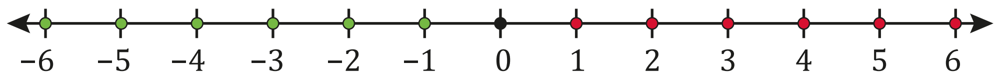
RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Definir correctamente el significado de una inecuación.
2. Expresar situaciones de la vida cotidiana como inecuaciones.
3. Establecer relaciones entre $a < b$ y $a - b < 0$.

¿Qué conoce de esto?

Los números enteros están ordenados de forma que, de dos números representados gráficamente, es mayor el que está situado más a la derecha, y menor el situado más a la izquierda.



Ejemplos:

$5 > 3 \longrightarrow$ 5 es mayor que 3.
$-10 < -7 \longrightarrow -10$ es menor que -7.

Criterios para ordenar los números enteros

1. Todo número negativo es menor que cero. $-7 < 0$

2. Todo número positivo es mayor que cero. $7 > 0$

3. De dos enteros negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto. $-7 > -10$
$|-7| < |-10|$

4. De los enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto. $10 > 7$
$|10| > |7|$

¿Cuál es la dificultad?

Complete el siguiente cuadro de forma clara y ordenada en su cuaderno de trabajo:

Frase	Desigualdad
"*a* es más que *b*"	
"*a* es por lo menos *b*" o "a es más que b"	
"*a* es menos que *b*"	
"*A* ES POR LO MENOS *B*" O "*A* NO ES MENOS QUE *B*"	

¿Qué piensan otros?

Introducción a las inecuaciones

Usted se encuentra con desigualdades matemáticas casi todos los días, pero tal vez no las nota porque le son familiares. Piense en las siguientes situaciones: Límites de velocidad en la autopista, pagos mínimos en las tarjetas de crédito, el número de mensajes de texto que se pueden enviar desde su celular cada mes, el tiempo que le toma llegar a la escuela. Todas estas pueden ser representadas como desigualdades matemáticas. Y, de hecho, usted usa pensamiento matemático cuando considera éstas situaciones cada día.

Situación	Desigualdad Matemática
Límite de velocidad	Velocidad legal en la autopista ≤ 80 kilómetros por hora
Tarjeta de crédito	Pago mensual ≥ 10% de tu balance en el ciclo de tu factura
Mensajes de texto	Número de mensajes permitido al mes ≤ 250
Tiempo de viaje	Tiempo necesario para caminar hasta la escuela ≥ 18 minutos

Ejemplos:

Inecuaciones: Son desigualdades en las que aparecen letras y números con las operaciones usuales. Las letras son las variables o incógnitas de las inecuaciones. Las inecuaciones se clasifican atendiendo al número de incógnitas y al grado de la expresión algebraica que aparece en ellas.

Una inecuación puede ser verdadera o falsa.
a) $9 > 6$ **verdadera**
b) $7 < 3$ **falsa**
c) $8 \geq 5$ **verdadera**
d) $2 \leq 2$ **verdadera**

Expresar las siguientes situaciones con una inecuación:
1) Cuando cobraron 50 lempiras en concepto de admisión a x estudiantes se recaudaron más de 1000 Lempiras.

Inecuación: $50x > 1000$

2) Lorena tiene 20 años menos que Andrea. Si las edades de ambas, suman menos de 86 años. ¿Cuál es la máxima edad que podría tener Lorena?

Lorena: $A - 20$
Andrea: A

Inecuación: $A - 20 + A < 86$

¿Qué dice la ley?

Los símbolos que se utilizan para designar las desigualdades son:

<	: "menor que"	**≤**	: "menor o igual que"
>	: "mayor que"	**≥**	: "mayor o igual que"

¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado “**Desigualdades con incógnita”** este interesante programa muestra el planteamiento de situaciones de la vida cotidiana en inecuaciones, y destaca la importancia de las inecuaciones en la vida diaria.

¡A trabajar!

1. Mencione si las siguientes inecuaciones son verdaderas o falsas.

a) $9 < 9$ b) $5 < 6$ c) $8 > 2$ d) $1 \geq 3$ e) $4 \leq 4$

2. Exprese con una inecuación las siguientes situaciones.

a) Si al doble de la edad de Ana se le resta 17 años, resulta menos de 35, pero si a la mitad de la edad de Ana se le suma 3 el resultado es mayor que 15.

b) Un padre decide ir a un concierto con sus hijos y tiene 150 Lempiras. Si compra entradas a 30 lempiras le falta dinero, pero si compra entradas a 22 lempiras le sobra.

c) Dos veces un número menos 1 es menor que 20.

d) Si al doble de un número entero se le suma 8 y se le extrae su raíz cuadrada; entonces dicha raíz resulta ser mayor que dicho número.

¿Qué piensan otros?

Propiedades de las Inecuaciones

Las inecuaciones o desigualdades están regidas, por las siguientes propiedades; propiedad de transitividad, adición, sustracción, multiplicación y división, la propiedad también se mantiene si los símbolos de desigualdad estricta (< y >) son reemplazados por sus correspondientes símbolos de desigualdad no estricta (≤ y ≥).

Transitividad

Para números reales arbitrarios a, b y c:

Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.
Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
Si $a > b$ y $b = c$ entonces $a > c$.
Si $a < b$ y $b = c$ entonces $a < c$.

Ejemplos:

Si $3 > 2$ y $2 > 1$ entonces $3 > 1$
Si $2 < 5$ y $5 < 6$ entonces $2 < 6$
Si $8 > 4$ y $4 = 4$ entonces $8 > 4$
Si $6 < 9$ y $9 = 9$ entonces $6 < 9$

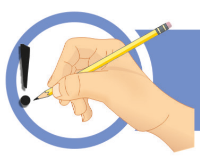
Adición y sustracción

Para números reales arbitrarios a, b y c:

Si a < b entonces a + c < b + c y a − c < b − c.
Si a > b entonces a + c > b + c y a − c > b − c.

Ejemplos:
Si 4 < 6 entonces 4 + 2 < 6 + 2 y 4 − 2 < 6 − 2

Si 3 > 2 entonces 3 + 1 > 2 + 1 y 3 − 1 > 2 − 1



¡A trabajar!

Complete en su cuaderno de forma clara y ordenada los ejercicios planteados en esta sección:

a) Si 10 > 1 y 1 > 0 entonces ____ > ____
b) Si 3 < 7 y 7 < 9 entonces ____ < ____
c) Si 11 > 5 y 5 = 5 entonces ____ > ____
d) Si 13 < 17 y 17 = 17 entonces ____ < ____
e) Si 8 < 9 entonces ____ + 1 < ____ + 1 y ____ − 1 < ____ − 1
f) Si 5 > 4 entonces ____ + 3 > ____ + 3 y ____ − 3 > ____ – 3

¿Qué piensan otros?

Multiplicación y división

Para números reales arbitrarios a, b, y c diferente de cero:

Si c es positivo y a < b entonces ac < bc y a/c < b/c.
Si c es negativo y a < b entonces ac > bc y a/c > b/c.

Ejemplos:
Si 5 es positivo y 2 < 4 entonces 2(5) < 4(5) y 2/5 < 4/5
Si 2 es negativo y 1 < 3 entonces 1(-2) > 3(-2) y 1/ (-2) > 3/ (-2)

Opuesto

Para números reales arbitrarios a y b:

Si $a < b$ entonces $-a > -b$.

Si $a > b$ entonces $-a < -b$.

Ejemplos:

Si $2 < 5$ entonces $-2 > -5$

Si $6 > 3$ entonces $-6 < -3$

Recíproco

Para números reales a y b distintos de cero, ambos positivos o negativos a la vez:

Si $a < b$ entonces $1/a > 1/b$.

Si $a > b$ entonces $1/a < 1/b$.

Si a y b son de distinto signo:

Si $a < b$ entonces $1/a < 1/b$.

Si $a > b$ entonces $1/a > 1/b$.

Ejemplos:

Si $2 < 4$ entonces $1/2 > 1/4$

Si $6 > 3$ entonces $1/6 < 1/3$

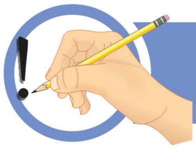
Si a y b son de distinto signo:

Si $-2 < 4$ entonces $1/(-2) < 1/4$

Si $3 > -5$ entonces $1/3 > 1/(-5)$

¿Qué dice la ley?

- Si se suma o resta un mismo número a los dos miembros de una desigualdad, resulta otra del mismo sentido.
- Si se multiplica o divide los dos miembros de una desigualdad por un mismo número positivo, resulta otra del mismo sentido.
- Si se multiplica o divide los dos miembros de una desigualdad por un mismo número negativo, resulta otra de sentido contrario.



¡A trabajar!

Complete en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada los ejercicios planteados en esta sección:

a)Si 6 es positivo y 3 < 7 entonces 6 ( ) < __ (6) y ___ /6 < ___ /6

b) Si 3 es negativo y 2 < 5 entonces ___ (−3) > ___ (−3) y ___ / (−3) > ___ / (−3)

c) Si 4 < 8 entonces − ___ > − ___

d) Si 9 > 5 entonces − ___ < − ___

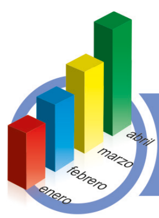
e) Si 1 < 3 entonces 1/ ___ > 1/ ___

f) Si 11 > 8 entonces 1/ ___ < 1/ ___

Si a y b son de distinto signo:

g) Si – 7 < 2 entonces 1/ ( ) < 1/ ___

h) Si 4 > – 5 entonces 1/ ___ > 1/ ( )



¡Valorando lo aprendido!

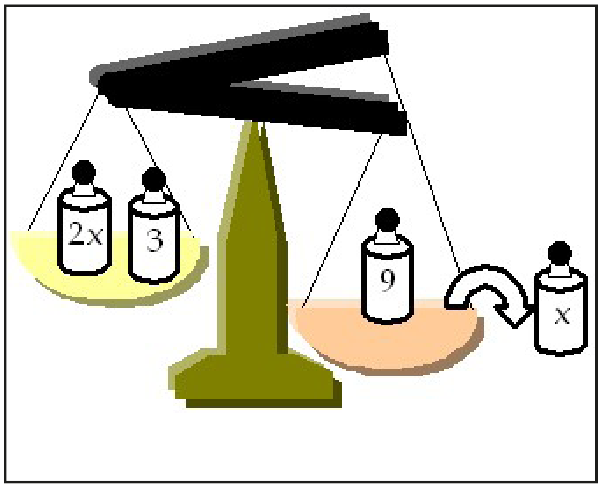
Ahora copie en su cuaderno la siguiente tabla y complétela escribiendo en la columna derecha el resultado de aplicarle a los dos miembros de la desigualdad de la 1ª columna la operación indicada en la segunda columna:

$x - 3 > 5$	Sumar 3	
$x + 7 > 8$	Restar 7	
$4\,x < 12$	Dividir entre 4	
$-2x \geq 8$	Dividir entre (-2)	
$x - 9 > -2$	Sumar 9	
$-3x \leq 9$	Dividir entre -3	

Secuencia 2
INECUACIONES RESUELTAS

¿Hacia dónde vamos?

Una inecuación es una desigualdad en la que aparecen números y letras combinados mediante las operaciones algebraicas. Los signos de desigualdad son: <, ≤, >, ≥ Las inecuaciones se clasifican por su grado y por su número de incógnitas.



Soluciones de una inecuación son los valores de la(s) incógnita(s) que cumplen la desigualdad. En las inecuaciones con una incógnita el conjunto de soluciones suele darse mediante intervalos. En las inecuaciones con dos incógnitas, el conjunto de soluciones suele ser una región del plano.

Resolver una inecuación es encontrar sus soluciones. Para resolver una inecuación hay que despejar la incógnita.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

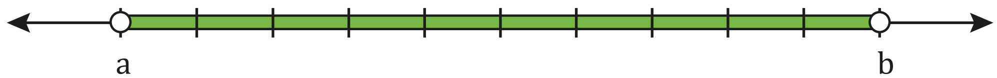
1. Resolver correctamente inecuaciones lineales o de primer grado.
2. Expresar en notación constructiva, de intervalo y en forma gráfica la solución de una inecuación lineal.
3. Resolver problemas que impliquen inecuaciones lineales.

¿Qué conoce de esto?

Intervalo abierto

Intervalo abierto,]a, b[, es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b.

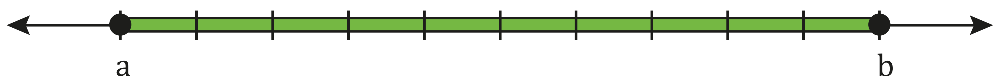
$]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \, / \, a < x < b \}$



Intervalo cerrado

Intervalo cerrado, [a, b], es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b.

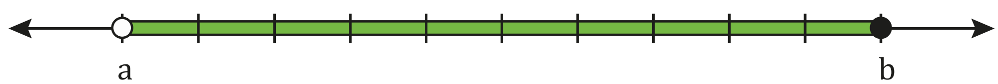
$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \, / \, a \leq x \leq b \}$



Intervalo semiabierto por la izquierda

Intervalo semiabierto por la izquierda,]a, b], es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores o iguales que b.

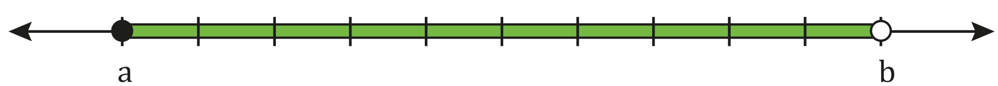
$]a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \, / \, a < x \leq b \}$



Intervalo semiabierto por la derecha

Intervalo semiabierto por la derecha, [a, b[, es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b.

$[a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \, / \, a \leq x < b \}$



¿Cuál es la dificultad?

Responda los siguientes enunciados o preguntas:

1. Escribir $\{x \in \mathbb{R}: 3 < x \leq 7\}$ en notación de intervalo y notación gráfica.
2. Resuelva la inecuación $2(x+3) \leq 3(x+1)$
3. En una bolsa que pesa 50 g se agregan mables que pesan 20 g cada uno, de modo que el peso total de la bolsa sea mayo de 800 g. ¿Cuál es la cantidad mínima de mables que se pueden agregar a la bolsa?
4. Resolver la inecuación $2-\left[-2(x+1)-\dfrac{x-3}{2}\right] \leq \dfrac{2x}{3}-\dfrac{5x-3}{12}+3x$

¿Qué piensan otros?

Solución de una inecuación

La solución de una inecuación es el valor o conjunto de valores que puede tomar la incógnita para que se cumpla la inecuación. A diferencia de las ecuaciones (cuyo signo es "="), no se puede saber de antemano el número de soluciones.

Puede darse el caso en que la solución es sólo un punto (por ejemplo, $x = 2$), un intervalo (por ejemplo, $x \in [0, 2]$), una unión de intervalos o que no exista ninguna solución.

Metodología de resolución

La metodología de resolución es análoga a la de las ecuaciones, pero teniendo siempre en cuenta que se trata de una desigualdad. Esto supone, por ejemplo, cambiar el signo de desigualdad cada vez que multiplicamos o dividimos por un negativo para mantener la relación.

Ejemplo: $2 \leq 3$

Para multiplicar por un negativo, por ejemplo, -2, se cambia la desigualdad al resultado:

$$-2 \cdot 2 \geq -2 \cdot 3$$
$$-4 \geq -6$$

Note que, si no la se cambia, se obtiene una relación falsa ($-4 \leq -6$).

Clasificación de inecuaciones

Inecuación lineal de primer grado:
Cuando las expresiones de ambos lados son polinomios de primer grado.
Ejemplo: $x + 2 \leq 0$

La solución de esta inecuación es el intervalo $]-\infty, 2]$

Inecuación de segundo grado:
Cuando las expresiones de ambos lados son polinomios de grado menor o igual que 2.
Ejemplo: $x^2 < 0$

Esta inecuación no tiene soluciones (reales) puesto que ningún número al cuadrado es negativo.

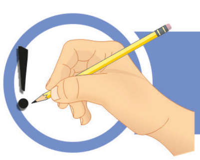
Inecuación racional:
Cuando las expresiones de uno o ambos lados son un cociente de polinomios.
Ejemplo:

$$\frac{2}{x} \leq 0$$

La solución de esta inecuación es $x \in (-\infty, 0)$

Inecuación con valor absoluto:
Cuando en las expresiones algebraicas hay valores absolutos.
Ejemplo: $|x| < 0$

Esta inecuación no tiene solución porque el módulo (valor absoluto) de un número es siempre mayor o igual que 0.



¡A trabajar!

Resuelva las actividades planteadas de forma clara y ordenada en su cuaderno de trabajo.

a) Investigue ejemplos de cada uno de los tipos de inecuaciones y cópielos en su cuaderno.

b) Construya ejemplos de intervalos cerrados, intervalos abiertos, intervalos semiabiertos por la izquierda e intervalos semiabiertos por la derecha y expóngalos en su clase, según estime conveniente su docente.

¿Qué piensan otros?

Solución de inecuaciones lineales

Las inecuaciones de primer grado con una incógnita se resuelven aplicando inversos aditivos (opuestos) o inversos multiplicativos (recíprocos) para despejar la incógnita. Conviene dejar positivo el coeficiente de la incógnita.

A continuación, se puede observar cómo se aplican las propiedades anteriores en la resolución de inecuaciones lineales de primer grado con una incógnita.

¿Cómo se hace?

Resolver la inecuación a) $\frac{a+2}{4} \leq \frac{a-1}{3}$

Solución:

$\frac{a+2}{4} \leq \frac{a-1}{3}$ .... Se pasa a multiplicar los divisores, ambos cambian de lugar.

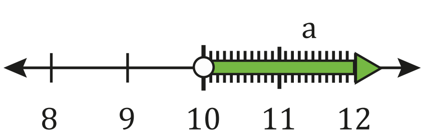
$3(a+2) \leq 4(a-1)$ .... Se resuelven los paréntesis o las multiplicaciones.

$3a+6 \leq 4a-4$ .... Se transponen los números con variable a un miembro y los números sin variable al otro miembro.

$3a-4a \leq -4-6$ .... Se resuelve la operación correspondiente (suma y resta).

$-1a \leq -10$ .... Se Multiplica por (-1) en ambos miembros de la desigualdad, esto cambia el sentido de la desigualdad.

$a \geq 10$



.... Graficar en la recta numérica el intervalo cerrado a ≥ 10

$\{a \in R / a \geq 10\}$ .... Expresar la solución en notación constructiva.

Resolver la inecuación

b) $x-6>21-8x$

Solución:

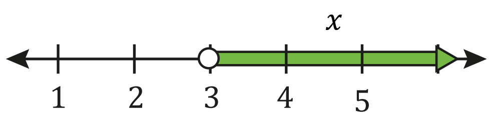
$x-6>21-8x$ …. Se transponen los números con la incógnita a un miembro y los números sin variable al otro miembro.

$x+8x>21+6$ …. Se resuelve la operación correspondiente (suma).

$9x>27$ …. Se despeja para la incógnita x pasando el "9" a dividir al miembro derecho.

$x>\dfrac{27}{9}$ …. Se realiza la división "27 entre 9".

$x>3$



$\{x \in R / x>3\}$ …. Graficar en la recta numérica el intervalo abierto $x>3$

Resolver la inecuación

c) $3x-12\leq\dfrac{5x-6}{4}$

Solución:

$3x-12\leq\dfrac{5x-6}{4}$ … Se pasa a multiplicar el número 4 al miembro izquierdo.

$4(3x-12)\leq 5x-6$ …. Se realiza la multiplicación del número 4 por $(3x - 12)$.

$12x-48\leq 5x+6$ …. Se transponen los números con la incógnita x a un miembro y los números sin variable al otro miembro.

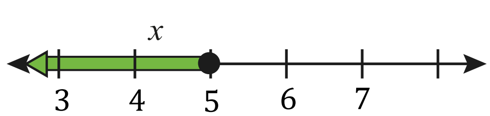
$12x-5x\leq -6+48$ …. Se realiza la resta y la suma respectivamente.

$7x\leq 42$ …. Se despeja para la incógnita x pasando el "7" a dividir al miembro derecho.

$x\leq\dfrac{42}{7}$ …. Se realiza la división "42 entre 7".

$x\leq 6$

Notación Gráfica



Notación constructiva

$\{x\in R/x\leq 6\}$

¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**Inecuaciones resueltas",** este interesante programa muestra la solución de diversas inecuaciones siguiendo las reglas correctas para resolver ejercicios.

¡A trabajar!

1. Resuelva en forma clara y ordenada los ejercicios planteados, escribiendo al lado de cada operación la justificación del paso realizado. Además, escriba la respuesta en notación de intervalo, notación constructiva y notación gráfica.

a) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)\leq 3x$

b) $2x-3\leq 4-2x$

c) $-\frac{x}{4}-4\geq\frac{5x}{3}-\frac{1}{6}$

2. Indique si la siguiente resolución es V o F Justificando la respuesta.

Ejercicio: $\frac{3}{x}<2$ Justifica

Solución:

$(x)\frac{3}{x}<2(x)$ ______________________________

$3<2x$ ______________________________

$\frac{3}{2}<x$ ______________________________

¿Qué piensan otros?

Complejidad de inecuaciones lineales

Las inecuaciones lineales complejas son aquellas que tienen un grado de dificultad mayor en comparación a otras. Observe y estudie la resolución de algunos ejercicios planteados a continuación:

Resolver la inecuación

a) $\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}>\frac{x+14}{2}-2$

Solución:

$$\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}>\frac{x+14}{2}-2$$

Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores para poder dividir y multiplicar por las fracciones:

m.c.m. (3, 4, 2) = 12

$$\left(\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}>\frac{x+14}{2}-2\right)12$$ …. Se multiplica por el número 12.

$$4(5x-2)-3(x-8)>6(x+14)-2(12)$$ …. Se expresa la multiplicación.

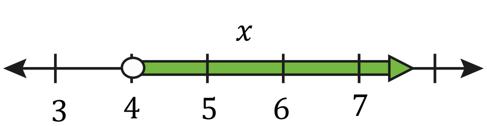
$$20x-8-3x+24>6x+84-24$$ …. Se resuelve la multiplicación.

$$20x-3x-6x>84-24+8-24$$ …. Se transponen términos semejantes.

$$11x>44$$ …. Se resuelven operaciones resultantes.

$$x>\frac{44}{11}$$ …. Se despeja la incógnita y se divide.

$$x>4$$



…. Graficar en la recta numérica el intervalo cerrado $x>4$

$\{x \in \mathrm{R} / x>4\}$ …. Expresar la solución en notación constructiva.

¿Qué dice la ley?

Al dividir o multiplicar por un factor negativo, en ambos lados de una desigualdad, ésta se invierte y toma otro sentido.

Resolver la inecuación

b) $\left(2-\frac{1}{3}x\right)(-3)+4\left(-\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}\right)>0$

Solución:

$$\left(2-\frac{1}{3}x\right)(-3)+4\left(-\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}\right)>0$$

$$(2(-3))\left(-\frac{1}{3}x(-3)\right)+\left(-\frac{1}{2}x(4)\right)\left(+\frac{7}{4}(4)\right)>0$$ …. Se multiplica por (–3) y (4) cada término.

$$-6+x+(-2x)+7>0$$

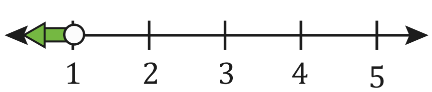
$$-6+x-2x+7>0$$ …. Se multiplican los signos.

$$x-2x>6-7$$

$$-x>-1$$ …. Transposición de términos.

$$-x(-1)>-1(-1)$$

$$x<1$$ …. Se multiplica por (-1)



…. Graficar en la recta numérica el intervalo abierto $x<1$

$\{x \in \mathrm{R} / x<1\}$ …. Expresar la solución en notación constructiva.

¡A trabajar!

Resuelva en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada los ejercicios planteados en esta sección.

a) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}>5-\frac{x}{6}$

b) $-\frac{x}{4}-4>\frac{5x}{3}-\frac{1}{6}$

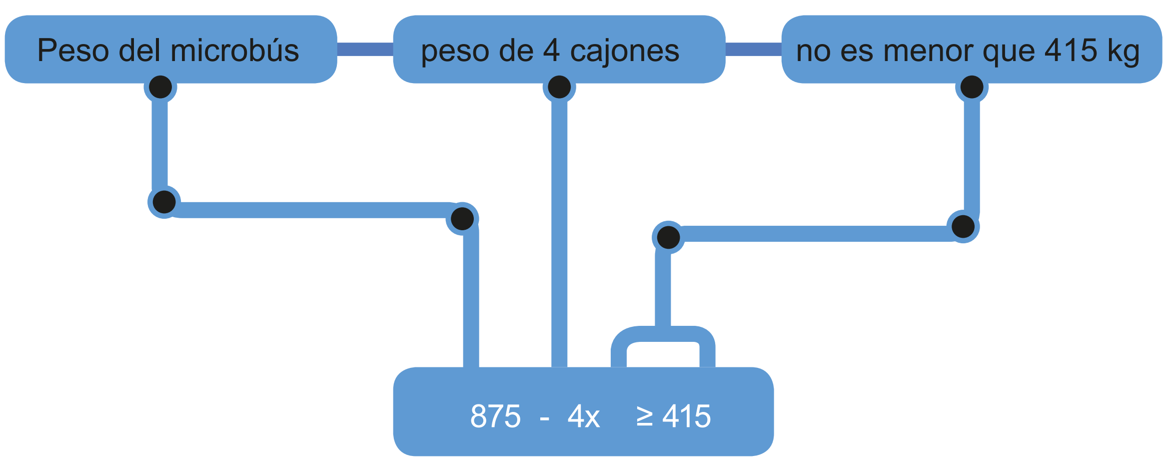
c) $-\left(1-x-2\left(1-x-3\left(1-x-2\left(1-x-3\left(1-x-2\left(1-x-2\left(1-x\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\geq 0$

¿Qué piensan otros?

Problemas con inecuaciones

Ejemplo:
Un microbús pesa 875 kg. La diferencia entre el peso del microbús vacío y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en el microbús?

En primer lugar, se traduce el enunciado al lenguaje simbólico, se llama al peso de cada cajón y se plantea la siguiente inecuación:



Solución a la inecuación planteada:

$875 - 4x \geq 415$

$-4x \geq 415 - 875$ …. Se realiza la transposición de términos semejantes.

$-4x \geq -460$ …. Se realiza la operación en el segundo miembro.

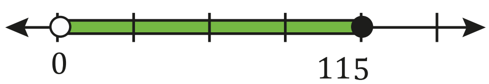
$x \leq \dfrac{-460}{-4}$ …. Se despeja la incógnita y se divide.
Cuidado: como se divide por un número negativo, se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

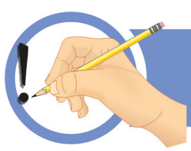
$x \leq 115$ …. Se hace el cálculo.

Esto significa que el peso de cada cajón no podrá superar los 115 kg. Además, como se trata de un peso, x > 0.

Entonces, la solución está formada por todos los números reales pertenecientes al intervalo]0, 115].

Grafique la solución en la recta real:





¡A trabajar!

Resuelva en su cuaderno de forma clara y ordenada cada uno de los problemas planteados en esta sección.

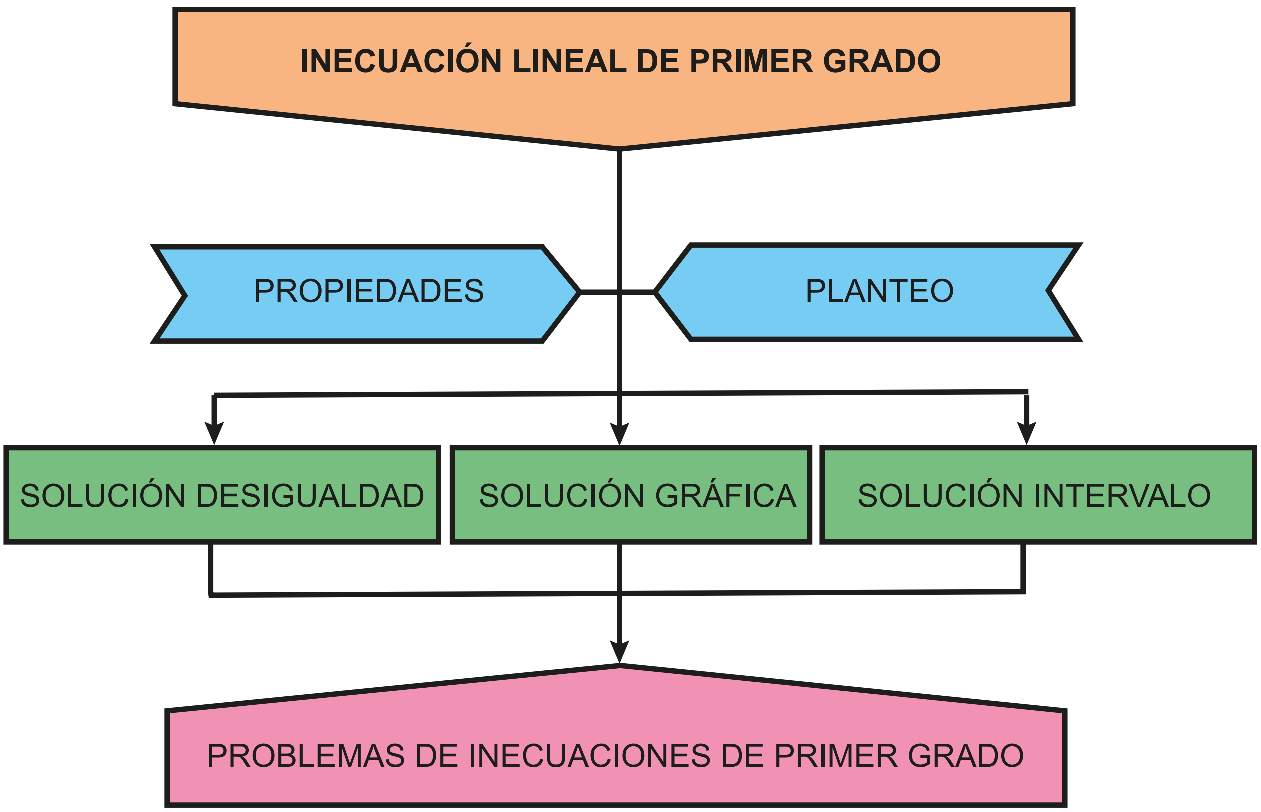
a) Lorena tiene 20 años menos que Andrea. Si las edades de ambas, suman menos de 86 años. ¿Cuál es la máxima edad que podría tener Lorena?

a) Si al doble de la edad de Mirtha se le resta 17 años, resulta menos de 35, pero si a la mitad de la edad de Mirtha se le suma 3 el resultado es mayor que 15. ¿Cuál es la edad de Mirtha?

b) Una fábrica paga a sus viajantes L. 100 por artículo vendido más una cantidad fija de L. 500. Otra fábrica de la competencia paga L. 150 por artículo y L. 300 fijos. ¿Cuántos artículos debe vender el viajante de la competencia para ganar más dinero que el primero?

¡Valorando lo aprendido!

Una forma general de estudiar todos los conceptos y subtemas que se han visto en la secuencia **inecuaciones resueltas** es verlos plasmados en un mapa conceptual como el siguiente:



Actividad: En su cuaderno de trabajo resolver de forma clara y ordenada los siguientes ejercicios:

a) $6\left(\frac{x+1}{8}\ \frac{2x-3}{16}\right) > 3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$

b) $\frac{2}{3}\left[x-\left(1-\frac{x-2}{3}\right)\right]+1 \leq x$

Secuencia 3
DE SEGUNDO GRADO

¿Hacia dónde vamos?

Se sabe que una ecuación es una relación matemática entre números y letras. Normalmente se trabaja con ecuaciones en las que sólo hay una letra, llamada incógnita, que suele ser la . Resolver la ecuación consiste en encontrar un valor (o varios) que, al sustituirlo por la incógnita, haga que sea cierta la igualdad. Ese valor es la solución de la ecuación.

Ejemplo: Resolver la ecuación x -1=0

El número que hace que esa ecuación sea cierta es el 1, ya que 1-1 =0 por lo tanto, 1 es la solución de la ecuación.

Si en la ecuación la incógnita está elevada al cuadrado, se dice que es una ecuación de segundo grado (llamada también ecuación cuadrática), que se caracterizan porque pueden tener dos soluciones (aunque también una sola, e incluso ninguna).

Cualquier ecuación de segundo grado o cuadrática se puede expresar de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde a, b y c son unos parámetros que habrá que sustituir por los números reales que corresponda en cada caso particular.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Definir las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Clasificar los tipos de soluciones para las ecuaciones cuadráticas o de grado dos.
3. Resolver ecuaciones cuadráticas por factorización, raíz cuadrada y completación al cuadrado.

¿Qué conoce de esto?

La resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita es un conocimiento abre paso a la solución de ecuaciones de segundo grado.

Y para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, se aplica el criterio de la transposición de términos que consiste en el operador inverso (inverso aditivo o inverso multiplicativo), como se verá en el siguiente ejemplo:

Resolver la ecuación de primer grado $2x - 3 = 53$

Se debe tener las letras a un lado y los números al otro lado de la igualdad (=), entonces para llevar el –3 al otro lado de la igualdad, le aplicamos el inverso aditivo (el inverso aditivo de –3 es +3, porque la operación inversa de la resta es la suma).

Entonces se hace: $2x - 3 + 3 = 53 + 3$

En el primer miembro –3 se elimina con +3 y se tiene:

$$2x = 53 + 3$$

$$2x = 56$$

Ahora se tiene el número 2 que está multiplicando a la variable o incógnita x, entonces se pasará al otro lado de la igualdad dividiendo. Para hacerlo, se aplica el inverso multiplicativo de 2 (que es $\frac{1}{2}$) a ambos lados de la ecuación:

$$2x \bullet \frac{1}{2} = 56 \bullet \frac{1}{2}$$

Se simplifica y ahora se tiene:

$$x = \frac{56}{2}$$

$$x = 28$$

Entonces el valor de la incógnita o variable "x" es 28.

¿Cuál es la dificultad?

Resuelva los siguientes enunciados de forma clara y ordenada.

1. Identifique y escriba los coeficientes numéricos de los términos cuadrático, lineal e independiente de la ecuación x^2-$7x+12=20x^2+x+1$..
2. Resuelva la ecuación x^2-$9x+18=0$ por el método de factorización.
3. Encuentre las soluciones de la ecuación x^2-$9=0$ con la raíz cuadrada.

¿Qué piensan otros?

Ecuación cuadrática o de segundo grado

Se llama ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática a toda ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, con a,b y c coeficientes reales y con a distinto de cero.

A continuación, se identificarán los elementos que forman una ecuación en general y, además, los elementos que componen una ecuación de segundo grado.

$$\overbrace{\underbrace{ax^2}_{\text{Término cuadrático}}+\underbrace{bx}_{\text{Término lineal}}+\underbrace{c}_{\text{Término independiente}}}^{\text{Primer miembro}}=\overbrace{0}^{\text{Segundo miembro}}$$

$$\underbrace{a}_{\text{Coeficiente numérico de } x^2}x^2+\underbrace{b}_{\text{Coeficiente numérico de } x}x+\underbrace{c}_{\text{Término independiente}}=0$$

Una vez estudiados los elementos que componen una ecuación cuadrática se pasará a estudiar la clasificación de estas, y es que las hay de varios tipos:

- **Ecuación cuadrática completa**

  Una ecuación cuadrática se denomina **completa** si sus coeficientes son no nulos. Donde los tres coeficientes numéricos: y son distintos de cero.

Ejemplo: $3x^2 + 5x + 7 = 0$

- **Ecuación cuadrática incompleta**

Se llama incompleta si carece del termino de primer grado. Y se expresa en la forma siguiente:

Ejemplo: $5x^2 - 1 = 0$

- **Ecuación cuadrática incompleta mixta**

  Es incompleta mixta cuando la ecuación carece de término independiente. Y se expresa en la forma siguiente:

Ejemplo: $7x^2 + 2x = 0$

- **Ecuación cuadrática radical**

  Es radical cuando la ecuación contiene una raíz. Y se expresa en la forma siguiente:

Ejemplo: $\sqrt{3x^2 + 1} = 0$

Métodos de solución de ecuaciones cuadráticas

Existen diversos métodos para resolver ecuaciones cuadráticas, los métodos a utilizar dependen del tipo de ecuaciones con las que se esté trabajando, entre los métodos de trabajo se tienen los siguientes:

- **Método de factorización**

  La factorización simple consiste en convertir la ecuación cuadrática en un producto de binomios. Luego, se busca el valor de de cada binomio.
- **Método por raíz cuadrada**

  El método de raíz cuadrada se utiliza únicamente en las ecuaciones cuadráticas incompletas, y consiste en aplicar en ambos miembros de la ecuación raíz cuadrada.
- **Método de completación al cuadrado**

  Se llama método de completación al cuadrado porque se puede completar un cuadrado geométricamente.
- **Método de la formula cuadrática**

  Este método es muy simple: hay que sustituir los valores de a, b y c de la ecuación cuadrática a la siguiente fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

¡A trabajar!

Resuelva en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada cada uno de los enunciados planteados en esta sección.

1. Escriba el coeficiente del término cuadrático y el coeficiente del término independiente de la siguiente ecuación: $4x^2 + 6x + 9 = 0$
2. Construya un mapa conceptual en su cuaderno que incluya todo lo abordado hasta este apartado acerca de la ecuación cuadrática.

¿Qué piensan otros?

Método de factorización

Existen varios métodos para resolver ecuaciones cuadráticas, y el método que se utilice dependerá de la manera en la que la ecuación se presenta, facilitando así su solución. En este apartado se abordará especialmente la solución de ecuaciones cuadráticas completas por el método de la factorización.

Como se mencionó, la factorización consiste en convertir la ecuación cuadrática completa en un producto de binomios, luego, se busca el valor de de cada binomio que satisfaga las ecuaciones.

Factorización por tanteo y uso de la propiedad del producto nulo

Una forma de resolver ecuaciones cuadráticas completas es mediante la factorización por tanteo y haciendo uso de la propiedad del producto nulo.

¿Qué dice la ley?

La propiedad del producto nulo o cero simplemente establece que si $ab = 0$, entonces ya sea $a = 0$ o $b = 0$ (o ambas). Un producto de factores es cero si y solo si uno o más de los factores es cero.

A continuación, se presentan dos ejemplos en los que se indica el paso a paso para su resolución.

Pero antes de ver los ejemplos, recuerden que un trinomio cuadrado no perfecto es el resultado de multiplicar dos binomios del tipo: $(x+a)(x+b)$

Donde el valor de **a** y el valor de **b** son diferentes.

Así pues, se tiene que: $(x+a)(x+b)= ax^2+bx+c=0$

Ejemplo 1
Resolver la ecuación $x^2+2x-8=0$

Solución:

Paso 1: Ubicar los valores: $a=1, b=2$ y $c=-8$

Paso 2: Buscar dos números que multiplicados den el valor de c y a la vez sumados den el valor de b. En este caso hay que buscar dos números cuyo producto sea -8 y que éstos mismos números sumen **.**

Paso 3: En este caso se tiene que los valores buscados son: 4 y -2.

$$(x+4)(x-2)=0$$

Y se verifica que en realidad se cumpla que el producto dé como resultado el polinomio $x^2+2x-8=0$ planteado en un inicio:
Se multiplican extremos por extremos y medios por medios:

$$(x+4)\ (x-2) = x^2 -2x + 4x -8$$

Simplificando términos en el lado derecho, se comprueba que es la misma ecuación planteada en un inicio:

$$(x+4)\ (x-2) = x^2 +2x -8$$

Paso 4: Se resuelven ambas ecuaciones aplicando la propiedad de producto nulo y se encuentra la solución de la ecuación cuadrática.

Ecuación 1	*Ecuación* 2
$x+4=0$	$x-2=0$
$x=0-4$	$x=0+2$
$x=-4$	$x=2$

Respuesta: Se puede decir que esta ecuación cuadrática tiene dos soluciones $x=-4$ y $x=2$

Ejemplo 2
Resolver la ecuación x^2-7x+12=0

Solución:

Paso 1: Buscar dos números que: multiplicados den +**12**
sumados den -7

Paso 2: Para encontrar esos números, se descompone el término independiente (*valor c*) en factores de solamente números primos:

$$12=(3)(2)(2)(1)$$

Ahora se comprueba que, al formar parejas en las que se usen los factores hallados, multiplicados den 12 y sumados den -7:

x	+
(12)(1)=12	12+1=13
(4)(3)=12	4+3=7
(2)(6)=12	2+6=8

Observe que el segundo renglón es el que cumple con la condición, sin embargo, para que la suma sea , los factores deberán tener signo negativo:

$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=0$$

Paso 3: Se comprueba el producto de binomios:

$$(x-3)(x-4)=x^2-4x-3x+12$$

Simplificando términos se tiene que:

$$(x-3)(x-4)=x^2-7x+12$$

Paso 4: Aplicando la propiedad de producto nulo, se tiene:

Ecuación 1	***Ecuación 2***
x-3 = 0	x-4 = 0
x = 0+3	x = 0+4
x = 3	x = 4

Respuesta: Se puede decir que esta ecuación cuadrática tiene dos soluciones x=3 y x=4.

¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo factorizar de forma clara y ordenada los siguientes ejercicios:

a) $x^2+18x+81=0$

b) $x^2-7x+10=0$

c) $x^2+9x+14=0$

¿Qué piensan otros?

Factorización por identificación del trinomio cuadrado perfecto (TCP)

Otra manera de resolver una ecuación cuadrática completa es mediante la identificación de sí ésta es o no, un trinomio cuadrado perfecto (TCP).
Ejemplo:
Resolver mediante factorización la ecuación $x^2+8x+16=0$

Solución:

$x^2+8x+16=0$	Se sabe que es un TCP cuando la raíz del término cuadrático (1) y la raíz del término independiente (16) son números enteros y al multiplicar por dos la raíz del término cuadrático y la raíz del término independiente da como resultado el término lineal.
$(x+\_)(x+\_)=0$	Se colocan los dos paréntesis y se buscan los valores que satisfagan la ecuación, es decir la raíz cuadrada de x^2 y la raíz cuadrada de 16 en este caso.
$(x+4)(x+4)=0$	Factorizando como un binomio al cuadrado aquí mostrado en forma de factores.
$x+4=0\,, x+4=0$	Aplicando la propiedad del producto nulo.
$x_1=-4 \quad x_2=-4$	Despejando.

Con un sencillo razonamiento se puede concluir que las ecuaciones cuadráticas que tienen la **forma de un trinomio cuadrado perfecto** tendrán dos soluciones iguales pues provienen de factores iguales, en este caso el 4.

¿Cómo se hace?

Ahora, ¿qué pasará cuando se encuentra con un **trinomio cuadrado no perfecto** como el siguiente?

$$2x^2+7x-4=0$$

Solución:

$2x^2+7x-4=0$

No es un trinomio cuadrado perfecto, porque la raíz cuadrada del término cuadrático (2) y el término independiente (4) deben ser números enteros y en este caso no lo son, entonces hay que buscar dos números que multiplicados den 2 y otros dos que multiplicados den 4.

$$\begin{array}{ccl} 2 & -1 & = -1 \\ 1 & 4 & \ \underline{8} \\ & & \ 7 \end{array}$$

$$(2x-1)(x+4)=0$$

Una vez encontrados los valores que satisfacen el punto anterior, se colocan de la siguiente manera, para que al multiplicar de forma cruzada y sumar estos valores de como resultado el coeficiente del término lineal. En este caso para que la suma de 7 se debe agregar un signo menos, pero los signos se agregan en la segunda columna.

Solo falta ordenar los términos encontrados en los paréntesis.

$$\begin{aligned}(2x-1)(x+4) &= 2x^2+8x-x-4 \\ &= 2x^2+7x-4\end{aligned}$$

Antes de proceder a encontrar las soluciones hay que verificar si el producto de los binomios cumple con la ecuación original. Para ello se multiplica como lo indican las flechas.

$(2x-1)(x+4)=2x^2+7x-4$

Ordenando términos.

$2x-1=0 \qquad x+4=0$

Aplicando la propiedad del producto nulo.

$x_1=\frac{1}{2} \qquad x_2=-4$

Despejando.

¡A trabajar!

Resolver en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada los ejercicios planteados en esta sección.

a) $2x^2+11x-21=0$

b) $3x^2+21x-24=0$

c) $x^2-14x+49$

¿Qué piensan otros?

Generalización de la solución por factorización

De forma general, si se necesita resolver una ecuación de segundo grado por el método de factorización, se puede generalizar la forma de hacerlo con cualquier caso.

$ax^2+bx+c=0$	Si no es un trinomio cuadrado perfecto, entonces hay que buscar dos números a1 y a2 que multiplicados den a y otros dos c1 y c2 que multiplicados den c.
$a1 \quad c1 = b1$ $a2 \quad c2 = \underline{b2}$ $\qquad\qquad b$ $(a1x+c1)(a2x+c2)=0$	Una vez encontrados los valores que satisfacen el punto anterior, se colocan de la siguiente manera, de tal forma que al multiplicar de forma cruzada y sumar estos valores nos dé como resultado el coeficiente del término lineal, o sea b. Solo falta ordenar los términos encontrados en los paréntesis.
$a1x+c1=0 \qquad a2x+c2=0$	Aplicando la propiedad del producto nulo.
$x_1=\dfrac{c1}{a1} \qquad x_2=\dfrac{c2}{a2}$	Encontrando las respuestas.

¡A trabajar!

Resolver en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada los ejercicios planteados en esta sección.

a) $5x^2+4=-12x$

b) $x^2-15x+26=0$

c) $x^2+2x+1=0$

d) $6x+x(x-13)=18$

¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**Ecuaciones cuadráticas para la vida",** este interesante programa muestra la aplicación de las ecuaciones cuadráticas en la vida humana y la importancia de aprender a resolverlas.

¡A trabajar!

Trabaje en su cuaderno de forma clara y ordenada el enunciado presentado en esta sección:

Realice un resumen en su cuaderno de trabajo sobre lo observado en el programa de televisión, coméntelo y haga un debate en grupos de trabajo sobre la importancia de las ecuaciones cuadráticas en la vida.

¿Qué piensan otros?

Resolución de ecuaciones cuadráticas por raíz cuadrada

Hasta acá usted sabe cómo resolver ecuaciones cuadráticas usando factorización. Sin embargo, este método trabaja sólo si un polinomio cuadrático puede ser factorizado. Desafortunadamente en la práctica la mayoría de los polinomios cuadráticos no pueden ser factorizados. En esta sección en particular se examinarán ecuaciones en las cuales se podrá sacar raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación para poder obtener el resultado.

Primero, observe la ecuación cuadrática del tipo x^2-c=0

Se puede resolver esta ecuación despejando el término x^2: $x^2=c$
Una vez que el término X2 está despejado, se puede sacar raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación. Recuerde que cuando se saca la raíz cuadrada se obtienen dos respuestas: la raíz cuadrada positiva y la raíz cuadrada negativa.

$$x=\sqrt{c} \quad y \quad x=-\sqrt{c}$$

Con frecuencia esto se escribe como $x=\pm\sqrt{c}$.

Ejemplos:
Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas
a) $x^2-4=0$
b) $x^2-25=0$

Solución
a) $x^2-4=0$

Despejar x^2………………………………........ $x^2=4$
Sacar la raíz cuadrada en ambos lados $x=\sqrt{4}$ y $x=-\sqrt{4}$

Respuestas: $x=2$ y $x=-2$

b) $x^2-25=0$
Despejar x^2………………………………...... $x^2=25$
sacar la raíz cuadrada en ambos lados $x=\sqrt{25}$ y $x=-\sqrt{25}$

Respuestas: $x=5$ y $x=-5$

Otro tipo de ecuación donde se puede encontrar la solución usando la raíz cuadrada es;

$$ax^2-c=0$$

Se puede resolver esta ecuación despejando el término x^2

$$ax^2=c$$
$$x^2=\frac{c}{a}$$

Ahora se puede sacar la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.

$$x=\sqrt{\frac{c}{a}} \quad \text{y} \quad x=-\sqrt{\frac{c}{a}}$$

Frecuentemente esto se escribe como $x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$

Ejemplos:
Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.
a) $9x^2-16=0$
b) $81x^2-1=0$

Solución
a) $9x^2-16=0$
Despejar x^2.................................... $9x^2=16$

$$x^2=\frac{16}{9}$$

Sacar la raíz cuadrada en ambos lados. $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ y $x=-\sqrt{\frac{16}{9}}$

Respuestas: $x=\frac{4}{3}$ y $x=\frac{-4}{3}$

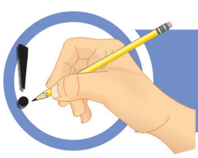
b) $81x^2-1=0$

Despejar x^2................................ $81x^2=1$

$$x^2=\frac{1}{81}$$

Sacar la raíz cuadrada en ambos lados $x=\sqrt{\frac{1}{81}}$ y $x=-\sqrt{\frac{1}{81}}$

Respuestas: $x=\frac{1}{9}$ y $x=-\frac{1}{9}$



¡A trabajar!

Resuelva en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada cada uno de los ejercicios planteados en esta sección.

a) $x^2-100=0$

b) $x^2-16=0$

c) $4x^2-49=0$

d) $25x^2-36=0$

¿Qué piensan otros?

Solución por trinomio cuadrado perfecto (TCP)

Se llama trinomio cuadrado perfecto (TCP) al producto que resulta de dos binomios iguales de la forma $(a+b)$ $(a+b)$, que simplificada se expresa como $(a+b)^2$; en la multiplicación de tales binomios se produce el trinomio (polinomio de tres términos) de la forma $a^2+2ab+b^2$; es decir:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Un trinomio es cuadrado perfecto si tiene la forma: $a^2+2ab+b^2$, en donde se cumple que el término central es el doble del producto de las raíces cuadradas de los términos extremos. En consecuencia, la multiplicación del binomio $(a+b)^2$ se puede describir como "el cuadrado del primer término; más el doble producto del primero por el segundo; más el cuadrado del tercer término", como se muestra a continuación:

El cuadrado del primer término $\boxed{a^2}+2ab+b^2$

Más el doble producto de los dos términos $a^2+\boxed{2ab}+b^2$

Más el cuadrado del tercer término $a^2+2ab+\boxed{b^2}$

Por ejemplo, la ecuación $x^2+12x+36$ es un trinomio porque tiene tres términos (o monomios) y es cuadrado perfecto porque cumple la condición descrita en la que uno de los términos es resultado del doble producto de las raíces cuadradas de los términos restantes, es decir:

1) El primer término, x^2, tiene raíz cuadrada, es decir: x.

2) El tercer término, 36, tiene raíz cuadrada, es decir: 6.

3) El segundo término, 12x es resultado del doble producto de las dos raíces anteriores, es decir: $2(6)(x)$.

Entonces, la factorización de $x^2+12x+36$ es $(x+6)(x+6)$. Esto quiere decir que los factores de $x^2+12x+36$ son $(x+6)$ y $(x+6)$, donde los términos y que los conforman son las raíces cuadradas de los términos cuadráticos x^2 y 36, respectivamente.

Para factorizar un TCP es necesario identificarlo como tal, ya que existen trinomios que no son cuadrados perfectos. Por ejemplo, la expresión x^2+x+3 corresponde a un trinomio, pero no es cuadrado perfecto ya que no existe un binomio $(a+b)(a+b)$ tal, que al elevarlo al cuadrado nos dé como resultado el trinomio. Además, debe notarse que el segundo término (es decir, x) no se obtiene del doble producto de x y $\sqrt{3}$, que son las raíces de los elementos x^2 y

3. En conclusión, existen trinomios que son cuadrados perfectos y otros que no lo son.

Para saber si un trinomio de la forma $a^2+2ab+b^2$ es cuadrado perfecto, se toman los términos cuadráticos, a^2 y b^2, y se verifica que el segundo término $(2ab)$ se obtenga del doble producto de sus raíces cuadradas.

Ejemplo:

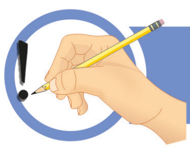
$\boxed{x^2}$ $\boxed{6x}$ $\boxed{9}$

La raíz cuadrada de 9 es 3

El doble producto de las raíces cuadradas: $2(3)(x) = 6x$

La raíz cuadrada de x^2 es x

Como se comprueba que el segundo término $(6x)$ se obtiene del doble producto de las raíces cuadradas del primer y el tercer término, entonces el trinomio dado es cuadrado perfecto.



¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo, identificar si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos o no lo son.

a) $4x^2+10x+25$

b) $x^2+16x+64$

c) $36x^2+72x+36$

¿Qué piensan otros?

Factorización del trinomio cuadrado perfecto (TCP)

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto deben estar ordenados los términos respecto a los exponentes de mayor a menor o inversamente y posteriormente es necesario:

- Extraer las raíces cuadradas del primero y último término.
- Para comprobar si la expresión es un trinomio cuadrado perfecto, se realiza el doble producto de las raíces.
- Si el resultado del producto es igual al segundo término del trinomio, entonces es cuadrado perfecto y su factorización es igual al cuadrado de una suma o diferencia de las raíces cuadradas del primero y último término.

Por ejemplo, para factorizar la expresión: $x2+8x+16$ se realiza el siguiente procedimiento:

$$x^2+8x+16$$

Raíz cuadrada de √x²=x y raíz cuadrada de √16=4

$$2 \cdot x \cdot 4=8x$$

Se toma el signo del segundo término del trinomio

$$x^2+8x+16=(x+4)^2$$

Ejemplo:

$$x^2+10x+25$$

Raíz cuadrada de $\sqrt{}(x^2)=x$ y raíz cuadrada de $\sqrt{25}=5$

$$2 \cdot x \cdot 5=10x$$

Se toma el signo del segundo término del trinomio

$$x^2+8x+16=(x+5)^2$$

¿Cómo se hace?

Para comprobar el binomio $(x+5)^2$ se consideran los pasos anteriores:

El cuadrado del primer término: $x=x^2$

Se considera el signo del binomio: (+)

El doble producto del primer término por el segundo es $2(x)(5)=10x$

Al sumar el cuadrado del segundo término que es 5, da como resultado 25

Por lo que el trinomio cuadrado perfecto es: $(x+5)^2=x^2+10x+25$

Ejemplo: $81x^2$-$180x+100$

Raíz cuadrada de $\sqrt{(81x^2)=9x}$ y raíz cuadrada de $\sqrt{}100=10$

$$2 \cdot 9x \cdot 10=180x$$

Se toma el signo del segundo término del trinomio

$$81x^2-180x+100=(9x-10)^2$$

Siguiendo los pasos para la comprobación se puede verificar que es un trinomio cuadrado perfecto:

$(9x\text{-}10)^2$

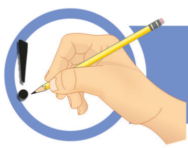
El cuadrado del primer término: $9x = 81x^2$

Se considera el signo del binomio: (-)

El doble producto del primer término por el segundo es $2(x)(10)(9)\text{=-}180x$

Al sumar el cuadrado del segundo término que es 1, da como resultado 100

Por lo que el trinomio cuadrado perfecto es: $(9x\text{-}10)^2\text{=}81x^2\text{-}180x\text{+}100$



¡A trabajar!

Trabaje de forma clara y ordenada los siguientes ejercicios planteados en esta sección:

Factorizar los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a) $49x^2+14x+1$

b) $x^2\text{-}2x+1$

c) $x^2\text{-}6x+9$

d) $9x^2\text{-}12x+4$

e) $16x^2+48x+36$

¿Qué piensan otros?

Formalización del trinomio cuadrado perfecto (TCP)

En los ejemplos anteriores se presentó el procedimiento para la factorización de trinomios cuadrados perfectos, en este apartado se proporcionarán los correspondientes para la factorización de trinomios de la forma ax^2+bx+c a trinomios cuadrados perfectos de la forma a$(x+b)^2+d$.

Cuando se tiene un trinomio que no es cuadrado perfecto, entonces no se puede factorizar con los procedimientos descritos con anterioridad; en estos casos se recurre al manejo algebraico para conformar un trinomio cuadrado perfecto, con lo cual, ahora sí es posible utilizar los procedimientos ya descritos.

Dado un polinomio de la forma ax^2+bx+c, para completar el TCP seguimos los siguientes pasos:

- ✓ Factorizar el coeficiente del término cuadrático a, significa ponerlo como factor del paréntesis, y como el coeficiente del término lineal x no lo tiene, se divide por el factor a, puesto que al multiplicar los términos del paréntesis por a, se obtiene ax^2+bx.

$$a\,(x^2+\frac{b}{a}x)+c$$

- ✓ El coeficiente de se divide entre 2 y se eleva al cuadrado. Este resultado se ocupará en el siguiente paso.

$$(\frac{b}{2a})^2$$

- ✓ El valor del paso 2, es decir $(\frac{b}{2a})^2$ se suma y resta a los elementos que están entre los paréntesis del primer paso:

$$a\,(x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2)+c$$

- ✓ Ahora tenemos construido un trinomio cuadrado perfecto, es decir, cada término de la fracción se eleva al cuadrado:

$$a\,(x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2)+c \quad \text{donde: } a\,(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2})+c$$

- ✓ Multiplicamos el factor común a al término $-\frac{b^2}{4a^2}$, para sacarlo del paréntesis:

$$a\,(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2})-\frac{ab^2}{4a^2}+c$$

Lo que queda en el paréntesis es el trinomio cuadrado perfecto

- ✓ Al obtener las raíces cuadradas del primero y tercer término, el TCP se reduce a un binomio al cuadrado:

$$a\,(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{ab^2}{4a^2}+c$$

- ✓ Que al simplificar queda como:

$$a\,(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación $2x^2 + 8x - 10 = 0$

El trinomio indicado no corresponde a un TCP ya que no se cumple la regla en la que el segundo término es igual al doble producto de las raíces cuadradas del primer y el tercer término. Por ello, se recurre al procedimiento descrito en la formalización, tal como se indica a continuación.

✓ $2(x^2 + 4x) - 10 = 0$ se saca factor común para x^2 y x.

- ✓ El coeficiente que acompaña a x, se divide entre 2 y se eleva al cuadrado. Este resultado se ocupará en el siguiente paso: $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2$

- ✓ Sumamos y restamos el cuadrado del resultado del paso 2:

$$2(x^2 + 4x + 2^2 - (2)^2) - 10$$
$$= 2(x^2 + 4x + 4 - 4) - 10 = 0$$

- ✓ Ahora formemos un trinomio cuadrado perfecto: $2(x^2 + 4x + 4 - 4) - 10 = 0$

- ✓ Multiplicamos por el factor común $a = 2$, al término -4, para sacarlo del paréntesis:

$$2(x^2 + 4x + 4) - 2 \times 4 - 10 =$$
$$2(x^2 + 4x + 4) - 18 = 0$$

Lo que queda dentro del paréntesis es el trinomio cuadrado perfecto:

$$2(x^2 + 4x + 4) - 18 = 0$$

- ✓ Al obtener las raíces cuadradas del primer y el tercer término el TCP se reduce a un binomio al cuadrado: $2(x + 2)^2 - 18 = 0$

- ✓ Por lo tanto, la factorización del polinomio queda como:

$$\underbrace{2x^2 + 8x - 10}_{\text{Polinomio inicial}} = \underbrace{2(x + 2)^2 - 18 = 0}_{\text{Polinomio factorizado}}$$

- ✓ Para resolver la ecuación cuadrática $2(x+2)^2-18=0$, despeja 18 al miembro derecho de la ecuación y al simplificar se obtiene:

$$2(x + 2)^2 = 18$$

- ✓ Luego se despeja 2 de la ecuación y queda como: $(x + 2)^2 = \frac{18}{2}$ que a su vez es igual a:

$$(x + 2)^2 = 9$$

Para resolverla se extrae la raíz cuadrada a los dos lados de la ecuación, es decir:

$$\sqrt{(x+2)^2} = \pm\sqrt{9}$$

y al simplificar se obtiene

$$x + 2 = \pm 3$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática son:

$$x_1 = -2 + 3 = 1$$

$$x_2 = -2 - 3 = -5$$

Comprobación:

$$Para \quad x_1 = 1$$

$$2x^2 + 8x - 10 = 0$$

$$2\ 1^2 + 8\ 1 - 10 = 0$$

$$2\ 1 + 8\ 1 - 10 = 0$$

$$2 + 8 - 10 = 0$$

$$0 = 0$$

$$Para \quad x_2 = -5$$

$$2x^2 + 8x - 10 \quad 0$$

$$2(-5)^2 + 8(-5) - 10 = 0$$

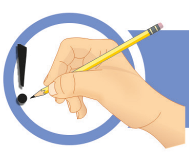
$$2(25) + 8(-5) - 10 = 0$$

$$50 - 50 = 0$$

$$0 = 0$$

¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**Ecuaciones por TCP",** este interesante programa muestra la resolución de ecuaciones cuadráticas por completación con el trinomio cuadrado perfecto.



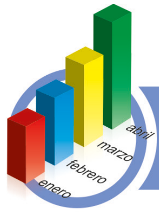
¡A trabajar!

Resuelva en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada los ejercicios planteados en esta sección:

a) $3x^2+6x+6=0$

b) $4x^2-16x-5=0$

c) $x^2-16x+8=0$



¡Valorando lo aprendido!

Resolver ecuaciones cuadráticas mediante la factorización es un proceso simple y sencillo de aplicar, si se siguen los pasos correctamente.

Ahora resuelva las siguientes actividades en su cuaderno de trabajo.

Construya un mapa conceptual con los métodos de factorización que se utilizaron en la solución de ecuaciones cuadráticas.

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas y enunciar el método utilizado.

a) $2x^2+7x-15=0$

b) $x^2-6x+8=0$

c) $6x^2+12x+6=0$

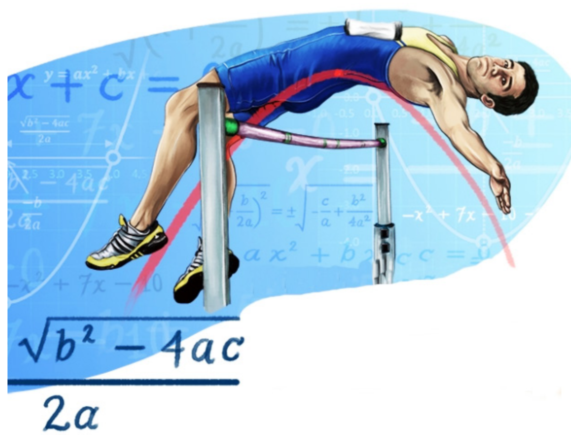
d) $4x^2-144=0$

Secuencia 4

LA FÓRMULA

¿Hacia dónde vamos?

l estudio de la solución de las ecuaciones de segundo grado es muy antiguo. Los especialistas de la historia de las matemáticas ubican que hay trabajos sobre este tema en la cultura babilónica. En Grecia, Diofanto de Alejandría aportó un procedimiento para dar solución a este tipo de ecuaciones: La fórmula general.



El método de fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas simplifica los otros procesos que no es posible factorizar a simple vista. En este caso, se necesita un procedimiento más general para resolverlas, por lo que puede ser usada para resolver cualquier tipo de ecuación cuadrática.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Deducir la fórmula cuadrática para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Encontrar el conjunto solución de ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula cuadrática.
3. Resolver problemas que impliquen ecuaciones cuadráticas.

¿Qué conoce de esto?

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática de una variable es una ecuación que tiene una expresión algebraica con términos cuyo grado máximo es dos. La expresión general de una ecuación cuadrática de una variable es:

$$ax^2+bx+c=0; \text{ para } a \neq 0$$

Y los elementos que la conforman son los siguientes:

Término cuadrático

Término lineal

$$\overbrace{ax^2}^{\text{Término cuadrático}} + \overbrace{bx}^{\text{Término lineal}} + \underbrace{c}_{\text{Término independiente}} = 0$$

Variable o incógnita

Término independiente

¿Cuál es la dificultad?

Responda los siguientes enunciados y preguntas planteados en esta sección:

1. Calcular la o las soluciones de la ecuación $2x^2+4x+16$ aplicando la formula cuadrática.
2. Escriba la utilidad del discriminante al momento de resolver una ecuación cuadrática.
3. Calcular el discriminante de la ecuación $x^2+5x+10$.

¿Qué piensan otros?

La deducción

A continuación, se verá cómo deducir la fórmula general por medio del trinomio cuadrado perfecto. El primer paso para deducir la fórmula general es encontrar la solución de un caso particular. El segundo paso es generalizarla, intercambiando las constantes por literales. Para llevar a cabo el primer paso, se partirá del siguiente problema:

$$-x^2+7x-10=0$$

❖Multiplicar por -1 para dejar el coeficiente o término cuadrático en 1:

$$(-1)-x^2+7x-10=0(-1) \longrightarrow x^2-7x+10=0$$

❖ Transponer el 10 al miembro derecho de la ecuación para dejar el término cuadrático y lineal solos:

$$x^2-7x=-0$$

❖ Para completar el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo de la ecuación:

Se eleva al cuadrado y se suma en ambos lados de la ecuación para mantener la igualdad

$$x^2-7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2=-10+\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

Se divide el término lineal entre 2

❖ Ahora se debe factorizar el lado izquierdo de la ecuación. El resultado es el siguiente:

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 = -10 + \frac{7}{2}^{2}$$

Al simplificar el término cuadrático del lado derecho, la ecuación queda así:

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 = -10+\frac{7^2}{2^2}$$

❖ Para despejar a x, se obtiene la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación:

$$\sqrt{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{-10+\frac{7^2}{2^2}}$$

El siguiente paso es simplificar el término racional dentro de la raíz cuadrada del miembro izquierdo de la ecuación.

Recuerde que toda raíz cuadrada tiene dos resultados: Uno positivo y otro negativo, por eso se colocan los dos signos.

En el miembro derecho realizamos la operación de la fracción, calculando el común denominador que se multiplica con sus respectivos numeradores.

El resultado es el siguiente:

$$x-\frac{7}{2}=\pm\sqrt{\frac{-10(2)^2+7^2}{2^2}}$$

Aplicando el radical en el numerador y denominador del miembro derecho de la ecuación se tiene que:

$$x-\frac{7}{2}=\pm\frac{\sqrt{-10(2)^2+7^2}}{\sqrt{2^2}}$$

$$x-\frac{7}{2}=\pm\frac{\sqrt{-10(2)^2+7^2}}{2}$$

El denominador del miembro derecho puede simplificarse

❖ Para continuar se despeja para la variable x:

$$x=\pm\frac{\sqrt{-10(2)^2+7^2}}{2}+\frac{7}{2}$$

❖ Como es una suma de fracciones de igual denominador, se copia el denominador y se suman los numeradores. La expresión queda así:

$$x=\frac{7\pm\sqrt{-10(2)^2+7^2}}{2}$$

❖ Finalmente, el signo ± quiere decir que hay dos soluciones una con + y otra con -

$$x_1=\frac{7+\sqrt{-10(2)^2+7^2}}{2}=\frac{7+\sqrt{-10(4)+49}}{2}=\frac{7+\sqrt{9}}{2}=\frac{7+3}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$x_2=\frac{7-\sqrt{-10(2)^2+7^2}}{2}=\frac{7-\sqrt{-10(4)+49}}{2}=\frac{7-\sqrt{9}}{2}=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2$$

¿Cómo se hace?

En el segundo paso para deducir la fórmula a través de la generalización de un trinomio cuadrado perfecto sustituyendo los coeficientes por literales.

Si se parte de la ecuación de segundo grado: $ax^2+bx+c=0$

- El primer paso es dividir entre a toda la ecuación para dejar en 1 al término cuadrático:

$$\frac{ax^2+bx+c}{a}=\frac{0}{a}$$

Recuerde que a/a siempre da como resultado 1.

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$

Recuerde que cero entre cualquier cantidad siempre da como resultado 0

- El siguiente paso es completar el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo de la ecuación. Para ello, el término independiente $\frac{c}{a}$ se transpone:

$$x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a}$$

- Para completar el trinomio cuadrado perfecto del miembro izquierdo de la ecuación:

Se divide el término lineal entre 2

$$x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Se eleva al cuadrado y se suma en ambos lados de la ecuación para mantener la igualdad

- Ahora se debe factorizar el miembro izquierdo de la ecuación. El resultado es el siguiente:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Al simplificar el término cuadrático del lado derecho, la ecuación queda así:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{(2a)^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

¿Qué dice la ley?

$$(ab)^m = a^m b^m$$

- Para despejar a, se obtiene la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación:

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}}$$

Se simplifica

$$x+\frac{b}{2a}{}^{2}=\pm\sqrt{\frac{-4ac+b^2}{4a^2}}$$

▪ Luego se aplica el radical en el numerador y el denominador del lado derecho de la ecuación:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{\sqrt{4a^2}}$$

Se simplifica

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$$

▪ Luego se debe terminar el despeje para la variable x. Para ello hay que transponer el término $\frac{b}{ab}$ al miembro derecho de la ecuación:

Simplificando

$$x=\pm\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}-\frac{b}{2a}$$

Para que el término más simple quede al principio en el numerador, cambiamos de lugar a $-b$ y se obtiene la fórmula general de segundo grado.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por tanto,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

¿Qué piensan otros?

Ejemplos de resolución

Determine la solución de la siguiente ecuación cuadrática por fórmula general:

$$3x^2-11x-4=0$$

Los coeficientes en este caso son: $a=3$, $b=-11$, $c=-4$

Fórmula cuadrática

$$x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\pm$

Al sustituir los coeficientes en la fórmula general tenemos:

$$x=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4(3)(-4)}}{2(3)}$$

$$x_1=\frac{-(-11)+\sqrt{(-11)^2-4(3)(-4)}}{2(3)}=\frac{11+\sqrt{121+48}}{6}=\frac{11+\sqrt{169}}{6}=\frac{11+13}{6}=\frac{24}{6}=4$$

$$x_2=\frac{-(-11)-\sqrt{(-11)^2-4(3)(-4)}}{2(3)}=\frac{11-\sqrt{121+48}}{6}=\frac{11-\sqrt{169}}{6}=\frac{11-13}{6}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

Las soluciones de la ecuación son: $\boxed{x_1=4}$ $\boxed{x_2=-\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned}
&Para\ \ x_1=4\\
&3x^2-11x-4=0\\
&3(4)^2-11(4)-4=0\\
&3(16)-44-4=0\\
&48-48=0\\
&0=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Para\ \ x_2=-\frac{1}{3}\\
&3x^2-11x-4=0\\
&3\left(-\frac{1}{3}\right)^2-11\left(-\frac{1}{3}\right)-4=0\\
&3\left(\frac{1}{9}\right)+\frac{11}{3}-4=0\\
&\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0\\
&0=0
\end{aligned}$$

- Determine la solución de la siguiente ecuación cuadrática por fórmula general:

$$x^2-8x+16=0$$

Los coeficientes en este caso son $a=1$, $b=-8$, $c=16$

Al sustituir los coeficientes en la fórmula general tenemos:

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(16)}}{2(1)}$$

$$x_1=\frac{-(-8)+\sqrt{(-8)^2-4(1)(16)}}{2(1)}=\frac{8+\sqrt{64-64}}{2}=\frac{8+\sqrt{0}}{2}=\frac{8+0}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$x_2 = \frac{-(-8)-\sqrt{(-8)^2-4(1)(16)}}{2(1)} = \frac{8-\sqrt{64-64}}{2} = \frac{8-\sqrt{0}}{2} = \frac{8-0}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

La solución de la ecuación es: $\boxed{x_1 = 4}$ $\boxed{x_2 = 4}$

Comprobación: $Para \;\; x_1 = x_2 = 4$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$
$$(4)^2 - 8(4) + 16 = 0$$
$$(16) - 32 + 16 = 0$$
$$16 - 16 = 0$$
$$0 = 0$$

Determine la solución de la siguiente ecuación cuadrática por fórmula general:

$$x^2\text{-}4x+10=0$$

Los coeficientes en este caso son a=1, b=-4, c=10

Al sustituir los coeficientes en la fórmula general tenemos:

$$x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{(-4)^2-4(1)(10)}}{2(1)} = \frac{4+\sqrt{16-40}}{2} = \frac{4+\sqrt{-24}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{(-4)^2-4(1)(10)}}{2(1)} = \frac{4-\sqrt{16-40}}{2} = \frac{4-\sqrt{-24}}{2}$$

Como el resultado presenta raíces negativas, no tiene una solución en los números reales.

¡A trabajar!

Resolver en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada cada uno de los ejercicios planteados en esta sección.

- Resuelva aplicando la fórmula cuadrática y compruebe su respuesta.

a) x^2-$6x+8=0$

b) $x^2+2x+1=0$

c) $x^2+x+1=0$

¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**La Fórmula",** este interesante programa muestra la resolución de problemas aplicando la fórmula cuadrática.

¡A trabajar!

Trabaje en su cuaderno de forma clara y ordenada el enunciado presentado en esta sección:

- Realice un resumen en su cuaderno de trabajo sobre lo observado en el programa de televisión, enuncie puntualmente la importancia de la fórmula cuadrática en la resolución de problemas.

¿Qué piensan otros?

Discriminante de una ecuación de segundo grado.

A partir de una función cuadrática o de segundo grado o cuya expresión es $y=ax^2+bx+c$, podemos igualar la función a un valor determinado que sea paralelo al eje . Regularmente se iguala a cero. Esta operación da origen a la ecuación cuadrática siguiente:

$$ax^2+bx+c=0$$

Las raíces de la ecuación de segundo grado se obtienen mediante la fórmula general:

$$x = -b \pm \frac{\sqrt{b2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión que se ubica dentro de la raíz cuadrada se le conoce como discriminante (representada con una d):

$$d = b^2 - 4ac$$

El valor del discriminante determina tres situaciones que se presentan al calcular su raíz cuadrada:

d

> 0 Existen dos soluciones reales, derivadas de los dos signos (+ y –) del radical.

= 0 Existen dos soluciones iguales, ya que el término que se suma y resta es cero; suele decirse que tiene solución única de multiplicidad 2.

< 0 No existe solución en los números reales, pero sí en los números complejos.

Ejemplo:

Considere la ecuación $x^2\text{-}4x=0$, con esta ecuación se tendrían los parámetros siguientes:

Los coeficientes en este caso son $a=1, b=\text{-}4, c=0$

El valor del discriminante es $d = (\text{-}4)^2\text{-}4(1)(0)=16\text{-}0=16$

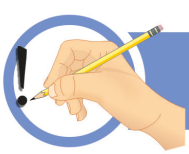
El discriminante es positivo. Por lo tanto, se tendrán dos soluciones reales.

- Considere la ecuación $x^2\text{-}4x+4=0$, con esta ecuación se tendrían los parámetros siguientes:

Los coeficientes en este caso son $a=1,\ b=\text{-}4,\ c=4$

El valor del discriminante es $d = (\text{-}4)^2\text{-}4(1)(4)=16\text{-}16=0$

El discriminante es igual a cero, por lo tanto, se tendrán dos soluciones reales iguales (solución “única”).



¡A trabajar!

A partir de la ecuación de la tabla que se encuentra a continuación, así como de los parámetros a, b, c, calcule el discriminante y el tipo de solución (dos soluciones reales, una solución real o dos soluciones complejas).

Ecuación	*a*	*b*	*c*	Discriminante	Tipo de solución
-3(x-1)(x+1)=0	-3	0	3		
$x^2=4$	1	0	-4		
$x^2=-2x$	1	2	0		
$(x+2)^2=0$	1	4	4		

¿Qué piensan otros?

Resolución de problemas

Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcule la edad de Pedro.

Interpretación de datos
Edad actual x
Edad hace años x - 13
Edad dentro de años x - 11

Planteamiento de la ecuación $x+11=\dfrac{(x-13)^2}{2}$

Desarrollo de la ecuación:

$$x+11=\frac{(x-13)^2}{2}$$

$$2(x+11)=(x-13)^2$$ .... Se transpone el denominador 2.

$$2x+22=x^2-26x+169$$ .... Propiedad distributiva y desarrollo de binomio.

$$-x^2+2x+26x+22-169=0$$ .... Se transponen términos al miembro izquierdo.

$$-x^2+28x-147=0$$ .... Se reducen términos semejantes.

$$(-1)-x^2+28x-147=0(-1)$$ .... Se multiplican por (-1) ambos miembros.

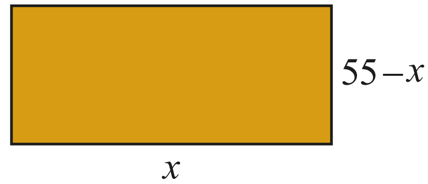
$$x^2-28x+147=0$$

$$x_1=\frac{-(-28)+\sqrt{(-28)^2-4(1)(147)}}{2(1)}=\frac{28+\sqrt{784-588}}{2}=\frac{28+\sqrt{196}}{2}=\frac{28+14}{2}=\frac{42}{2}=21$$

$$x_2=\frac{-(-28)-\sqrt{(-28)^2-4(1)(147)}}{2(1)}=\frac{28-\sqrt{784-588}}{2}=\frac{28-\sqrt{196}}{2}=\frac{28-14}{2}=\frac{14}{2}=7$$

R: La edad actual de Pedro es de 21 años. (Se desestima x_2, ya que no podría tener 7 años si antes tenía 13 años.)

- Para cercar una finca rectangular de 750 m² se han utilizado 110 m de cerca. Calcule las dimensiones de la finca.



Interpretación de datos
Semiperímetro 55
Base x
Altura 55 x
Planteamiento de la ecuación $x\cdot(55-x)=750$

Desarrollo de la ecuación:

$$x\cdot(55-x)=750$$

$$55x-x^2=750$$ ………………... Se aplica la propiedad distributiva.

$$-x^2+55x-750=0$$ ………………... Se transponen términos al miembro izquierdo.

$$(-1)-x^2+55x-750=0(-1)$$ ………………... Se multiplica por (-1) ambos miembros.

$$x^2-55x+750=0$$

R: Las dimensiones de la finca son 30 m y 25 m.

Resuelva en su cuaderno de forma clara y ordenada los problemas planteados.

a) Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Encuentre la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m²

b) Dos números enteros positivos se diferencian en 6 unidades y la suma de sus cuadrados es 218. ¿Cuáles son esos números?

¡Valorando lo aprendido!

Realice de forma clara y ordena en su cuaderno de trabajo cada una de las actividades planteadas en esta sección.

1) Coloque los elementos de la formula general al lugar que le corresponda.

$\pm$ $2a$ $-4ac$ b^2 $-b$

$$x = \frac{\square \; \square \sqrt{\square \; \square}}{\square}$$

2) Para resolver la ecuación $x^2 - 9x + 18 = 0$ la aplicación correcta de la fórmula es:

a) $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(18)}}{2(1)}$

b) $x = \dfrac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(18)}}{2(1)}$

c) $x = \dfrac{+9 \pm \sqrt{-9^2 - 4(1)(18)}}{2(1)}$

3) Las soluciones de la ecuación son:

a) -3 y 4

b) 3 y -4

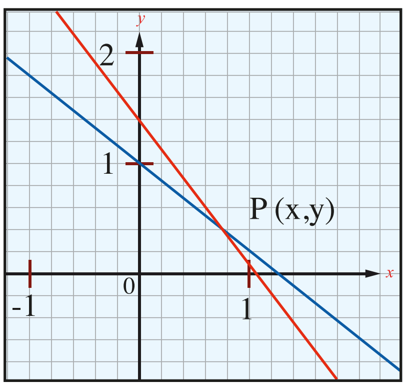
c) No tiene soluciones en los reales

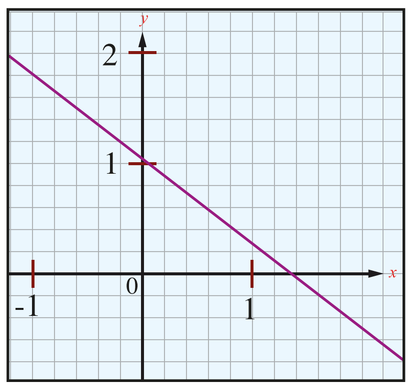
Secuencia 5
SISTEMAS Y ECUACIONES

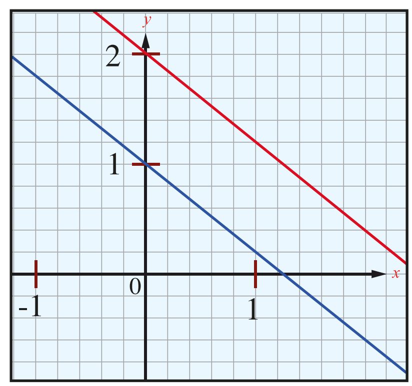
¿Hacia dónde vamos?

Cada ecuación con dos incógnitas es una igualdad en la que intervienen dos variables, que genéricamente se designan por x y y. Puede ser de cualquier grado y suele tener infinitas soluciones, que son pares de valores (uno para x y otro para y) que cumplen la igualdad. Esas soluciones pueden encontrarse expresando una incógnita en función de la otra: despejando. Además, se pueden utilizar diversos métodos en la búsqueda de la solución de las incógnitas.

Se puede decir entonces que una combinación de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas o variables en un sistema, lleva a la solución de un problema.







RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Definir correctamente un sistema de ecuaciones lineales en dos variables.
2. Encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales en dos variables por el método de reducción por suma o resta.
3. Resolver y encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales en dos variables por el método de sustitución.

¿Qué conoce de esto?

Una **ecuación** es una igualdad que se cumple para algunos valores de las letras.

Los miembros de una ecuación son cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo igual.

Los términos son los sumandos que forman los miembros.

Primer miembro   Segundo miembro

$$2x - 3 = 3x + 2$$

Términos

Las incógnitas son las letras que aparecen en la ecuación.

Las soluciones son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

El grado de una ecuación es el mayor de los grados de los monomios que forman sus miembros.

¿Cuál es la dificultad?

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

1. Encontrar la solución del siguiente sistema $\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x + 6y = 12 \end{cases}$

2. Comprobar si $x=8$ y $y=3$ son soluciones del sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 5y = 23 \end{cases}$

¿Qué piensan otros?

Ecuación lineal y un sistema

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma: $ax + by = c$, donde $a,b,$ y c son números (coeficientes) y las incógnitas son x y y.

Gráficamente representa una recta en el plano.

Ejemplo.

Representar la recta $2x + y = 1$

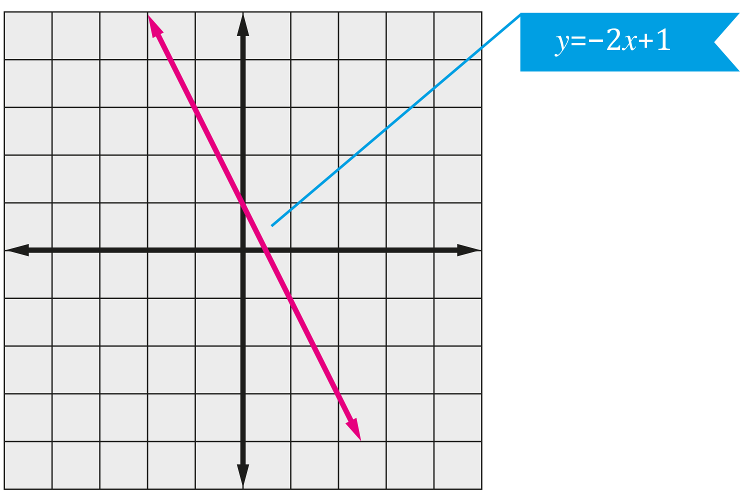
Para representar una recta en el plano

1. Se despeja y. Y se obtiene la ecuación $y = -2x + 1$

2. Se hace una tabla de valores dando los valores que queramos a la x

x	-2	-1	0	1	-2
y	5	3	1	-1	-3

3. Representamos los puntos en el plano y los unimos.



Las soluciones de la ecuación anterior son los puntos por los que pasa la recta, por lo tanto, tiene infinitas soluciones, que se han ido encontrando dando valores a la x. Algunas de estas soluciones son: (-2,5),(-1,3),(0,1),(1,-1),(2,-3),(3,-5).

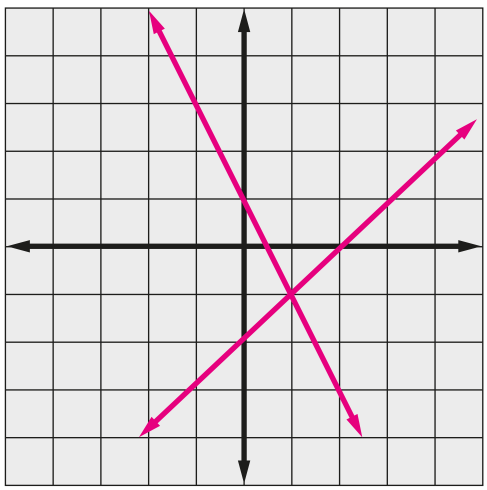
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común.

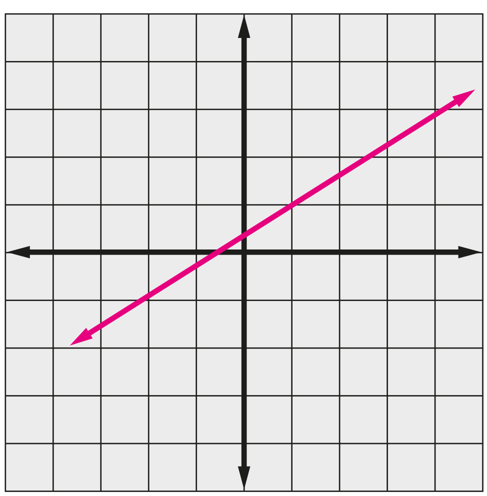
Una solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de valores (xi,yi) que verifican las dos ecuaciones a la vez. Resolver el sistema es encontrar una solución.

Clasificación de sistemas
En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada ecuación representa una recta en el plano. Discutir un sistema es estudiar la situación de estas rectas en el plano, que pueden ser:

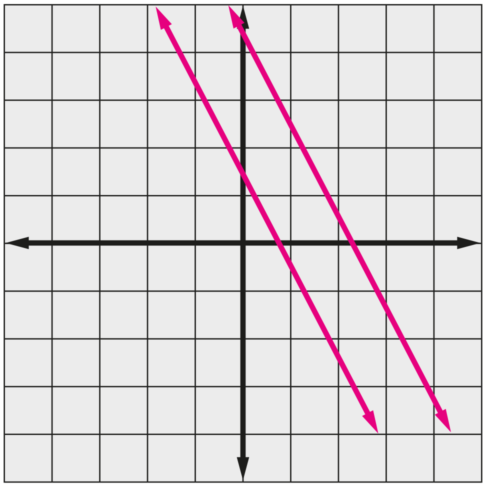
- Secantes, el sistema tiene solución única, se llama **Compatible Determinado**.



- Coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones, es **Compatible Indeterminado.**



- Paralelas, el sistema no tiene solución, se llama **Incompatible**.



Métodos de solución
Para resolver un sistema de ecuaciones se utiliza cualquiera de los tres métodos siguientes:

- **Método de reducción** Consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplica una de las ecuaciones o ambas por un número de modo que los coeficientes de x o y sean iguales y de signo contrario.
- **Método de sustitución** Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, se llega así a una ecuación de primer grado con una sola incógnita; hallada ésta se calcula la otra.
- **Método de igualación** Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas. De nuevo obtenemos una ecuación de primer grado con una sola incógnita.

Conteste en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada el enunciado planteado en esta sección.
- Construya un mapa conceptual con los elementos principales que destacan en el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

¿Qué piensan otros?

Método de reducción por suma o resta

Antes de desarrollar este método recuerde que dada una ecuación $ax+by=c$, otra equivalente (con las mismas soluciones) se puede obtener multiplicando toda la ecuación por un número distinto de cero. Así las siguientes ecuaciones tienen las mismas soluciones

$$2x + y = 1, \quad 10x + 5y = 5, \quad 4x + 2y = 2, \quad x + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$$

Para aplicar el método de reducción se multiplicarán las dos ecuaciones o una de ellas por un número conveniente de manera que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente cambiado de signo en las dos ecuaciones.

1. Se elige la incógnita (la que parezca más fácil)
2. Se hace que los coeficientes de dicha incógnita en las dos ecuaciones sean opuestos.
3. Se suman las dos ecuaciones quedando una ecuación con una incógnita que se resuelve.
4. Se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

Observe cómo se resuelve este sistema de dos formas:
Eligiendo primero la incógnita x

Para que tengan coeficientes opuestos se multiplica la primera ecuación por (-2)

$$\begin{cases} (-2)(x+y)=2(-2) \\ 2x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=-4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

Se suman las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{rl} & -\cancel{2x}-2y=-4 \\ + & \cancel{2x}+y=5 \\ \hline & -y=1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} (-1)-y=1(-1) \\ y=-1 \end{array}$$

Se sustituye el valor en una ecuación

$$x+(-1)=2 \Rightarrow x=2+1 \Rightarrow x=3$$

Solución

$$\boxed{(x=3,\ y=-1)}$$

Ahora eligiendo la incógnita y
Para que tengan coeficientes opuestos se multiplica la segunda ecuación por (-1)

$$\begin{cases} x+y=2 \\ (-1)(2x+y)=5(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ -2x-y=-5 \end{cases}$$

Se suman las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{rl} & x+\cancel{y}=2 \\ + & -2x-\cancel{y}=-5 \\ \hline & -x \quad =-3 \end{array} \qquad \begin{aligned} (-1)-x&=-3(-1) \\ x&=3 \end{aligned}$$

Se sustituye el valor en una ecuación

$$(3)+y=2 \Rightarrow y=2-3 \Rightarrow y=-1$$

Solución $\boxed{(x=3,\ y=-1)}$

Comprobación
Para comprobar las respuestas se sustituye en el sistema los valores de x e y en ambas ecuaciones.

Sistema de ecuaciones original
$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

Sustituyendo $x=3$ e $y=-1$ en el sistema original
$$\begin{aligned} (3)+(-1)&=2 \\ 2(3)+(-1)&=5 \end{aligned}$$

Resolviendo la operación resultante
$$\begin{aligned} 2&=2 \\ 5&=5 \end{aligned}$$

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ x-2y=4 \end{cases}$

Observe cómo se resuelve este sistema de dos formas:

- Eligiendo primero la incógnita x
- Para que tengan coeficientes opuestos se multiplica la segunda ecuación por (-2)

$$\begin{cases} 2x+4y=0 \\ (-2)(x-2y)=(4)(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y=0 \\ -2x+4y=-8 \end{cases}$$

- Se suman las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{r} \cancel{2x}+4y=0 \\ +\ \ -\cancel{2x}+4y=-8 \\ \hline 8y=-8 \end{array} \qquad y=\frac{-8}{8} \qquad y=-1$$

- Se sustituye el valor en una ecuación $x-2(-1)=4 \Rightarrow x=4-2 \Rightarrow x=2$
- Solución $\boxed{(x=2,\ y=-1)}$

Comprobación

Sistema de ecuaciones original	$\begin{cases} 2x+4y=0 \\ x-2y=4 \end{cases}$
Sustituyendo x=2 e y=-1 en el sistema original	$2(2)+4(-1)=0$ $2-2(-1)=4$
Resolviendo la operación resultante	$0=0$ $4=4$

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$

- Eligiendo primero la incógnita x
- Para que tengan coeficientes opuestos se multiplica la primera ecuación por (-2)

$$\begin{cases} (-2)(x+2y)=1(-2) \\ 2x+4y=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x-4y=-2 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$$

- Se suman las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{r} -2x-4y=-2 \\ +\quad 2x+4y=3 \\ \hline 0x+0y=1 \end{array} \rightarrow 0=1$$

Si llegas a 0 = k
(k distinto de cero)
no hay solución

El resultado es imposible, por tanto, **este sistema no tiene solución**.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=1 \end{cases}$

- Eligiendo primero la incógnita x
- Para que tengan coeficientes opuestos se multiplica la segunda ecuación por (-3)

$$\begin{cases} 3x-6y=3 \\ (-3)(x-2y)=1(-3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-6y=3 \\ -3x+6y=-3 \end{cases}$$

- Se suman las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{r} 3x-6y=3 \\ -3x+6y=-3 \\ 0x+0y=0 \end{array} \rightarrow 0=0$$

Si llega a 0 = 0
entonces hay
infinitas soluciones

Este sistema tiene infinitas soluciones

¡A trabajar!

Resuelva en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada cada uno de los ejercicios planteados en esta sección por el método de reducción.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x - 3y = 5 \\ 3x + 6y = 5 \end{cases}$

¿Qué piensan otros?

Método de sustitución

1) Se despeja una incógnita de una ecuación (la que parezca más fácil de despejar).
2) Se sustituye en la otra ecuación, quedando una ecuación de primer grado.
3) Se resuelve la ecuación.
4) El valor obtenido para la incógnita se sustituye en una de las ecuaciones y operando se saca la otra.

Este método resulta fácil de aplicar cuando una de las incógnitas tiene coeficiente igual a uno o cuando una de las incógnitas te la dan ya despejada.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

Solución

Despejando x de la primera ecuación …… $x=2-y$

Sustituyendo ………………………………… $2(2-y)+y=5$

Resolviendo la ecuación …………………....... $4-2y+y=5$

$$-y=5-4$$

$$-y=1 \Rightarrow (-1)-y=1(-1) \Rightarrow y=-1$$

Sustituyendo el valor obtenido en una ecuación…………………………………………………

$$x+(-1)=2$$
$$x-1=2$$
$$x=2+1$$
$$x=3$$

O bien sustituyendo en la ecuación del primer paso…………………………………………………

$$x=2-y$$
$$x=2-(-1)$$
$$x=3$$

Solución $\boxed{(x=3,\ y=-1)}$

Comprobación
Si se quiere comprobar que la solución es correcta se sustituye en las ecuaciones iniciales:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=5 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 3+(-1)=2 \\ 2(3)+(-1)=5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2=2 \\ 5=5 \end{matrix}$$

Gráficamente las dos rectas se cortan en el punto (3,-1)

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$

Solución
Despejando de la primera ecuación …….. $x=1-2y$

Sustituyendo ………………………………… $2(1-2y)+4y=3$

Resolviendo la ecuación …………………... $2-4y+4y=3$

$$0y=3-2$$
$$0=1$$

Esto es imposible, **el sistema no tiene solución (las rectas son paralelas).**

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

Solución

Despejando x de la segunda ecuación …………………… $x = 1 + 2y$

Sustituyendo ……………………………………………… $3(1+2y) + 4y = 3$

Resolviendo la ecuación …………………………………

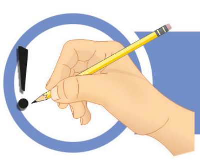
$$3 + 6y - 6y = 3$$
$$0y = 3 - 3$$
$$0 = 0$$

Hay infinitas soluciones (las rectas son coincidentes).

Para encontrar soluciones de valores a una de las incógnitas despeje la otra.

¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**El sistema"**, este interesante programa muestra las diversas soluciones que puede tener un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Además, se muestran soluciones por los métodos de reducción y sustitución.



¡A trabajar!

Resuelva en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada cada uno de los ejercicios planteados en esta sección por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$

¡Valorando lo aprendido!

Resuelva en grupos de trabajo la siguiente actividad y exponga sus resultados en el salón de clases.

Resolver y graficar el resultado del siguiente sistema de ecuación $\begin{cases} x = 2y + 5 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases}$

Secuencia 6
PLANTEAMIENTOS Y SOLUCIONES

¿Hacia dónde vamos?

Algunos problemas pueden resolverse empleando sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Muchas veces se pueden resolver utilizando una sola ecuación con una incógnita, pero el planteamiento de dicha ecuación es más complicado que plantear un sistema de los que se están estudiando.

Para resolver un problema mediante un sistema, hay que traducir al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado y después resolver el sistema planteado.

Comience por leer detenidamente el enunciado hasta asegurarse de que se comprende bien lo que se ha de calcular y los datos que dan. Una vez resuelto el sistema no se olvide de dar la solución al problema.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales en dos variables por el método de igualación.
2. Plantear correctamente un sistema de ecuaciones del lenguaje común al lenguaje algebraico.
3. Resolver problemas que impliquen sistemas de ecuaciones lineales en dos variables.

¿Qué conoce de esto?

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común.

Clasificación de sistemas

- **Compatible Determinado**: el sistema tiene solución única.
- **Compatible Indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones.
- **Incompatible**: el sistema no tiene solución.

Resolver sistemas

Para resolver un sistema de ecuaciones se utiliza cualquiera de los tres métodos siguientes:

- Método de reducción
- Método de sustitución
- Método de igualación

¿Cuál es la dificultad?

Resuelva el ejercicio y el problema planteado en esta sección:

1. Encontrar la solución del siguiente sistema por el método de igualación:

$$\begin{cases} 3x+2y=11 \\ 4x-5y=7 \end{cases}$$

2. En un corral hay conejos y gallinas. En total hay 14 cabezas y 38 patas.

¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en el corral?

¿Qué piensan otros?

Método de igualación

1. Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones (la que le parezca más fácil de despejar)

2. Se igualan las expresiones quedando una ecuación con una incógnita

3. Se resuelve la ecuación.

4. El valor obtenido para la incógnita lo sustituye en una de las ecuaciones y operando saca la otra. También se puede sustituir en una de las dos ecuaciones obtenidas en el punto 1.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

Solución
Despejando y de la dos ecuaciones ………………………....... $y = 2 - x$

$y = 5 - 2x$

Igualando ……………………………………...…………............ $2 - x = 5 - 2x$

Resolviendo la ecuación …………………………….................. $-x + 2x = 5 - 2$

$x = 3$

Sustituyendo el valor obtenido en una ecuación …................. $3 + y = 2$

$y = 2 - 3$

$y = -1$

O bien sustituyendo en la ecuación del primer paso...…......... $y = 2 - 3$

$y = -1$

Solución.. $\boxed{(x = 3,\ \ y = -1)}$

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

Solución
Despejando y de la dos ecuaciones ………………………........

$x = 1 - 2y$

$x = \dfrac{3 - 4y}{2}$

Igualando ………………………………... $1 - 2y = \dfrac{3 - 4y}{2}$

Resolviendo la ecuación ……………….. $2(1 - 2y) = 3 - 4y$

$2 - 4y = 3 - 4y$

$-4y + 4y = 3 - 2$

$0y = 1$

$0 = 1$

Esto es imposible, el sistema no tiene solución (las rectas son paralelas).

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=1 \end{cases}$

Solución

Despejando y de las dos ecuaciones ....

$$x=\frac{3+6y}{3}$$

$$x=1+2y$$

Igualando ....

$$\frac{3+6y}{3}=1+2y$$

Resolviendo la ecuación ....

$$3+6y=(1+2y)3$$

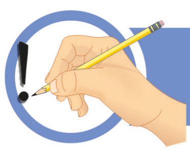
$$3+6y=3+6y$$

$$-6y+6y=3-3$$

$$0y=0$$

Hay infinitas soluciones..

$$0=0$$



¡A trabajar!

Resuelva en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada cada uno de los ejercicios planteados en esta sección por el método de igualación.

a) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ x-2y=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+2y=11 \\ 4x-5y=7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=\dfrac{2y}{5} \\ x=4y-9 \end{cases}$

¿Qué piensan otros?

Problemas resueltos

Para resolver estos problemas se pueden seguir tres pasos:

1. Elegir las incógnitas x y y que siempre coinciden con lo que se nos pregunta en el problema.
2. Plantear dos ecuaciones traduciendo el problema al lenguaje algebraico
3. Resolver el sistema.

Por último, conviene siempre comprobar que la solución es correcta o al menos que tiene sentido.

Ejemplo:
1. En un parqueo hay 55 vehículos entre carros y motos. Si el total de ruedas es de 170. ¿Cuántos carros y cuántas motos hay?

Resolución

1. Se eligen las incógnitas que coinciden con lo que nos preguntan: "¿Cuántos carros y cuántas motos hay?"

x = número de carros
y = número de motos

2. Se plantean las dos ecuaciones:

1ª Ecuación: Como hay 55 vehículos en total $x + y = 55$

2ª Ecuación: Hay 170 ruedas entre todos los vehículos. Un carro tiene 4x ruedas luego carros tendrán ruedas. Una moto tiene 2 ruedas luego motos tendrán ruedas. En definitiva, la ecuación que da el total de ruedas es $4x + 2y = 170$

El sistema es el siguiente: $\begin{cases} x + y = 55 \\ 4x + 2y = 170 \end{cases}$

Por reducción:

Eligiendo primero la incógnita x

Para que tengan coeficientes opuestos se multiplica la primera ecuación por (-4)

$$\begin{cases} (-4)(x+y) = 55(-4) \\ 4x + 2y = 170 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -4x - 4y = -220 \\ 4x + 2y = 170 \end{cases}$$

Se suman las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{rl} -\cancel{4x}-4y & =-220 \\ +\quad \cancel{4x}+2y & =170 \\ \hline -2y & =-50 \end{array} \qquad y=\frac{-50}{-2} \qquad y=25$$

Se sustituye el valor en una ecuación $x+25=55 \rightarrow x=55-25 \rightarrow x=30$

Solución $\boxed{(x=30,\ y=25)}$

1. Entre todos los vehículos suman 55. Efectivamente $30+25=55$
2. El número de ruedas es 170. Efectivamente $30\cdot4+2\cdot25=120+50=170$

Ejemplo:

2. Se ha comprado un DVD y ha costado 105 Lempiras. Se he pagado con 12 billetes de dos tipos, de 5 Lps y de 10 Lps. ¿Cuántos billetes de cada clase se han entregado?

1. Se eligen las incógnitas

x =billetes de 5 Lps

y = billetes de 10 Lps

2. Se plantean las dos ecuaciones:

1ª Ecuación: (billetes) se utilizan 12 billetes en total $x+y=12$

2ª Ecuación: (dinero) cuestan 105 Lps $5x+10y=105$

El sistema es el siguiente: $\begin{cases} x+y=12 \\ 5x+10y=105 \end{cases}$

Por sustitución:

Despejando de la primera ecuación …………………… $x=12-y$

Sustituyendo y resolviendo ……………………..................

$$5(12-y)+10y=105$$
$$60-5y+10y=105$$
$$5y=105-60$$
$$5y=45$$
$$y=\frac{45}{5}=9$$

Sustituyendo el valor obtenido en una ecuación..……….

$$x=12-9$$
$$x=3$$

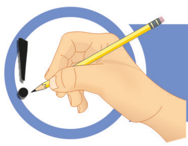
Solución.. $\boxed{(x=3,\ y=9)}$

1. Son 12 billetes en total $3+9=12$

2. Se pagan 105 Lps con esos billetes $3\cdot5+9\cdot10=15+90=105$

¡Descúbralo en la tele!

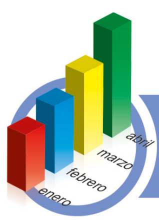
En esta sección se presentará el programa de televisión denominado “**Problemas en parejas”,** este interesante programa muestra la solución de problemas de la vida cotidiana aplicando el uso de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.



¡A trabajar!

Resolver en su cuaderno de forma clara y ordenada cada uno de los problemas planteados.

1. El perímetro de un rectángulo es 64cm y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6cm. Calcule las dimensiones de dicho rectángulo.
2. La edad de Manuel es el doble de la edad de su hija Ana. Hace diez años, la suma de las edades de ambos era igual a la edad actual de Manuel. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?
3. Un empresario quiere distribuir una gratificación entre sus empleados. Se da cuenta de que si da a cada uno 80 Lps le sobran 20 Lps y si da a cada uno 90 Lps le faltan 40 Lps. ¿Cuántos empleados tiene?, ¿Cuánto dinero tiene para repartir?



¡Valorando lo aprendido!

En su cuaderno de trabajo resuelva el problema planteado utilizando el método de igualación para resolver un sistema de ecuaciones lineales en dos variables.

- Indira ha comprado un abrigo que estaba rebajado un 15%. Roxana ha comprado otro abrigo 25 Lps más caro, pero ha conseguido una rebaja del 20 %, con lo que solo ha pagado 8 Lps más que Indira. ¿Cuál era el precio de cada abrigo?

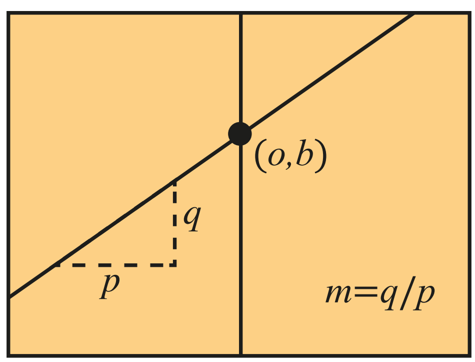
Secuencia 7
¿CRECE O DECRECE?

¿Hacia dónde vamos?

Una función es una representación algebraica de un fenómeno social o natural; ésta permite predecir el comportamiento de dicho fenómeno si se altera alguna de sus condiciones. Así, la función lineal se convierte en un concepto básico no sólo para las Matemáticas sino para la investigación en general.

A través de la función lineal se pueden analizar fenómenos como: la relación entre el costo unitario de un producto y la cantidad que se puede comprar con "x" cantidad de dinero; la distancia que recorre la luz en determinado tiempo; el crecimiento de una población de moscas de la fruta, en condiciones óptimas, en un tiempo dado; los intereses que se pagarán por un préstamo a plazos; etc.

La función lineal es un elemento importante en muchas investigaciones, dado que permite mantener una actitud científica frente al fenómeno que se estudia, y posibilita elaborar interpretaciones objetivas del mismo.



$$y = mx + b$$

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

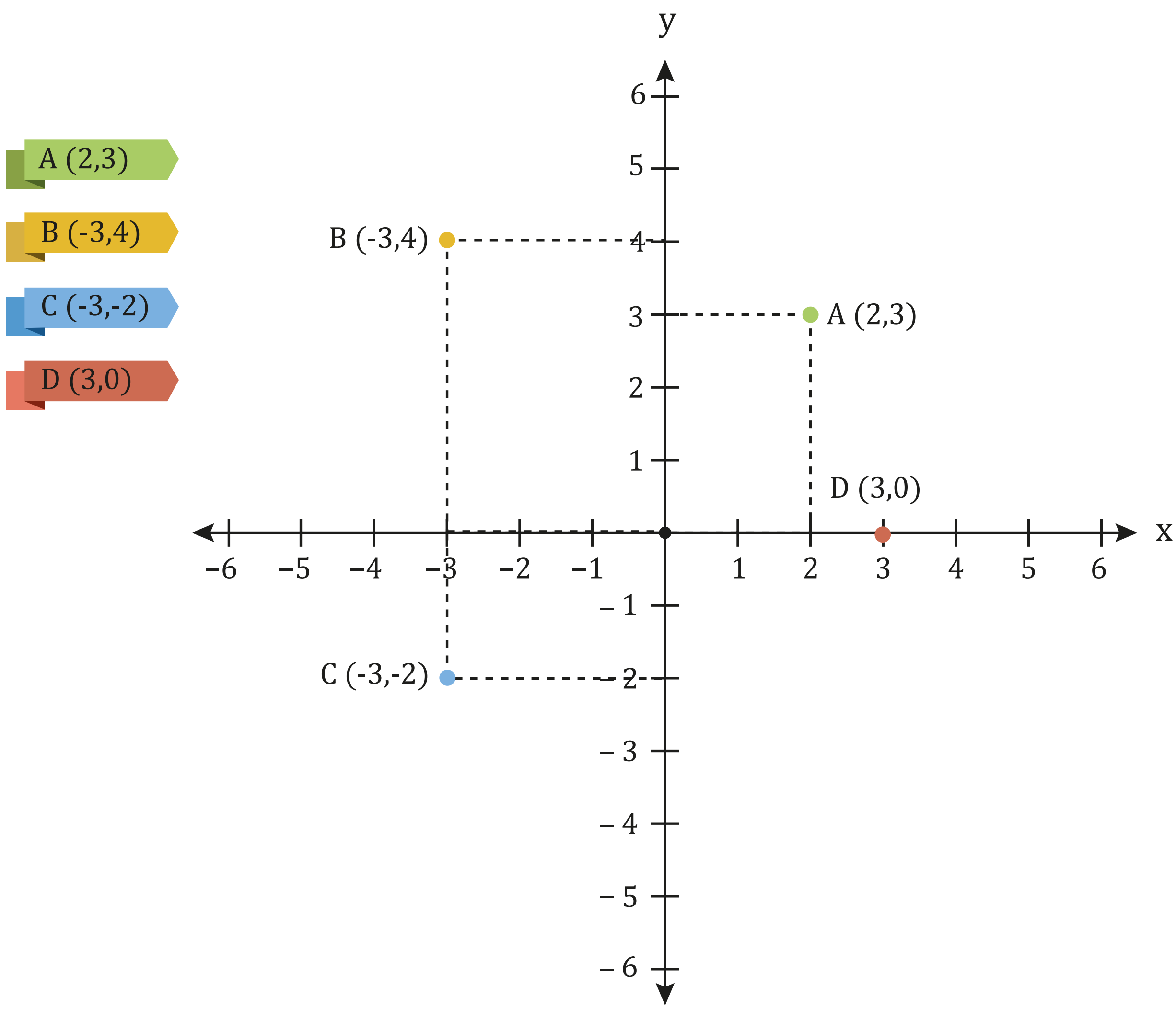
Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Definir correctamente una función lineal.
2. Graficar funciones lineales de primer grado en el plano cartesiano.

¿Qué conoce de esto?

En matemáticas, un par ordenado es una pareja de objetos matemáticos, en la que se distingue un elemento y otro. El par ordenado cuyo primer elemento es A y cuyo segundo elemento es B se denota como (a, b).

Un par ordenado (a, b) no es el conjunto que contiene a y b, denotado por {a, b}. Un conjunto está definido únicamente por sus elementos, mientras que en un par ordenado el orden de estos es también parte de su definición. Por ejemplo, los conjuntos {0, 1} y {1, 0} son idénticos, pero los pares ordenados (0, 1) y (1, 0) son distintos.



¿Cuál es la dificultad?

Responda los siguientes enunciados, preguntas o problemas:

1. ¿Qué es la razón de cambio?
2. ¿Qué es el plano cartesiano?
3. Graficar los puntos en el plano cartesiano A= (2,3), B= (-4,-2), C= (-1,3), D= (6,-4)

¿Qué piensan otros?

Función de primer grado

El concepto de función implica la asociación entre los elementos de dos conjuntos, que porlo general son números, y cuya correspondencia se establece mediante una regla de asociación.

Algunos sucesos que ocurren en su entorno son ejemplos sencillos de funciones:

- Cuando se viaja en autobús o automóvil, en un tiempo determinado se recorren distancias que dependen de la velocidad con que se desplaza el vehículo. La distancia recorrida **está en función** de la velocidad, y como se sabe, la regla de asociación es: *distancia = velocidad por tiempo.*

- La temperatura o el grado de humedad ambiente a lo largo de un día depende de la hora; es decir, cada hora está asociada a una determina temperatura o cierto grado de humedad, de manera que la temperatura o humedad **están en función** de la hora del día.

Ahora analice que es una **relación,** ya que establece la correspondencia o asociación entre los elementos de dos conjuntos de objetos.

Ejemplo:

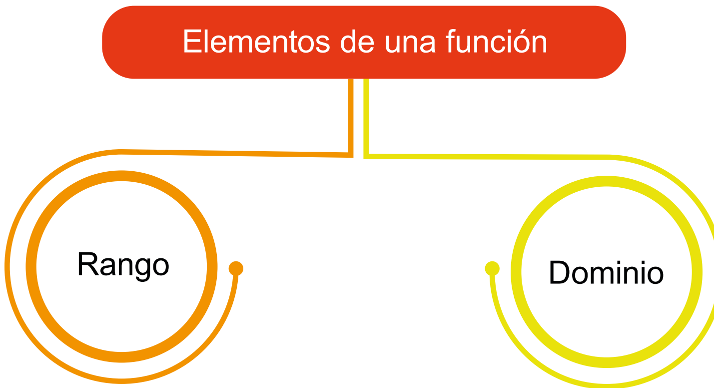
A cada persona se le asocia:	una edad,
	una estatura,
	un peso, etc.
A cada automóvil se le asocia:	un modelo,
	un número de motor,
	un número de placas, etc.

Se puede decir que una **relación** es una **regla de correspondencia** que se establece entre los elementos de un primer conjunto que se llama **dominio** con los elementos de un segundo conjunto que se llama **contradominio, rango** o **recorrido**, de tal manera que a cada elemento del dominio le corresponde uno o más elementos del rango.

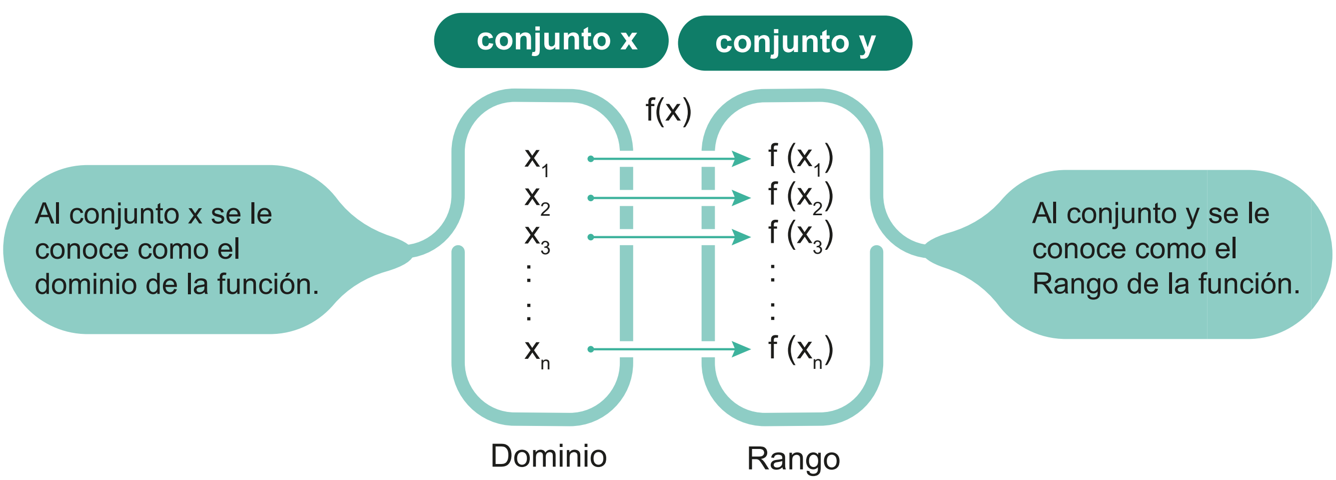
Con los ejemplos y el concepto de relación que se ha establecido se puede proceder a dar la definición de una función.

Definición de función

Si cada elemento de un conjunto se asocia con exactamente un elemento del conjunto a través de una **regla de asociación o correspondencia**, esto define una función f de la forma $y=mx+b$



Gráficamente f y $Rang\, f$, se pueden establecer cómo:



De lo anterior se puede deducir lo siguiente:

- Cada elemento del dominio se asocia con exactamente un elemento del rango, en otras palabras, un elemento del domino se asocia con uno y solo un elemento del rango.
- En una función, dos o más elementos del dominio pueden asociarse con el mismo elemento del rango, cumpliéndose lo mencionado en la definición acerca de que a un elemento del dominio solo lo corresponde un único elemento del rango. Sin embargo, el mismo elemento del domino no puede asociarse con dos elementos diferentes del rango.

Ejemplo de una situación en el que se utiliza funciones lineales.

- Existe una relación entre el número de minutos que se hablan cuando se realiza una llamada desde un celular de y el monto de dinero que se debe pagar. En cierta compañía si habla un minuto debe pagar 5 Lps, si habla 2 minutos 10 Lps, y así sucesivamente.

  Esta situación se puede representar como una función que relaciona la variable «número de minutos hablados» con la variable «monto que **se paga a la compañía».**

  En este caso, el número de minutos hablados será la variable independiente x, y el monto que ha de cancelar será la variable dependiente $y = f(x)$, porque depende del número de minutos que se hablan. Al representar esta situación como una función se tiene:

$$y = 5x$$

Valor que se paga a la compañía	Valor del minuto multiplicado por el número de minutos que se hablan

Si se analiza el **dominio** de esta función, es decir, el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente asignada por . Hay que centrarse en lo que esta variable representa, en este caso el número de minutos. Esto indica que puede tomar solo valores positivos y el cero, por lo tanto, el dominio de la función será el conjunto los números reales no negativos.

Si analizamos el **rango** de esta función, es decir, los valores que puede tomar la variable dependiente y o $f(x)$, se debe observar que el valor se obtiene de multiplicar 5 por x, donde x será un número positivo, debido a esto solo se obtendrán valores positivos y por lo tanto el rango de la función será el conjunto los números reales positivos.

¡A trabajar!

Resuelva en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada el enunciado siguiente:

1. Para el ejemplo: En una cabina de Internet, el servicio por hora cuesta L. 20.00:

a) Identifique la variable independiente y dependiente:

b) Elabore una tabla que relacione las variables tiempo y costo.

c) Exprese la ecuación que representa la función.

d) Realice la representación gráfica de la función:

¿Qué piensan otros?

Razón de cambio

El siguiente problema establece una función lineal, observe el procedimiento y conteste las preguntas:

Problema

Una lata de leche en polvo tiene un precio unitario de L. 35.00, construya una tabla de valores donde x represente el número de latas, "y" el costo total correspondiente; complétela y busque la fórmula algebraica que relacione el costo total en función del número de latas.

Numero de latas (x)	1	2		4	5	12
Precio unitario (y)	35	70	105	140		

¿Cuántas latas se podrán comprar con L. 105?
R/ ¡Exacto!... 3

¿Cuánto se pagará por 5 y 12 latas?
R/ Complete los valores que faltan.

Bien, ahora para cada pareja (x,y) efectúe el cociente $\frac{y}{x}$ ¿qué observa?.
Cociente o razón:

$$\frac{35}{1} = 35$$

$$\frac{70}{2} = 35$$

$$\frac{105}{3} = 35$$

¡Correcto!, la razón de cambio entre "x" y "y" es 35; es decir $\frac{y}{x}=$ constante

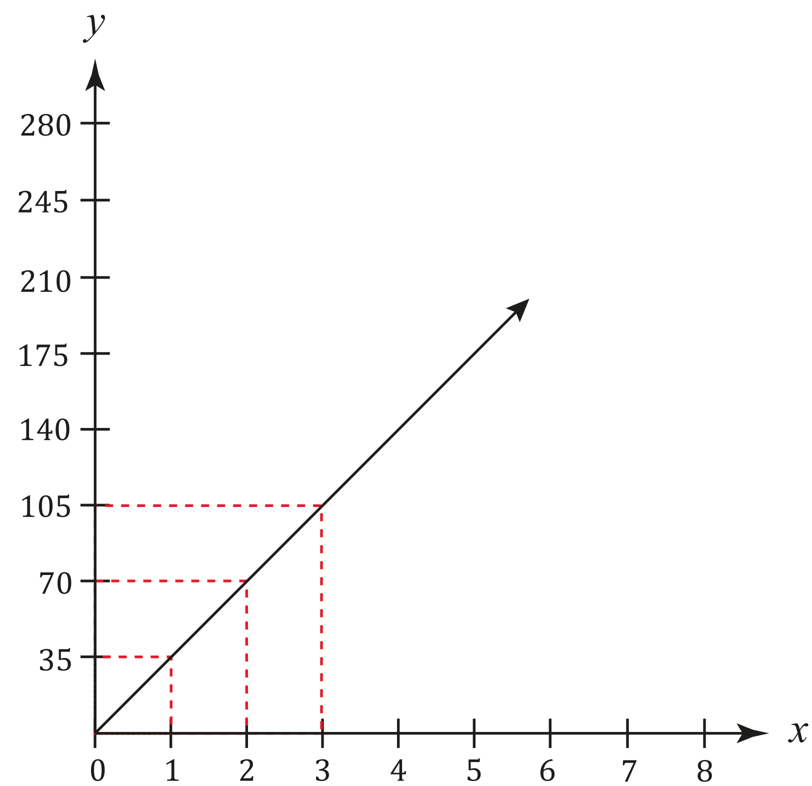
$$\frac{y}{x} = a$$

¿Recuerde cómo despejar la variable "y" de la ecuación anterior?

R/ En efecto, $y= mx$. Para este problema la ecuación sería: $y=35x$.

Esta fórmula o ecuación representa la regla de correspondencia entre el precio unitario de las latas y el costo de comprar cierto número de ellas. Una vez que se tiene la fórmula, se puede calcular el costo para cualquier número de latas.

La gráfica en el plano cartesiano del problema anterior sería así:



¡A trabajar!

Resolver en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada el problema planteado en esta sección:

1. El atleta estrella del CEB Alvaro Contreras corre diariamente a una velocidad promedio de 6km/h. Si el primer día corre durante 30 minutos y va aumentando 3 minutos en los días siguientes hasta llegar a 45 minutos, ¿qué distancia recorrió cada día?

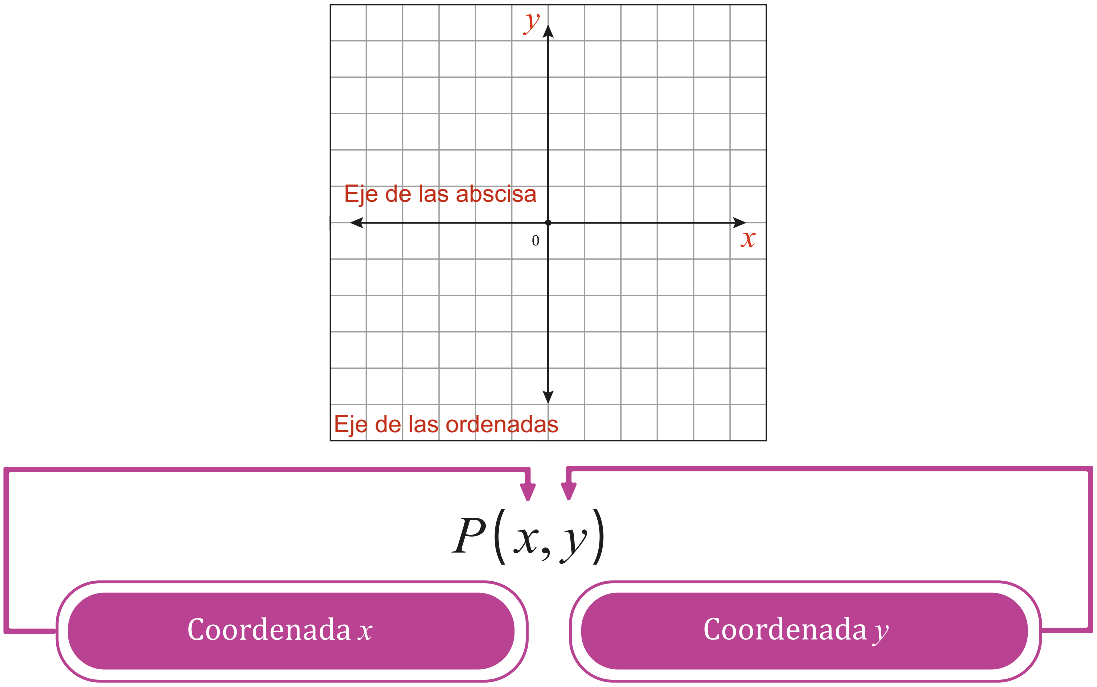
Nota: Para resolver el problema construya una tabla y establezca la solución.

¿Qué piensan otros?

Un punto del plano cartesiano $P\ (x,y)$ se dice que tiene coordenadas en el eje x (eje de las abscisas) y en el eje y (eje de las ordenadas).

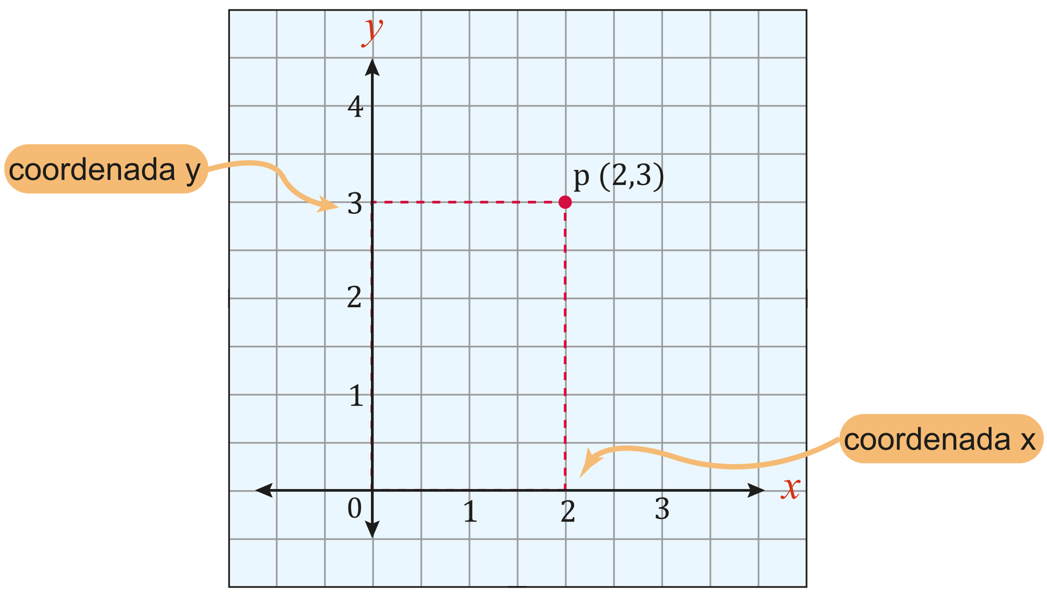
Al par ordenado (x,y), se le denomina coordenadas del punto en el plano cartesiano.
Un punto se ubica en el plano cartesiano en base a sus coordenadas.

Un punto se ubica en el plano cartesiano en base a sus coordenadas.

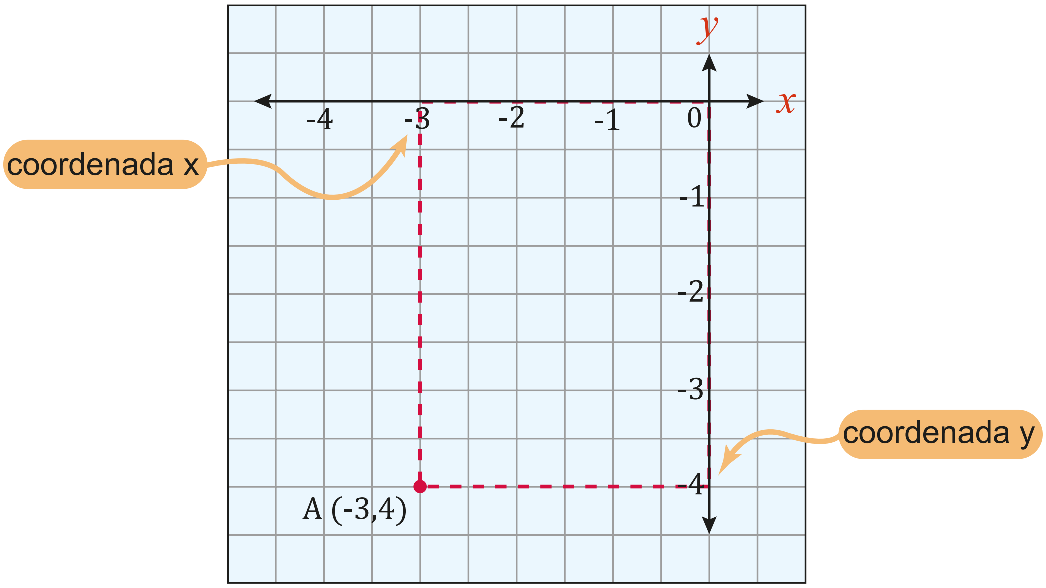


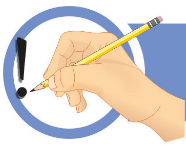
Ejemplos:

1. Observe el punto P(2,3), donde su coordenada x es 2 y su coordenada y es 3.



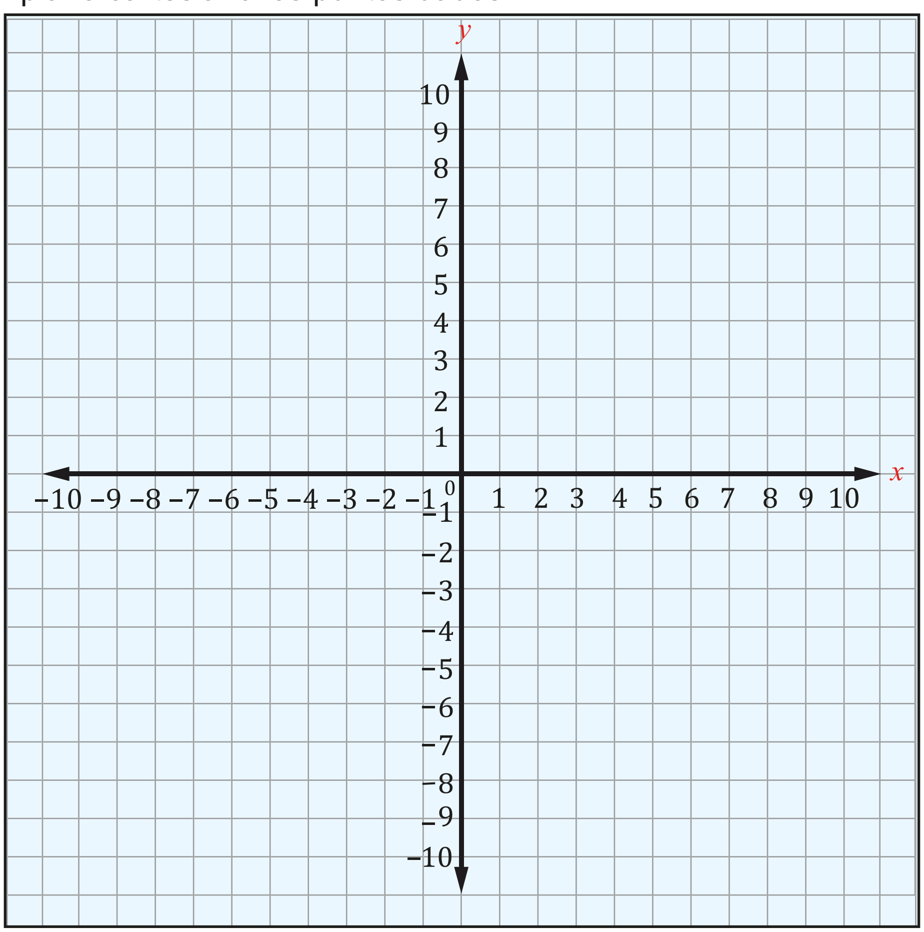
2. Observe el punto A (-3,-4), donde su coordenada x es -3 y su coordenada y es -4.





¡A trabajar!

Ubique en el plano cartesiano los puntos dados.



A (6,10)
B (-6,5)
C (10,10)
D (3,2)
E (8,-4)
F (-1,-1)
G (6,0)
H (0,-2)
I (-8,-10)
J (-10,7)

¿Qué piensan otros?

Gráfica de una función lineal

¿Cómo se grafica una función lineal?

a) Se construye una Tabla de valores: Se dan valores a la variable independiente luego se encuentra el valor de la variable dependiente y (desarrollando la ecuación).
b) Los puntos encontrados (x,y) se ubican en el Plano Cartesiano.
c) Se unen los puntos graficados por medio de una recta.

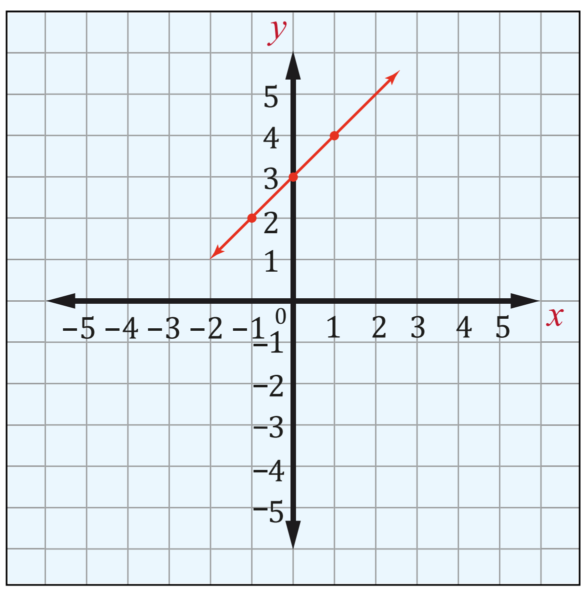
Ejemplo 1:

- Graficar la función: y = x + 3

Solución:

x	-1	0	1
y = x+3	y = (-1)+3=2	y = (0)+3=3	y = (1)+3=4

Los puntos encontrados $(-1,2),(0,3),(1,4)$ se ubican en el plano cartesiano y se unen con una línea:



Una función de primer grado se llama función lineal porque su gráfica es siempre una recta.

Ejemplo 2:

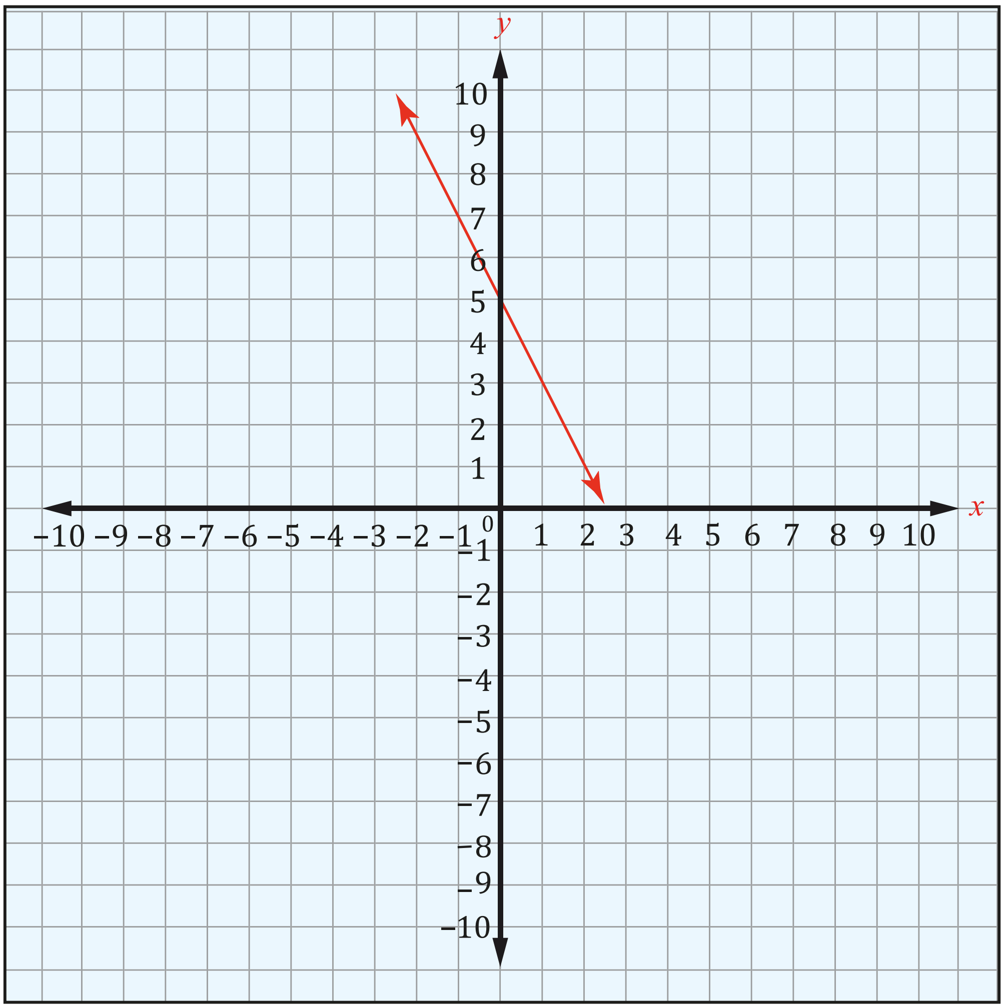
- Graficar la función: $y = -2x + 5$

Solución:

x	-2	-1	0
$y = -2x+3$	$y = -2(-2)+5=9$	$y = -2(-1)+5=7$	$y = -2(0)+5=5$

1	2
$y = -2(1)+5=3$	$y = -2(2)+5=1$

Los puntos encontrados $(-2,9),(-1,7),(0,5),(1,3),(2,1)$ se ubican en el plano cartesiano y se unen con una línea:



Una función de primer grado se llama función lineal porque su gráfica es siempre una recta

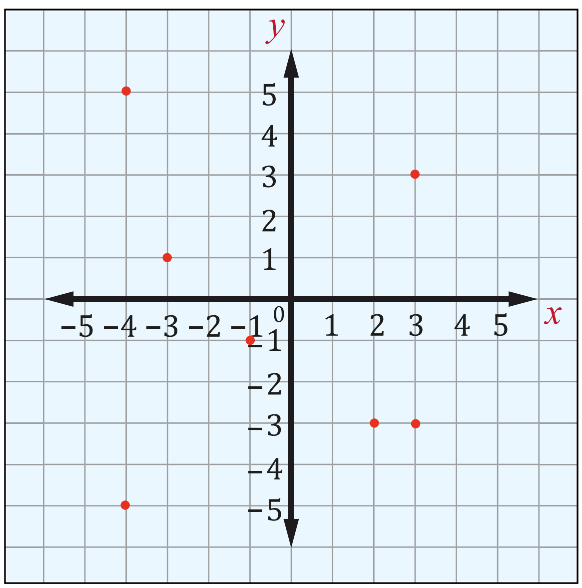
¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**La Gráfica",** este interesante programa muestra como graficar funciones lineales de primer grado en el plano cartesiano y algunas características fundamentales de estas gráficas.

¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada responda los ejercicios planteados en esta sección.

1. Graficar en el plano cartesiano la función $y=3x\text{-}4$
2. Colocar los pares ordenados (x,y) en cada punto del plano cartesiano.



¡Valorando lo aprendido!

Trabaje en forma clara y ordenada la actividad planteada en esta sección:

En grupos de trabajo pegue cuatro pliegos de papel bond color blanco (Uniendo únicamente las orillas), luego construya un plano cartesiano grande y exponga en su clase las siguientes funciones lineales de primer grado;

a) $y=3x+1$ b) $y=x$ c) $y=\text{-}x+6$

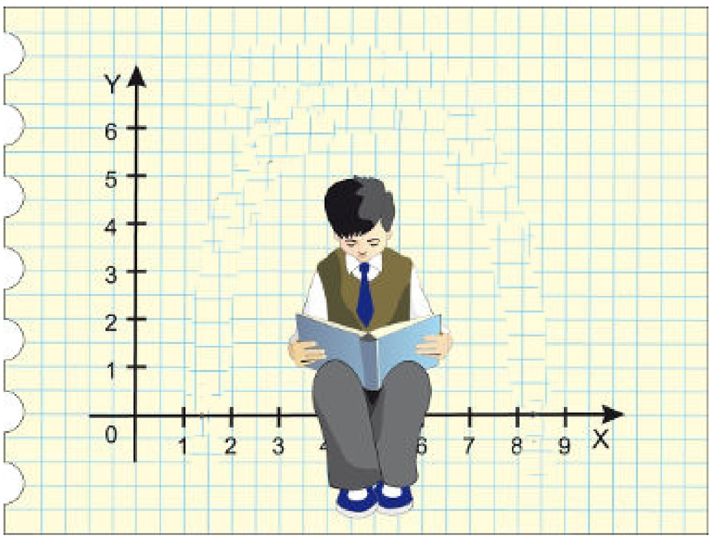
Secuencia 8
¡MÁS GRÁFICAS!

¿Hacia dónde vamos?

En economía, se habla sobre las leyes de la oferta y la demanda. La ley de la oferta se refiere a la cantidad de un producto que se lleva al mercado para su consumo. La de la demanda nos habla de la cantidad que el público compra de ese producto. Las relaciones entre estas dos variables son conocidas como FUNCIONES.

Si dos variables, x con y, están relacionadas de forma que, para cada valor asignado a x, queda determinado un valor de y : Se dice que y está en función de x.

Llamamos función lineal a una ecuación que tiene la siguiente forma $y = mx + b$



RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Graficar funciones lineales de primer grado utilizando la ordenada del origen y otros puntos.

2. Comprender la pendiente de una función lineal.

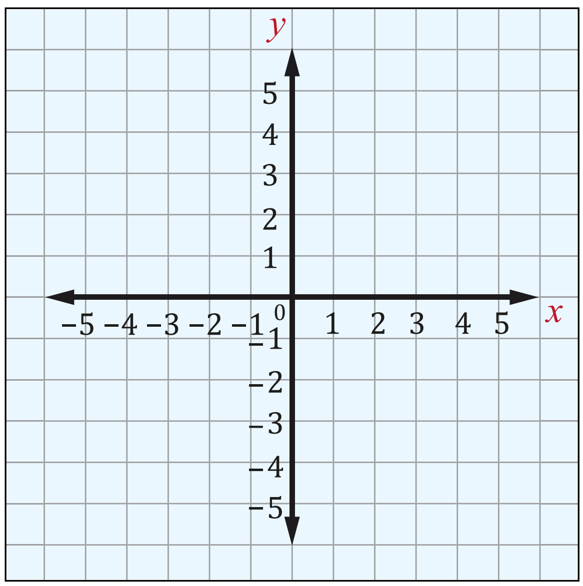
3. Analizar la relación entre rectas perpendiculares y paralelas de una función lineal.

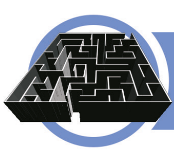
¿Qué conoce de esto?

La tabla de valores sirve para encontrar los pares ordenados (x,y) a partir de los valores proporcionados a x, y de esta forma graficar de forma muy sencilla la función lineal de primer grado que sea planteada.
Por lo general se utilizan los valores siguientes para x: $(-2, -1, 0, 1, 2)$. Y se representan de la siguiente forma:

x	-2	-1	0	1	2
$y = m\,x + b$					

Luego de tener los valores se ubica cada uno de los puntos de los pares ordenados encontrados en el plano cartesiano y se traza la recta.





¿Cuál es la dificultad?

Responda los siguientes enunciados, preguntas o problemas:

1. Graficar la función $y=-2x+4$ únicamente con dos puntos, cuando $x=0$ y cuando y=0.

2. Identifique la pendiente y la ordenada al origen de la siguiente función $y=5x-16$.

¿Qué piensan otros?

Gráfica de una recta a partir de dos puntos.
Para poder graficar una función lineal o afín, se requiere construir una tabla de valores con al menos dos puntos de coordenadas, los puntos más relevantes son cuando $x=0$ y cuando $f(x)=0$.

Cuando $x=0$ es el punto en el cual la recta corta al eje de las ordenadas.
Cuando $y=f(x)=0$ es el punto en el cual la recta corta al eje de las abscisas.

Ejemplo.
Graficar la función $y=-2x+4$

1) Se determinarán los dos puntos más relevantes de la función lineal.

a) Cuando $x=0$

$$\begin{aligned} f(0) &= -2(0)+4 \\ &= 0+4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

El primer punto encontrado corresponde al par ordenado $(0,4)$

b) Busquemos el segundo punto, cuando $f(x)=y=0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x+4 \\ 0 &= -2x+4 \\ -4 &= -2x \\ \frac{-4}{-2} &= x \end{aligned} \qquad x=\frac{-4}{-2}=2$$

Se iguala la función a cero y se despeja.

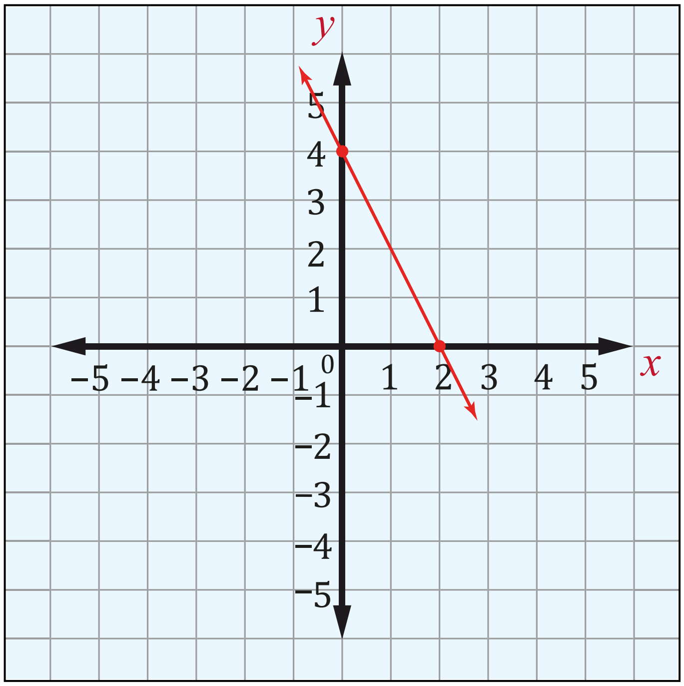
El segundo punto encontrado corresponde al par ordenado (2,0)

¿Qué dice la ley?

Por dos puntos en el plano pasa una única recta.

d) Se ubican los puntos obtenidos en el plano cartesiano y se traza la recta que pasa por los puntos:

x	y
0	4
2	0

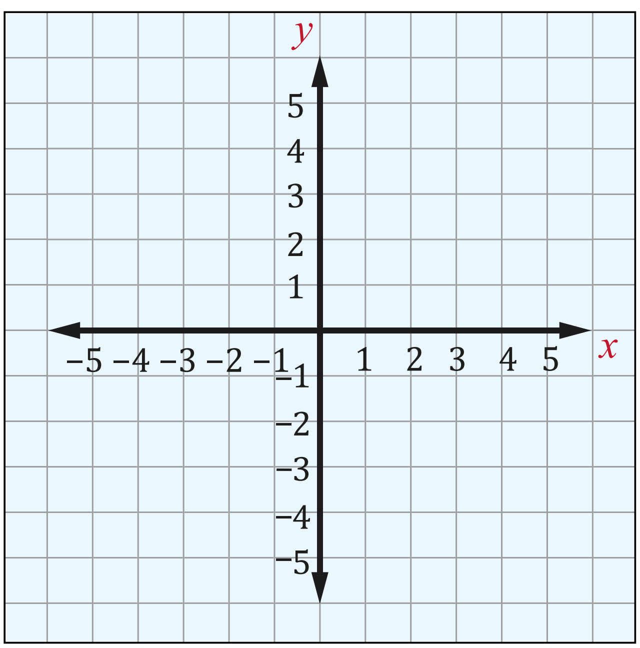


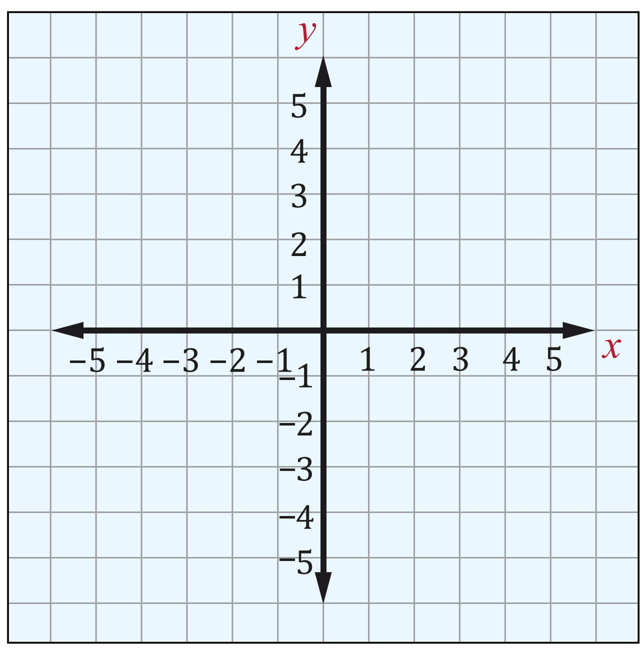
¡A trabajar!

Grafique las siguientes funciones lineales únicamente con dos puntos, cuando x=0 y cuando y=0.

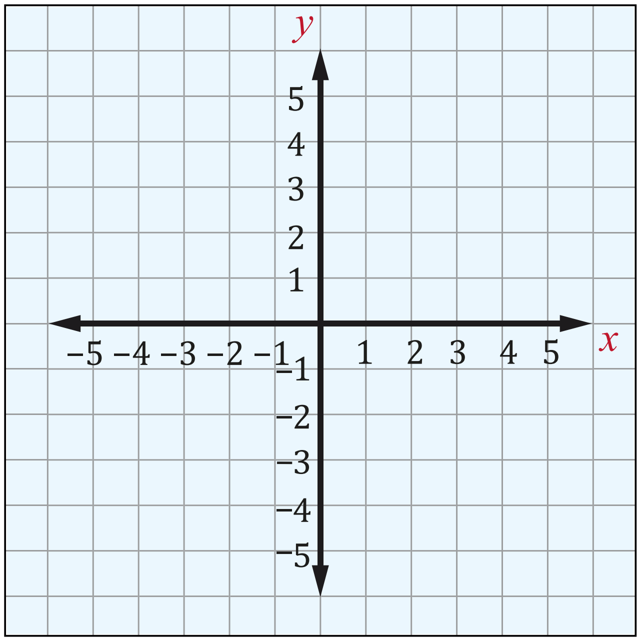
a) $f(x) = 2x + 6$

b) $f(x)=-5x+\frac{3}{2}$





c) $f(x) = 6x + 6$



¿Qué piensan otros?

Pendiente de una recta I

En una función que representa una recta se tiene:

$$y = mx + b$$

m: Pendiente

b: Ordenada al origen

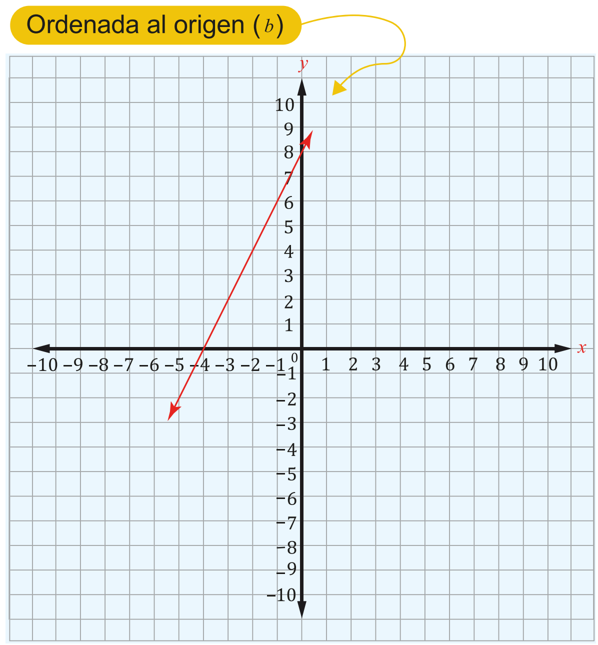
¿Qué dice la ley?

m: pendiente, es la inclinación que la recta tiene respecto del eje de abscisas.
b: ordenada al origen, es el valor en el cual la recta corta al eje de las ordenadas.

Ejemplo:
Dada la función lineal $f(x)=2x+8$, grafique esta función:

Tabla de valores resumida

x	y
0	8
-4	0



Pendiente

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{8-0}{0-(-4)}$$

$$m = \frac{8}{4}$$

$$m = 2$$

¡A trabajar!

En las siguientes funciones lineales indique el valor de la pendiente y el valor de la ordenada al origen (simplifique si es necesario):

a) $f(x) = -8x + 2$

m = Pendiente = ☐ b = Ordenada al origen = ☐

b) $f(x) = 5x - 16$

m = Pendiente = ☐ b = Ordenada al origen = ☐

c) $\underline{f(x) = -15x - 10\;)}$
5

m = Pendiente = ☐ b = Ordenada al origen = ☐

¿Qué piensan otros?

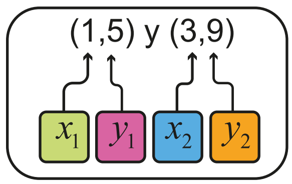
Pendiente de una recta II

Si los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ pertenecen a una recta, se define la pendiente m de esa recta como el cociente entre la diferencia de coordenadas y y la diferencia de coordenadas x. Es decir:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}$$

1. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1,5)$ y $(3,9)$?

Observe la siguiente información:

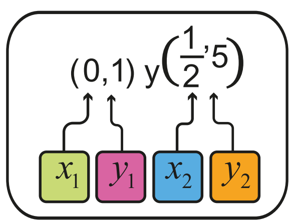


Se reemplazan los valores en la expresión: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ➡ $m = \dfrac{9-5}{3-1}$

$$m = \frac{4}{2}$$

$$m = 2$$

2.¿Cuál es la pendiente de la recta de la gráfica?
En la gráfica se puede ver que la recta pasa por los puntos $(0,1)$ y $\left(\frac{1}{2},5\right)$.



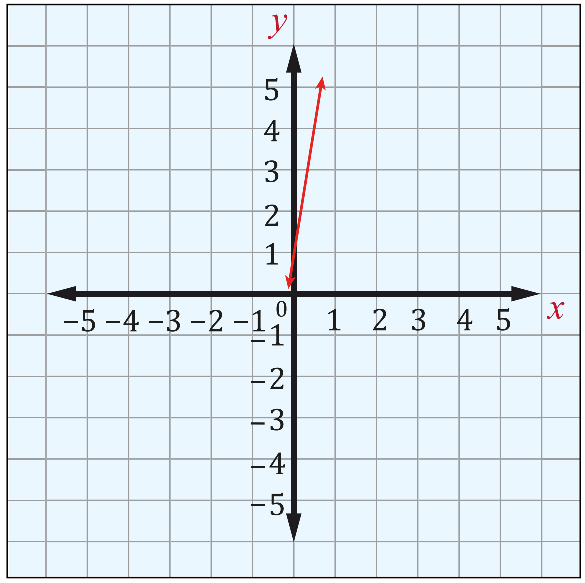
Se reemplazan los valores en la expresión:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

$$m=\frac{5-1}{\frac{1}{2}-0} \qquad m=\frac{1-5}{0-\frac{1}{2}}$$

$$m=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8 \qquad m=\frac{-4}{-\frac{1}{2}}=8$$

$$\boxed{m=8}$$



¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**La Pendiente",** este interesante programa muestra todos los elementos relacionados con la pendiente de una función lineal de primer grado.

¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada resuelva los ejercicios planteados en esta sección:

Calcule la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a) $(7{,}29)$ y $(12{,}30)$ b) $(21{,}5)$ y $(11{,}45)$ c) $(0{,}2)$ y $(1{,}\text{-}3)$

¿Qué piensan otros?

Rectas paralelas

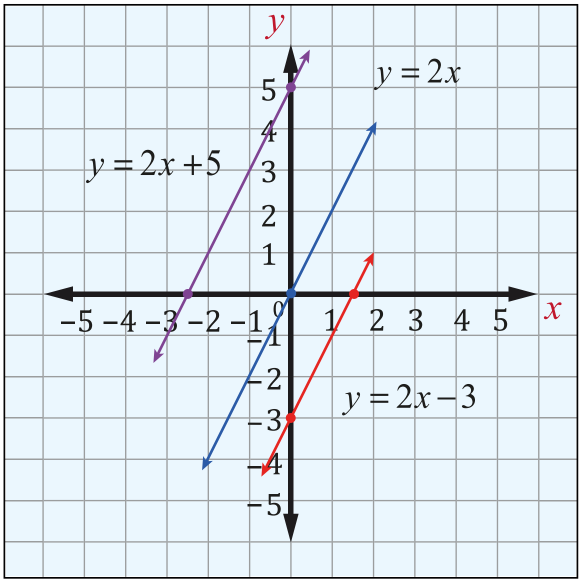
Las rectas paralelas son las que tienen la misma inclinación y no presentan ningún punto en común, esto significa que nunca se cruzan.

¿Qué dice la ley?

Dos rectas en el plano son paralelas si tienen igual pendiente.

$$m_1 = m_2 \Leftrightarrow L_1 \parallel L_2$$

Para comprender mejor observe las gráficas de las siguientes funciones en el mismo plano cartesiano.



Responda:
¿Qué tienen en común las funciones de la actividad anterior?
¿Qué tienen en común las gráficas de las funciones anteriores?

Rectas perpendiculares

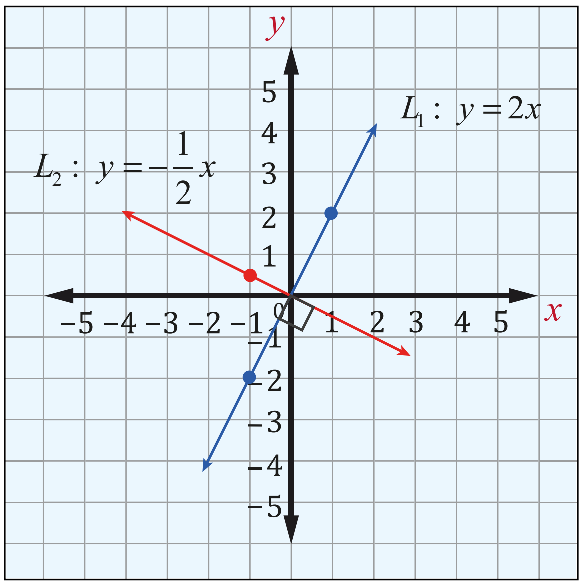
Dos rectas son perpendiculares cuando forman se cortan en un punto y forman un ángulo recto.

¿Qué dice la ley?

Dos rectas en el plano son perpendiculares si al multiplicar sus pendientes obtenemos resultado -1

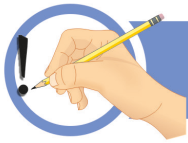
$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow L_1 \perp L_2$$

Para comprender mejor observe las gráficas de las siguientes funciones en el mismo plano cartesiano.



Responda:
¿Cuáles son las semejanzas que observa en la gráfica de las funciones?

¿Qué valor se obtiene al multiplicar entre sí las pendientes de las funciones?



¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada resuelva los ejercicios planteados en esta sección:

a) Grafique las siguientes rectas en un mismo plano cartesiano:

$$y = -3x$$

$$y = -3x - 3$$

$$y = -3x + 1$$

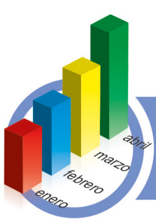
Conteste las preguntas:
¿Qué tienen en común las funciones?
¿Qué tienen en común las gráficas de las funciones?

b) Grafique el siguiente par de rectas en un mismo plano cartesiano:

$$L_1 : y = 5x$$

$$L_2 : -\frac{1}{5}x - 3$$

Conteste las preguntas:
¿Cuáles son las semejanzas que observa en la gráfica de las funciones?
¿Qué valor se obtiene al multiplicar entre sí las pendientes de las funciones?



¡Valorando lo aprendido!

Realice en grupos de trabajo la actividad planteada en esta sección.

En un pliego de papel bond construya un plano cartesiano y sobre él grafique dos funciones que tengan la misma pendiente. En otro pliego y sobre otro plano cartesiano grafique dos funciones que sean perpendiculares. Además, escriba indicando cada función que le pertenece a las rectas. Ambos pliegos péguelos en su salón de clase, hasta que termine el tema de funciones lineales.

Secuencia 9
FUNCIONES Y ECUACIONES

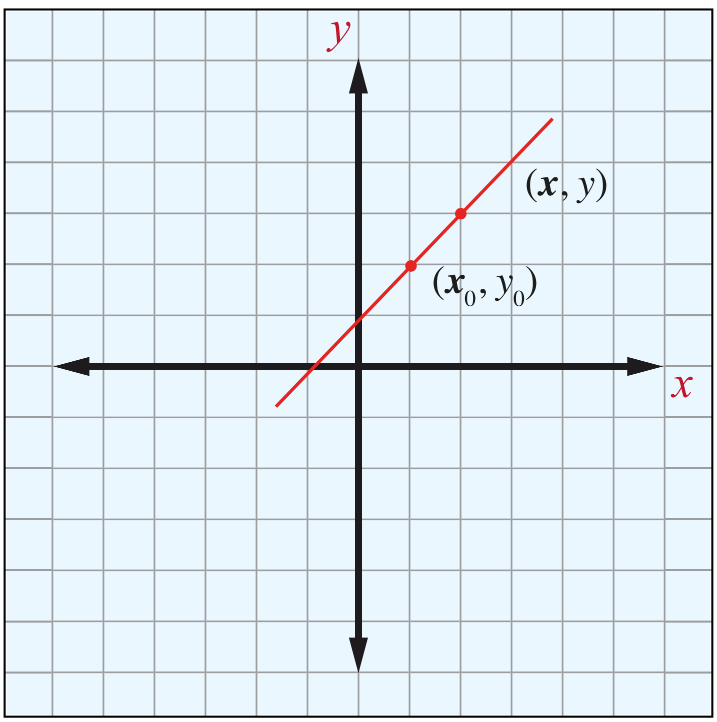
¿Hacia dónde vamos?

La ecuación $y = mx + n$ que se ha visto se denomina forma explícita de la ecuación de la recta, y permite hallar dicha ecuación cuando se conoce la pendiente y la ordenada en el origen.

Cuando sólo se conoce la pendiente, m, y las coordenadas de otro de los puntos de la recta, (x_o, y_o), su ecuación es

$$y - y_o = m\,(x - x_o)$$

Esta ecuación recibe el nombre de forma **punto - pendiente** de la ecuación de la recta. En la secuencia siguiente se explica cómo se obtiene.



ECUACIÓN DE LA RECTA

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

ECUACIÓN PUNTO PENDIENTE

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

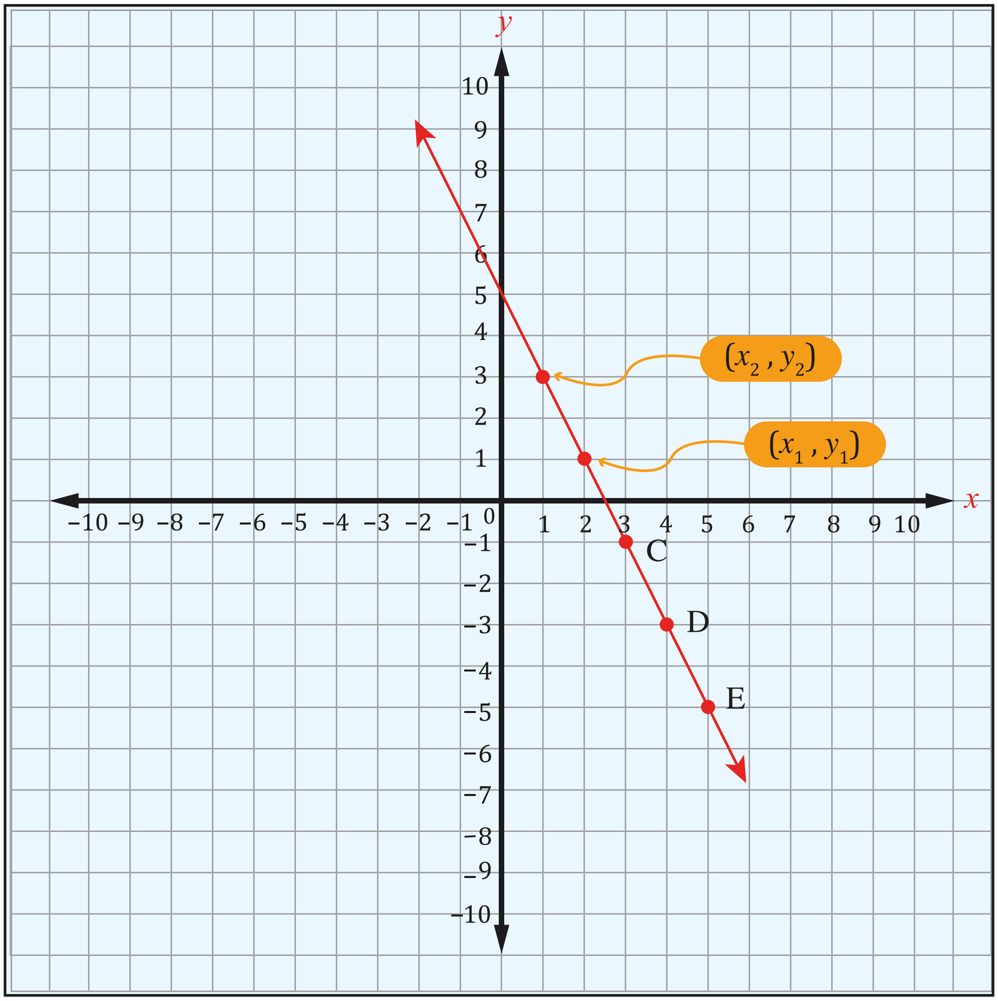
Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Encontrar la ecuación de una recta dados dos puntos de ella.
2. Construir la ecuación de una recta dado un punto y su pendiente.
3. Desarrollar problemas que impliquen el uso de funciones lineales de primer grado.

¿Qué conoce de esto?

Para hallar la pendiente de una función lineal, solo necesitamos las coordenadas de dos puntos y aplicar la siguiente fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Además, recuerde que:

Dos rectas en el plano son paralelas si tienen igual pendiente.

$$m_1 = m_2 \iff L_1 \parallel L_2$$

Dos rectas en el plano son perpendiculares si al multiplicar sus pendientes obtenemos resultado -1

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \iff L_1 \perp L_2$$

¿Cuál es la dificultad?

Resuelva los siguientes enunciados de forma clara y ordenada:

1. Definir la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (0,4) y B(2,0)

2. Encontrar la ecuación de la recta que tiene una pendiente m = 2 y pasa por el punto (-4,0).

¿Qué piensan otros?

Ecuación de la recta dados dos puntos

Al conocer las coordenadas de dos puntos $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ y $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ que pertenecen a una recta cuya ecuación está dada por:

$$f(x)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$$

Ejemplos:

1. Encuentre la función asociada a la recta que pasa por los puntos $\mathrm{A}(2,4)$ y $\mathrm{B}(5,10)$.

Identificando x_1, y_1, x_2, y_2 :

$\mathrm{A}(2,4)$ y $\mathrm{B}(5,10)$

x_1 y_1 x_2 y_2

Reemplazando en

$$f(x)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$$

$$f(x)=\frac{10-4}{5-2}(x-2)+4$$

$$=\frac{6}{3}(x-2)+4=2(x-2)+4=2x-4+4=2x$$

$f(x)=2x$ → Función lineal asociada a la recta que pasa por los puntos (2,4) y (5,10)

2. La relación entre los grados Celsius (ºC) y Fahrenheit (ºF) está dada por una función lineal, y se sabe que el agua se congela a 32º F o 0º C y hierve a 212º F o 100º C. ¿Cómo podría expresar los grados Fahrenheit como función de los grados Celsius?

Los puntos son: $(0,32)$ y $(100,212)$

Identificando x_1, y_1, x_2, y_2 :

$$A(\underbrace{0}_{x_1},\underbrace{32}_{y_1}) \quad \text{y} \quad B(\underbrace{100}_{x_2},\underbrace{212}_{y_2})$$

Reemplazando en

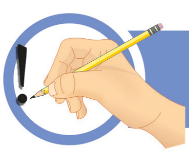
$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{212 - 32}{100 - 0}(x - 0) + 32$$

$$= \frac{180}{100}x + 32$$

$$\boxed{f(x) = \frac{9}{5}x + 32}$$

Función que Representa ºF respecto de ºC



¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo resuelva de forma clara y ordenada los ejercicios planteados en esta sección:

1) Encuentre la función asociada a la recta que pasa por los puntos (1, 8) y (5, 6).

2) Una recta pasa por los puntos (0,4) y (2,10) ¿Cuál es la función que la representa?

¿Qué piensan otros?

Ecuación de la recta dado un punto y su pendiente

Al conocer las coordenadas de un punto que pertenece a una recta y su pendiente se puede encontrar su función utilizando la expresión:

Esta relación se conoce como ecuación punto pendiente $f(x) - y_1 = m(x - x_1)$

Ejemplos:

1. Encuentre la ecuación de la recta de pendiente 5 que pasa por el punto (2, 6)

Solución:

Se tiene la siguiente información: $m = 5$ y $(\underset{x_1}{2}, \underset{y_1}{6})$

Reemplazando en $f(x) - y_1 = m(x - x_1)$

$$f(x) - 6 = 5(x - 2)$$
$$f(x) - 6 = 5x - 10$$
$$f(x) = 5x - 10 + 6$$
$$f(x) = 5x - 4$$

Respuesta:

La ecuación de la recta de pendiente 5 que pasa por el punto (2, 6) es: $f(x) = 5x - 4$

2. Un taxista cobra un costo fijo por subir al taxi más L. 100 por kilómetro recorrido. Un pasajero que recorre 4 kilómetros en el taxi canceló L. 1,050.

   ¿Cuál es la función que representa el valor que debe cancelar un pasajero que recorre kilómetros?

Solución:
Datos

La pendiente es m = 100 porque es la razón entre el valor a cancelar y los kilómetros recorridos.

La función pasa por el punto (4,1050).
x : representa el número de kilómetros recorridos por un pasajero.

Reemplazando en $f(x)-y_1=m(x-x_1)$

$$f(x)-1050=100(x-4)$$
$$f(x)-1050=100x-200$$
$$f(x)=100x-400+1050$$
$$f(x)=100x+650$$

Respuesta:
La función que representa el valor que debe pagar un pasajero que recorre x kilómetros es:

$$\boxed{f(x)=100x+650}$$

¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado **"La función de la recta"**, este interesante programa muestra el procedimiento correcto para encontrar la función correspondiente a una recta en diversos casos.

¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada resuelva los ejercicios planteados en esta sección:

1) Dada la pendiente y un punto, determine la ecuación de la recta en cada caso:
   a) $m = 3$ P (1,4) b) $m = -1$ P(-6,2)

2) En un negocio de reparación de llantas un trabajador tiene un sueldo diario formado por la suma de una base fija más L. 300 por cada llanta reparada. En cierto día del mes después de que había reparado 6 llantas, el empleado calculó que su sueldo diario era de L. 9,800.

   ¿Cuál es la función que representa el sueldo del trabajador cuando arregla x llantas?

¿Qué piensan otros?

Aplicaciones

Las funciones lineales describen fenómenos en los que intervienen magnitudes directamente proporcionales. La representación gráfica será una recta cuya pendiente informa de la rapidez de la variación de una magnitud con respecto a la otra y la ordenada en el origen informa sobre las condiciones iniciales.

En la descripción de fenómenos reales es frecuente que las magnitudes que se relacionan vengan dadas por números de tamaños muy diferentes, por lo que al representarlas gráficamente habrá que escoger unas escalas adecuadas en los ejes correspondientes

Ejemplos:

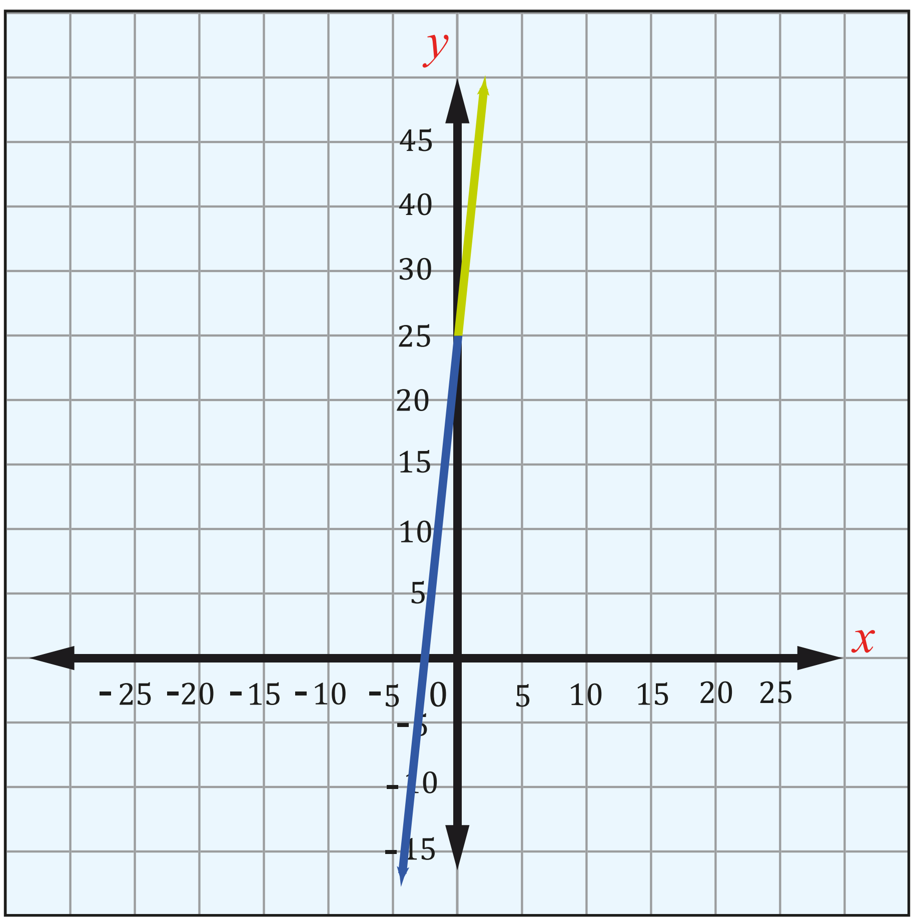
1) Un técnico en reparaciones de electrodomésticos cobra L. 25 por la visita, más L. 20 por cada hora de trabajo.

   ¿Qué función lineal expresa el dinero que se debe pagar en total, en relación al tiempo trabajado?

   ¿Cuál es su representación gráfica?

Solución:
Observe que en este problema, x representa las horas de trabajo, mientras que $f(x)$ el dinero total que cobra el técnico por hora de trabajo.

La función lineal buscada es $f(x) = 20x+25$, cuya gráfica queda:

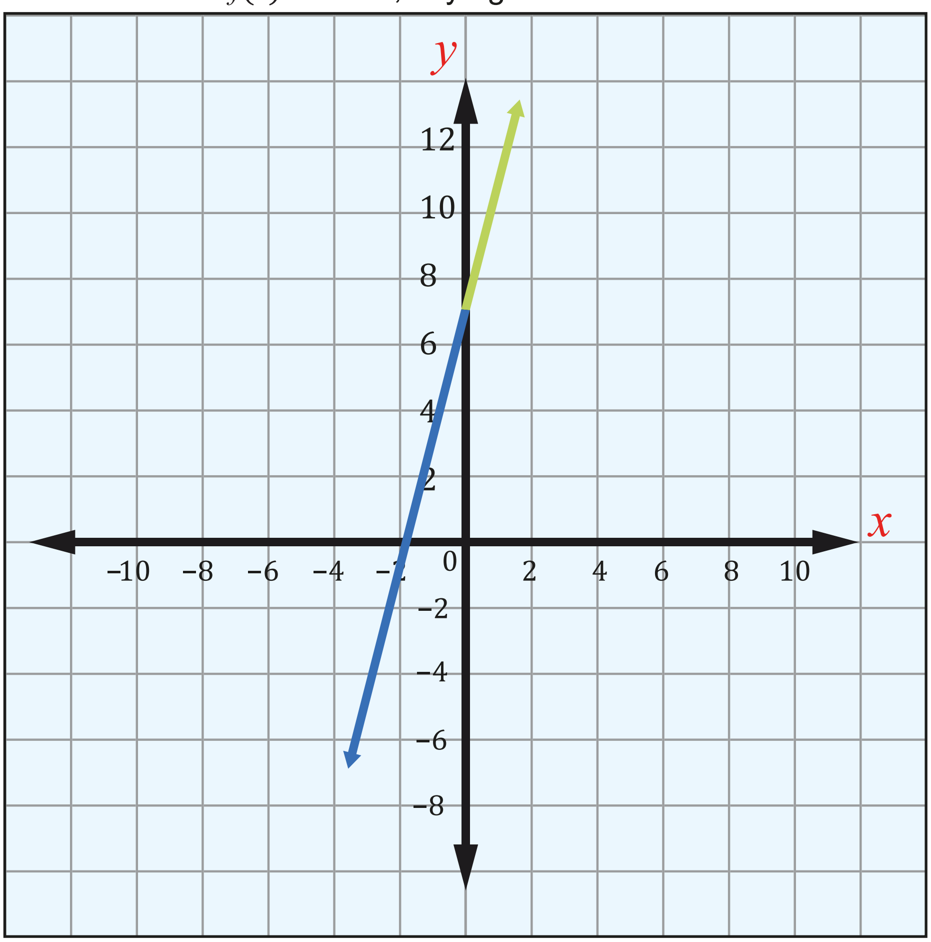


2) Una compañía de teléfonos celulares tiene inicialmente 7 mil usuarios, y el número de éstos crece alrededor de 4 mil por año.

¿Cuál es la expresión de la función lineal que describe esta situación?
¿En cuántos años la empresa tendrá más de 15 mil usuarios?

Solución:
En esta situación, x representa los años de la empresa, mientras que $f(x)$ el número de usuarios (medido de miles) al cabo de los años transcurridos desde el inicio de la empresa.

La función lineal buscada es $f(x) = 4x+7$, cuya gráfica es:

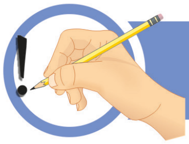


¿En qué año la empresa tendrá más de 15 mil usuarios?
Recuerde que (fx) representa el número de usuarios, por tanto,

$$15 = 4x + 7$$

$$15 - 7 = 4x$$

$$8 = 4x \rightarrow x = \frac{8}{4} = 2$$

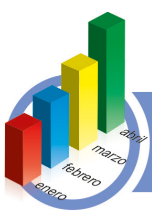


¡A trabajar!

Resuelva en su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada el problema planteado en esta sección.

- Por el alquiler de un carro cobran una cuota fija de 2,000 Lps. y adicionalmente 300 Lps. por kilómetro recorrido:

a) Escriba la función que representa esta situación y grafíquela.
b) ¿Cuánto dinero hay que pagar para hacer un recorrido de 125 Km?
c) Si paga un valor de 65,000 lempiras, ¿cuántos kilómetros se recorren?



¡Valorando lo aprendido!

Funciones lineales
Relacionan magnitudes directamente proporcionales sometidas a alguna condición inicial. Tienen la forma

$$y = mx + b$$

Su gráfica es una recta de pendiente que pasa por el punto (0,b) (b es la ordenada en el origen).

· **Forma punto-pendiente:** Si se conoce la pendiente, m, y las coordenadas de un punto (x_1,y_1) la ecuación es:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

· **Recta por dos puntos:** si se conocen las coordenadas de dos puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ la ecuación es:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Secuencia 10

VALORANDO LO QUE APRENDO

¿Hacia dónde vamos?

La teoría del Álgebra estudia conjuntos algebraicamente estructurados, es decir, conjuntos con elementos para los cuales se definen operaciones internas y externas (suma, multiplicación), con propiedades especiales (asociativa, conmutativa, distributiva, existencia de elementos neutrales e inversos etc.). El álgebra es importante porque ofrece métodos para la solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, herramientas de suma importancia para las profesiones técnicas.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Concretizar los conocimientos sobre los diversos temas del álgebra abordados en noveno grado.
2. Comprender y aplicar los puntos importantes en la solución de ejercicios y problemas del álgebra para noveno grado.

¿Qué conoce de esto?

En esta secuencia se presenta un resumen fundamental que servirá como retroalimentación de los contenidos abordados en el bloque del álgebra de noveno grado.

Los principales temas abordados en el bloque anterior son: desigualdades numéricas, inecuaciones, ecuaciones de segundo grado, métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas, sistema de ecuaciones lineales en dos variables, resolución de problemas que impliquen un sistema de ecuaciones lineales, funciones lineales, gráficas de funciones lineales y construcción de ecuaciones con puntos y pendientes.

Conceptos fundamentales y puntos importantes:

Las inecuaciones

Inecuaciones: Son desigualdades en las que aparecen letras y números con las operaciones usuales. Las letras son las variables o incógnitas de las inecuaciones. Las inecuaciones se clasifican atendiendo al número de incógnitas y al grado de la expresión algebraica que aparece en ellas.

Los símbolos que se utilizan para designar las desigualdades son:

<	: “menor que”	**≤**	: “menor o igual que”
>	: “mayor que”	**≥**	: “mayor o igual que”

Además de los símbolos hay propiedades que rigen las desigualdades, las propiedades son las siguientes:

- Transitividad
- Adición y sustracción
- Multiplicación y división
- Opuesto
- Recíproco

Las ecuaciones cuadráticas

Se llama **ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática** a toda ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ con a,b y c coeficientes reales y con distinto a distinto de cero.

Clasificación de ecuaciones cuadráticas

- Ecuación cuadrática completa

Ejemplo: $3x^2+5x+7=0$

-Ecuación cuadrática incompleta

Ejemplo: $5x^2-1=0$

- Ecuación cuadrática incompleta mixta

Ejemplo: $7x^2 + 2x = 0$

- Ecuación cuadrática radical

Ejemplo: $\sqrt{3x^2 + 1} = \mathbf{0}$

Métodos de solución de ecuaciones cuadráticas
Existen diversos métodos para resolver ecuaciones cuadráticas entre los métodos de trabajo se tienen los siguientes:

- **Método de factorización**

  La factorización simple consiste en convertir la ecuación cuadrática en un producto de binomios. Luego, se busca el valor de de cada binomio.

- **Método por raíz cuadrada**

  El método de raíz cuadrada se utiliza únicamente en las ecuaciones cuadráticas incompletas, y consiste en aplicar en ambos miembros de la ecuación raíz cuadrada.

- **Método de completación al cuadrado**

  Se llama método de completación al cuadrado porque se puede completar un cuadrado geométricamente.

- **Método de la formula cuadrática**

  Este método es muy simple: hay que sustituir los valores de a, b y c de la ecuación cuadrática a la siguiente fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

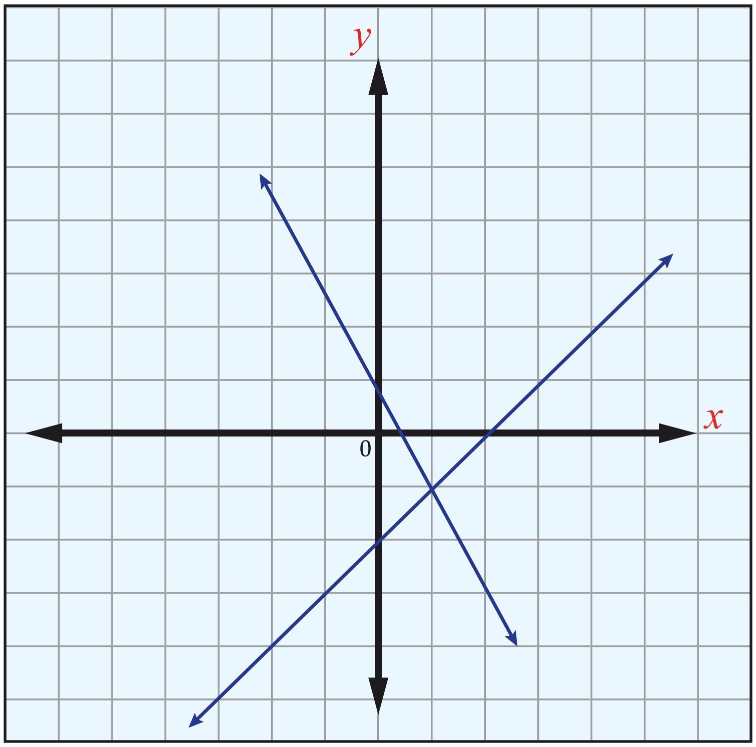
Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común.

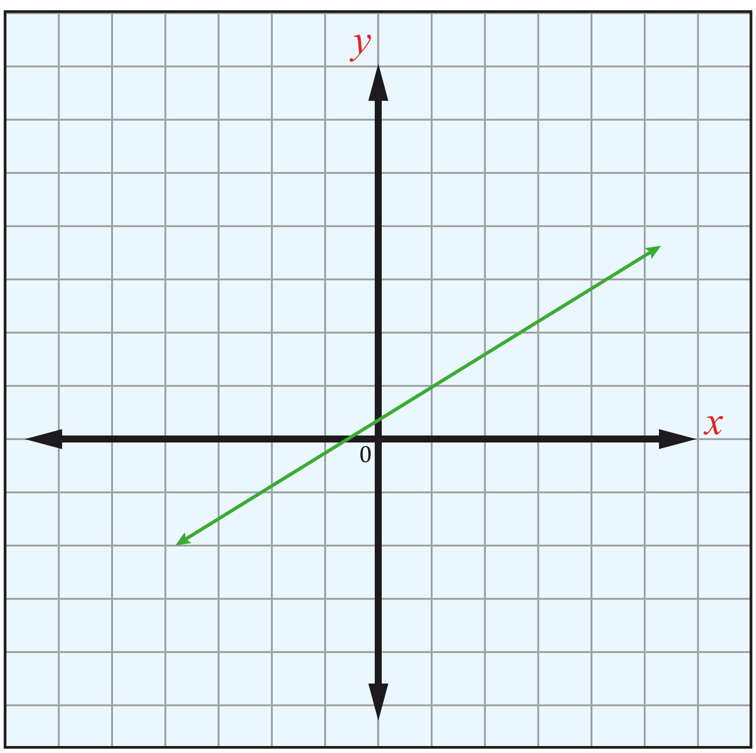
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Clasificación de sistemas
En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada ecuación representa una recta en el plano. Discutir un sistema es estudiar la situación de estas rectas en el plano, que pueden ser:

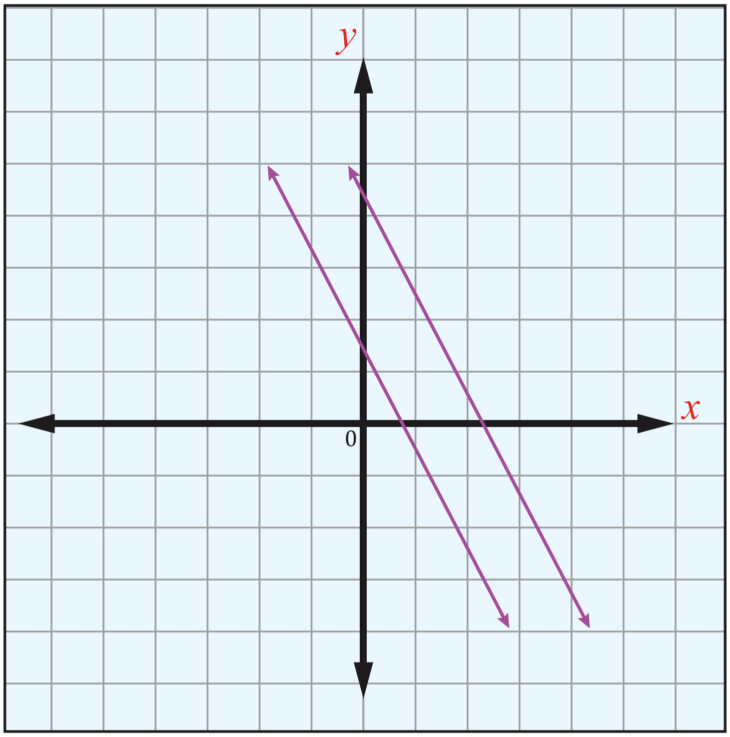
- Secantes, el sistema tiene solución única, se llama **Compatible Determinado**.



- Coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones, es **Compatible Indeterminado.**



- Paralelas, el sistema no tiene solución, se llama **Incompatible**.

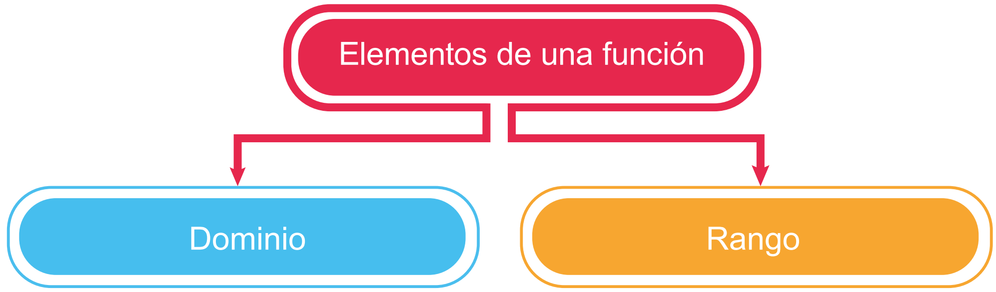


Resolver sistemas
Para resolver un sistema de ecuaciones se utiliza cualquiera de los tres métodos siguientes:

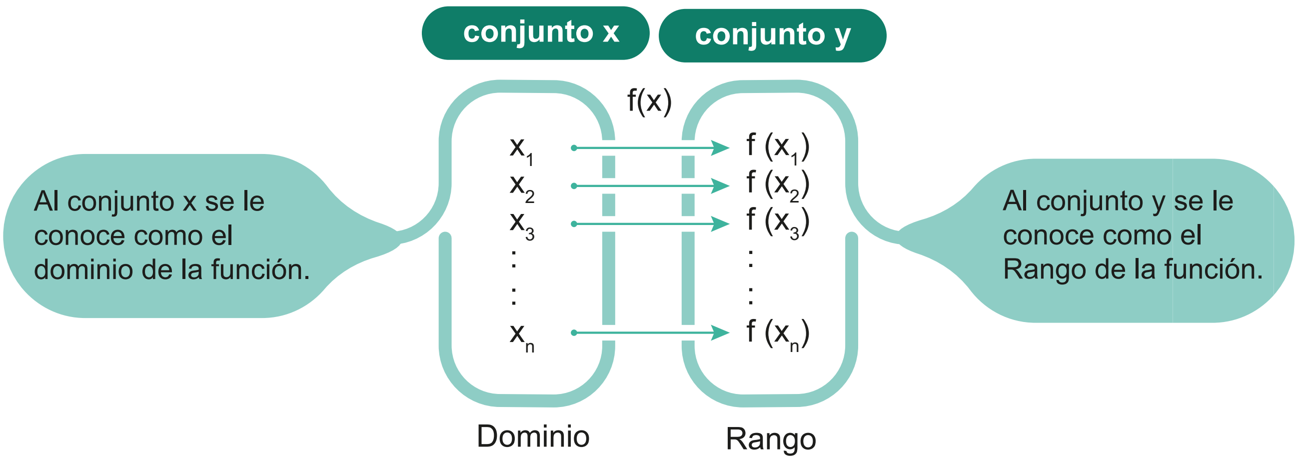
- **Método de reducción** Consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplica una de las ecuaciones o ambas por un número de modo que los coeficientes de x o de y sean iguales y de signo contrario.
- **Método de sustitución** Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, se llega así a una ecuación de primer grado con una sola incógnita; hallada ésta se calcula la otra.
- **Método de igualación** Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas. De nuevo obtenemos una ecuación de primer grado con una sola incógnita.

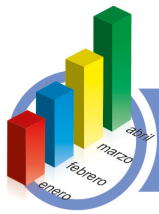
Definición de función

Si cada elemento de un conjunto x se asocia con exactamente un elemento del conjunto y a través de una **regla de asociación o correspondencia**, esto define una función f de la forma $y=mx+b$



Gráficamente Dom f y Rang f, se pueden establecer cómo:





¡Valorando lo aprendido!

Comprenda el proceso de solución en los ejercicios planteados en esta sección:

Resolver la inecuación

a) $3x-12 \leq \dfrac{5x-6}{4}$

Solución:

$$3x-12 \leq \frac{5x-6}{4}$$ …Se pasa a multiplicar el número 4 al miembro izquierdo.

$$4(3x-12) \leq 5x-6$$ ...Se realiza la multiplicación del número 4 por (3x-12).

$$12x-48 \leq 5x-6$$ ...Se transponen los números con la incógnita x a un miembro y los números sin variable al otro miembro.

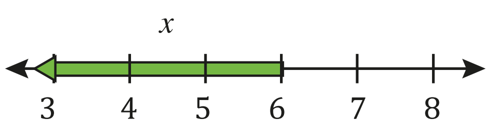
$$12x-5x \leq -6+48$$ …Se realiza la resta y la suma respectivamente.

$$7x \leq 42$$ …Se despeja para la incógnita x pasando el “7” a dividir al miembro derecho.

$$x \leq \frac{42}{7}$$ …Se realiza la división “42 entre 7”.

$$x \leq 6$$

Notación Gráfica



Notación constructiva

$$\{x \in \mathrm{R} / x \leq 6\}$$

Determina la solución de la siguiente ecuación cuadrática por fórmula general:

b) $3x^2-11x-4=0$

Al sustituir los coeficientes en la fórmula general tenemos:

$$x=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4(3)(-4)}}{2(3)}$$

$$=\frac{-(-11)+\sqrt{(-11)^2-4(3)(-4)}}{2(3)}=\frac{11+\sqrt{121+48}}{6}=\frac{11+\sqrt{169}}{6}=\frac{11+13}{6}=\frac{24}{6}=4$$

$$x_2=\frac{-(-11)-\sqrt{(-11)^2-4(3)(-4)}}{2(3)}=\frac{11-\sqrt{121+48}}{6}=\frac{11-\sqrt{169}}{6}=\frac{11-13}{6}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

La solución de la ecuación es:

$$\boxed{x_1=4} \qquad \boxed{x_2=-\frac{1}{3}}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} &Para\ \ x_1=4\\ &3x^2-11x-4=0\\ &3(4)^2-11(4)-4=0\\ &3(16)-44-4=0\\ &48-48=0\\ &\therefore\quad 0=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Para\ \ x_2=-\frac{1}{3}\\ &3x^2-11x-4=0\\ &3\left(-\frac{1}{3}\right)^2-11\left(-\frac{1}{3}\right)-4=0\\ &3\left(\frac{1}{9}\right)+\frac{11}{3}-4=0\\ &\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0\\ &\therefore\quad 0=0 \end{aligned}$$

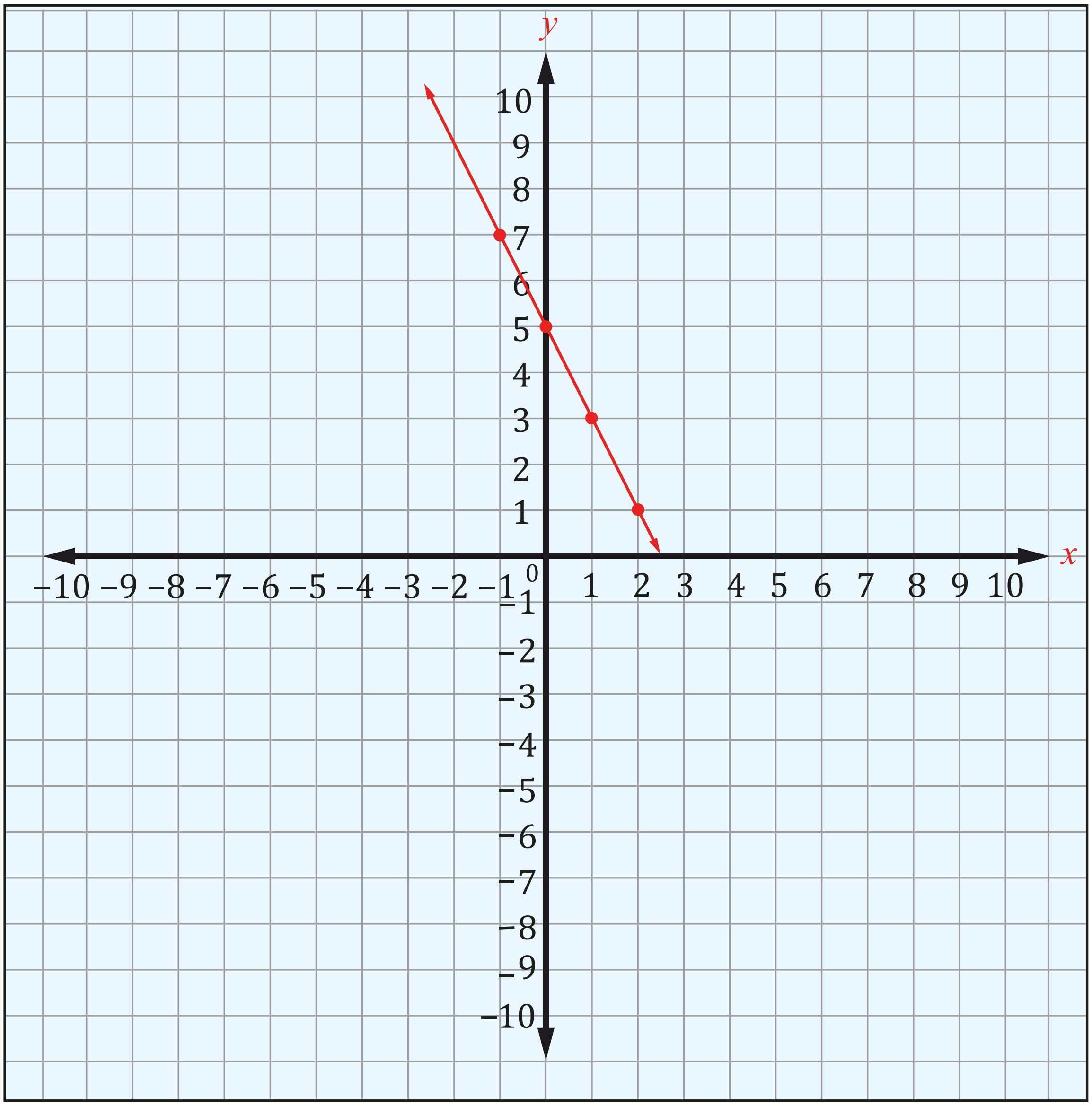
Graficar la función: $y = -2x + 5$

Solución:

x	-2	-1	0
$y = x+3$	$y = -2(-2)+5=9$	$y = -2(-1)+5=7$	$y = -2(0)+5=5$

1	2
$y = -2(1)+5=3$	$y = -2(2)+5=1$

Los puntos encontrados $(-2,9),(-1,7),(0,5),(1,3),(2,1)$ se ubican en el Plano Cartesiano y se unen con una línea:



Una función de primer grado se llama función lineal porque su gráfica es siempre una recta

En esta sección siga las instrucciones del docente que le aplicará la evaluación del contenido del bloque.

BLOQUE III
La Geometría

PRESENTACIÓN

En el Tercer Ciclo, la Geometría se desarrolla en forma sistemática en un proceso de deducción informal apegado a los modelos de van Hiele. Se combina con números para resolver problemas que se presentan en la vida cotidiana, así como en varias profesiones técnicas, como por ejemplo el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes tanto de figuras planas como de solidos geométricos, se incluye, además, el desarrollo de figuras con regla y compas para presentar esta rama de las matemáticas como una herramienta práctica y fundamental en la vida cotidiana y en el estudio de diversas carreras técnicas profesionales.

Expectativas de logro del bloque III – Geometría

Al finalizar el bloque de Geometría los estudiantes:

1. Clasifican cada uno los polígonos según la magnitud de sus ángulos y según sus lados.

2. Comprenden y aplican correctamente las propiedades de los polígonos y encuentran el área y perímetro de un polígono regular.

3. Aprenden los principales elementos de la circunferencia.

4. Realizan construcciones geométricas inscritas en un círculo.

5. Diferencian los elementos característicos de los prismas y pirámides.

6. Calculan el área de superficies laterales, áreas totales y volumen de primas y pirámides.

7. Diferencian los elementos y tipos de cuerpos redondos más comunes.

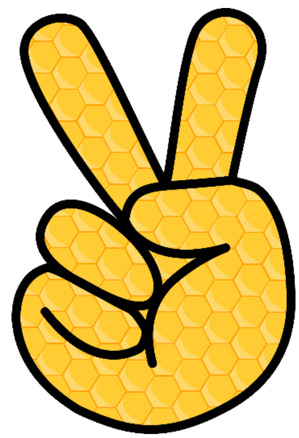
8. Calculan el área de superficies laterales, áreas totales y volumen del cilindro, cono y la esfera.

Contenidos conceptuales a desarrollar en el bloque de Geometría

- Introducción a los polígonos
- Clasificación de los polígonos según la magnitud de sus ángulos y según sus lados.
- Propiedades generales de los polígonos y sus diagonales.
- Centro de un polígono regular.
- Definición y elementos de una circunferencia.
- Construcción de polígonos.
- Construcción de la recta tangente a una circunferencia en un punto dado de ella
- Área de prismas y pirámides.
- Volumen de poliedros.
- Definición y clasificación de cuerpos redondos.
- Área de cuerpos redondos y volúmenes.

Secuencia 1
LADOS Y ÁNGULOS

¿Hacia dónde vamos?



En el mundo actual en que se vive se pueden observar muchos objetos con formas geométricas. En la naturaleza abundan más las líneas curvas, pero en los objetos construidos por los seres humanos predominan las rectas. Muchas de las figuras planas que se pueden contemplar en los diversos alrededores están limitadas por segmentos, por ejemplo, ventanas, puertas, baldosas, cuadros, etc. Estas figuras se llaman polígonos.

La palabra polígono proviene del griego y está compuesta por poli (varios) y gono (ángulo), de modo que, para su clasificación según el número de lados, se emplea el prefijo griego que indica el número de ángulos seguido de la palabra gono, con las dos importantes excepciones para tres y cuatro ángulos.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

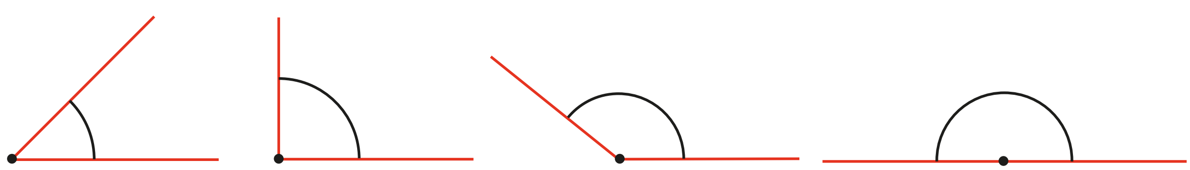
Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Clasificar cada uno los polígonos según la magnitud de sus ángulos y según sus lados.
2. Comprender y aplicar correctamente las propiedades de los polígonos.
3. Encontrar el perímetro y área de un polígono regular.

¿Qué conoce de esto?

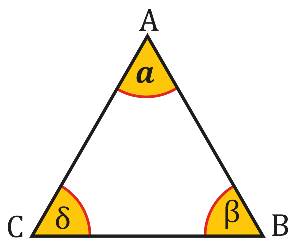
Clasificación de ángulos según su medida

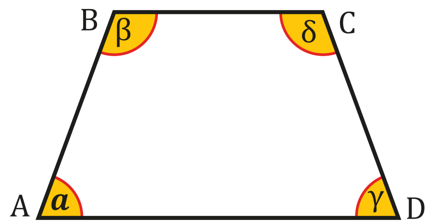
Agudo < 90° Recto = 90° Obtuso > 90° Llano = 180°



Ángulos interiores

Es un ángulo formado por dos lados de una figura, con un vértice común y está contenido dentro de la misma figura.





¿Cuál es la dificultad?

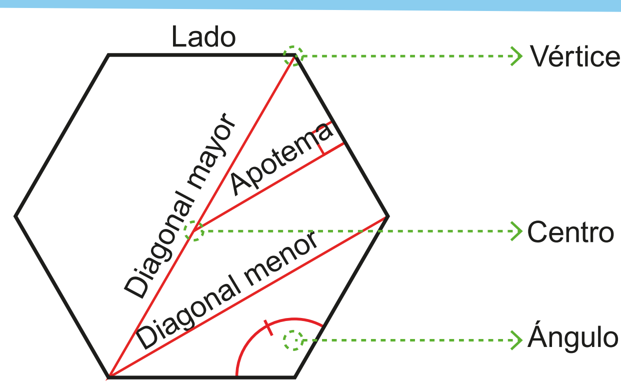
Responda el siguiente enunciado encerrando la letra correspondiente a la respuesta:
1. Un hexágono regular es un ejemplo de polígono:

a) Equilátero
b) Cóncavo
c) Convexo
d) Irregular

¿Qué piensan otros?

Introducción a los polígonos

Un polígono es una figura plana, cerrada y simple formada por segmentos. Proviene del griego **poli** que significa muchos y de **gonos** que significa ángulos, que pudiera traducirse como una **figura de muchos ángulos**.

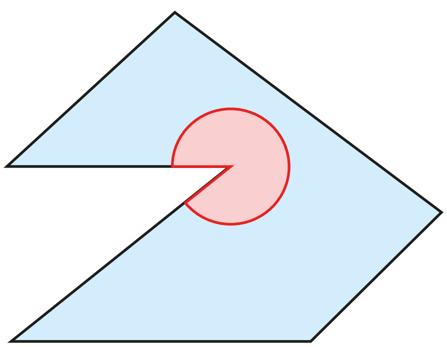


Partes de un polígono
Lado: Cada uno de los segmentos que componen el polígono.
Vértice: Es el punto en el que se unen dos lados consecutivos.
Diagonal: Segmento que une dos vértices no consecutivos. Algunos polígonos tienen diagonal mayor y diagonal menor.
Perímetro: Es la suma de todos los lados.

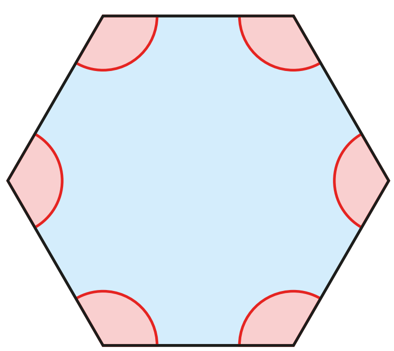
En un polígono regular además encontramos:
Centro: Es el punto equidistante de todos los vértices y lados. En él se encuentra el centro de las circunferencias inscrita y circunscrita.
Apotema: Es el segmento que une el centro del polígono con el punto medio de los lados perpendicularmente.

Se pueden hacer clasificaciones distintas de los polígonos atendiendo a sus distintas características, a los distintos parámetros.

Clasificación de los polígonos según la magnitud de sus ángulos.
Cóncavos.
Tienen al menos un ángulo interior de más de 180°. Observe que, en los ángulos que son mayores de 180°, el vértice apunta hacia dentro de la figura.



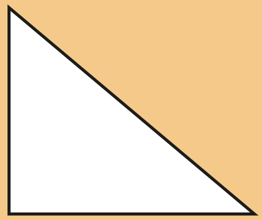
Convexos.
Sus ángulos interiores son todos ellos menores de 180°. Observe como todos los vértices de los ángulos apuntan hacia fuera.



Clasificación de los polígonos según sus lados.
Los polígonos se pueden clasificar también de acuerdo al número de lados que tengan, en este apartado se presenta una parte de su clasificación según el número de lados.

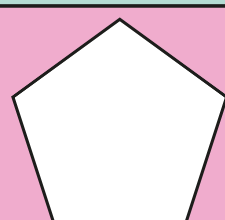
CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS

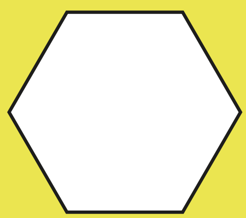
Triángulos:
Polígonos de tres lados. En la figura se muestra un triángulo rectángulo.



Cuadriláteros:
Polígonos de cuatro lados. En la figura se muestra un rectángulo.

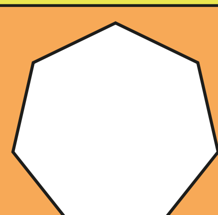
Pentágonos:
Polígonos de cinco lados.





Hexágono:
Polígono de seis lados.

Heptágono:
Polígono de siete lados



Existen más polígonos de lados mayores a 7 como el octágono, eneágono, decágono, endecágono, dodecágono, etc.

Un dato importante es saber que cuando se nombran polígonos mayores a 13 lados simplemente se nombran como: polígono de veinte lados, por ejemplo.

Los polígonos también se pueden clasificar de acuerdo a si sus ángulos y lados son iguales o diferentes entre sí.

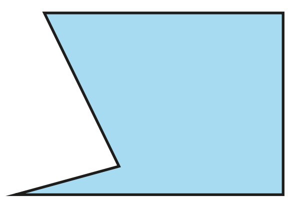
Polígonos regulares	Son aquellos polígonos que tienen todos sus lados iguales. De la misma manera todos sus ángulos deberán ser iguales.
Polígonos irregulares	Son los polígonos que al menos uno de sus lados es distinto a los demás.

¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo responda las preguntas o enunciados encerrado la letra de la palabra correcta.

1. ¿Cuál de los siguientes incisos presentados es un polígono?
a) Trapecio
b) Cono
c) Cilindro
d) Circunferencia

2. La siguiente figura es un ejemplo de un polígono:
a) Equiángulo
b) Convexo
c) Cóncavo
d) Recto



3. Un hexágono regular es un ejemplo de un polígono:
a) Equilátero
b) Cóncavo
c) Convexo
d) Irregular

4. Un triángulo equilátero es un ejemplo de un polígono:
e) Cóncavo
f) Regular
g) No es un polígono
h) Irregular

Desde el vértice A se pueden trazar 2 diagonales

¿Qué piensan otros?

Propiedades generales de los polígonos

⇨ La suma de los ángulos inscritos de un polígono convexo de “n” lados es igual a:

$$S\varphi=180(n-2)$$

Recuerde que es el número de lados del polígono.

⇨ La suma de los ángulos exteriores es de 360º

⇨ El número de diagonales que se pueden trazar desde el vértice está dado por:

(n= número de lados del polígono).

$$D=n-3$$

⇨ El número de diagonales que se pueden trazar en un polígono está dado por:

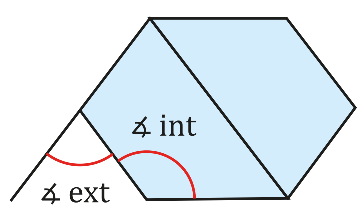
$$D=\frac{n(n-3)}{2}$$

(n = número de lados del polígono).

Propiedades de los polígonos regulares

⇨ El valor de un ángulo interior se obtiene:

$$\measuredangle\, int. = \frac{180(n-2)}{n}$$

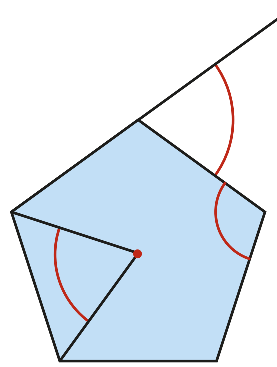


⇨ El valor de un ángulo exterior se obtiene:

$$\measuredangle\, ext. = \frac{360°}{n}$$

Ejemplos:

1. Calcule el valor de los ángulos central, interior y exterior en un pentágono regular:



Solución:

- Para obtener el ángulo central simplemente se divide $360° \div 5 = 72°$

- Para el ángulo interior se utiliza la fórmula siguiente:

$$\measuredangle\, int. = \frac{180(n-2)}{n}$$

Ahora se sustituye el valor de n: $\measuredangle\, int. = \frac{180(5-2)}{5} = \frac{180(3)}{5} = 108°$

- Para el ángulo exterior se utiliza la fórmula siguiente:

$$\measuredangle\, ext. = \frac{360°}{n}$$

Ahora se sustituye el valor de n: $\measuredangle\, ext. = \frac{360°}{5} = 72°$

2. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si cada ángulo interno mide 162º?

Solución:

Se debe emplear la fórmula $\measuredangle\, int. = \frac{180(n-2)}{n}$ de donde resulta que:

$$\frac{180(n-2)}{n} = 162 \Rightarrow 180(n-2) = 162n \Rightarrow 180n - 360 = 162n$$

$$18n = 360$$

$$n = \frac{360}{18}$$

$$n = 20$$

R/ El polígono tiene 20 lados

¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**Muchos lados",** este interesante programa muestra los conceptos principales de los polígonos y operaciones que se pueden realizar con ellos.

¡A trabajar!

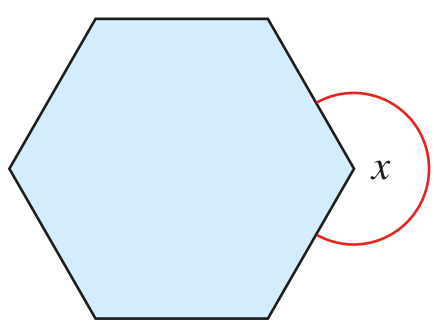
En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada conteste los enunciados planteados en esta sección:

1. El polígono en que la suma de los ángulos interiores es 540º es un:

a) Eneágono
b) Hexágono
c) Nonágono
d) Pentágono

2. La medida de cada uno de los ángulos interiores de un nonágono es:
a) 140º
b) 180º
c) 161º
d) 170º

3. La siguiente figura es hexágono regular. El ángulo x mide:
a) 120º
b) 150º
c) 200º
d) 240º



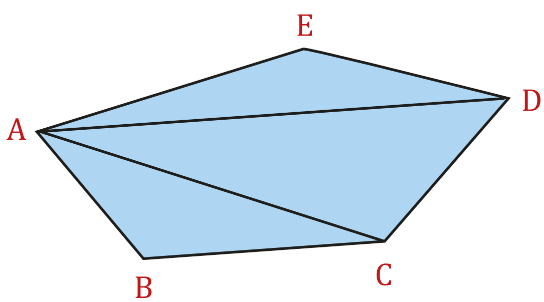
¿Qué piensan otros?

Diagonales en un polígono

En este apartado se estudiará una fórmula mediante la cual se puede calcular el número de diagonales que tendrá un polígono n de lados.

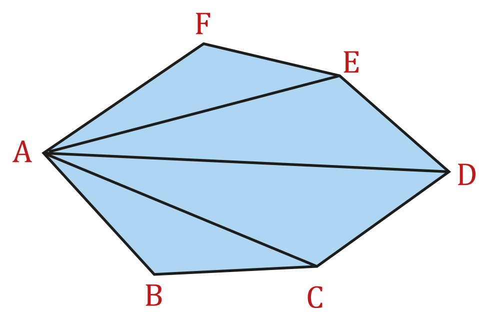
Como ejemplo observe los casos siguientes:

En un pentágono



Desde el vértice A se pueden trazar 2 diagonales

En un hexágono



Desde el vértice A se pueden trazar 3 diagonales

Puede observar que en el polígono de 6 lados se obtuvieron 3 diagonales, desde el vértice A; y en el polígono de 5 lados, sólo dos. Si se fija, desde cada uno de los vértices se podría hacer lo mismo, para cada uno de los polígonos. Es decir, $(n\text{-}3)$ diagonales. El evento se podría repetir para cada uno de los n vértices de los polígonos.

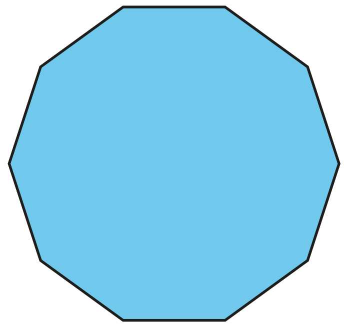
Considerando que, por ejemplo, la diagonal desde el vértice A hasta el vértice E es la misma que la diagonal trazada desde el vértice E hasta el vértice A, es decir se repite para la contabilidad, se tiene que:

"El número de diagonales de un polígono, es equivalente a la mitad del producto entre el número de lados y el número de diagonales que se trazan desde un vértice"

Su fórmula $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Ejemplo:

1. En un dodecágono, ¿Cuántas diagonales se pueden trazar?



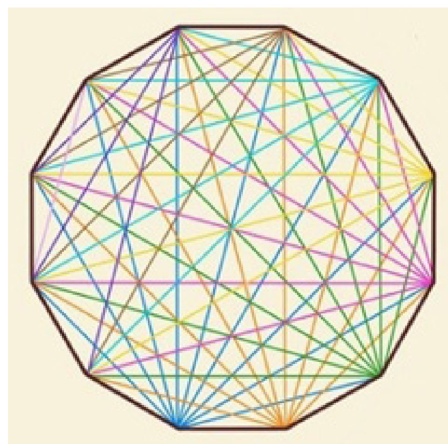
Solución:

- Para obtener el número de diagonales a trazar simplemente se sustituye en la fórmula:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Sustituyendo $n = 12$:

$$D = \frac{12(12-3)}{2} = \frac{12(9)}{2} = 54$$



R/ En un dodecágono se pueden trazar 54 diagonales.

¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada responda los enunciados planteados en esta sección:

1. Si tenemos un polígono en el cual se pueden trazar 3 diagonales desde uno de sus vértices, estamos hablando de un:

a) Pentágono b) Hexágono c) Triángulo d) Cuadrilátero

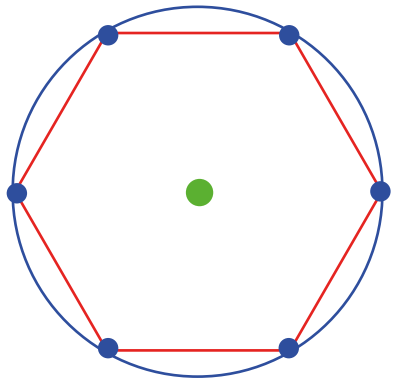
2. El número de diagonales totales que se pueden trazar en heptágono son:

a) 7 b) 14 c) 4 d) 10

¿Qué piensan otros?

Centro de un polígono regular

Los vértices de un polígono regular están inscritos en una circunferencia.



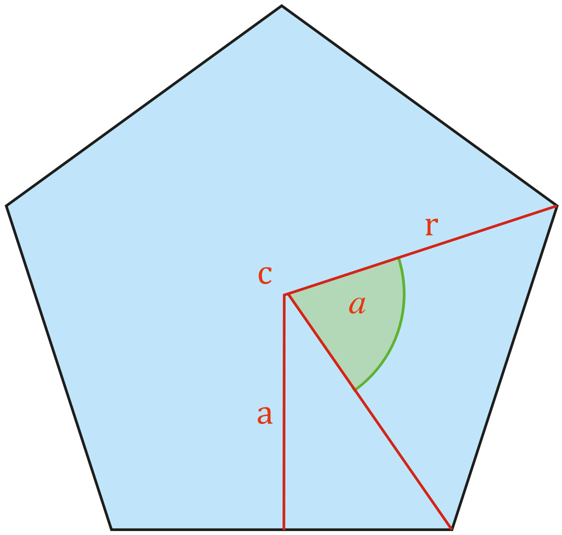
El centro de la circunferencia que inscribe el polígono es el mismo centro del polígono, del cual se puede sacar los siguientes elementos:

Elementos de un polígono regular

Centro
El centro de un polígono regular es el punto interior que equidista de cada vértice.

Radio
El radio es el segmento que va del centro a cada vértice.

Apotema
La apotema es la distancia del centro de un polígono regular al punto medio de un lado.

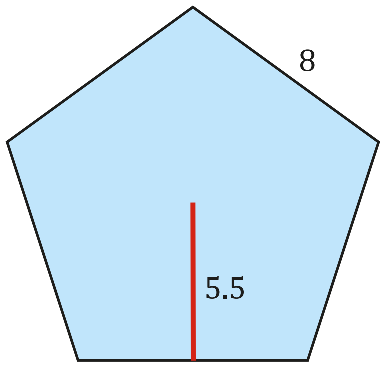


Perímetro de un polígono regular
El perímetro es igual al número de lados por la longitud del lado $P = n \cdot l$.

Área de un polígono regular $A = \dfrac{Perimetro \times Apotema}{2}$

Ejemplos:

1. Calcule el perímetro y el área del siguiente polígono regular:



Solución:

- Primero se calcula el perímetro utilizando la fórmula $P = n \cdot l$ donde,
  n = número de lados
  l = longitud del lado

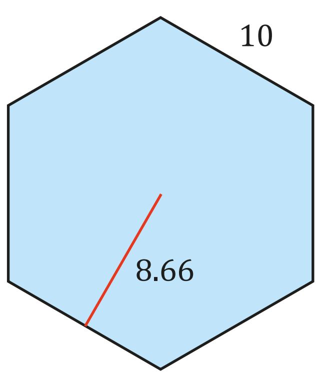
  Se sustituye $P = n \cdot l$, $P = 5 \cdot 8\,cm = 40\,cm$

- Se calcula el área utilizando la fórmula $A = \dfrac{Perimetro \times Apotema}{2}$

  Se sustituye

$$A = \frac{40\,cm \times 5.5\,cm}{2} = \frac{220\,cm^2}{2} = 110\,cm^2$$

2. Calcule el perímetro y el área del siguiente polígono regular:



Solución:

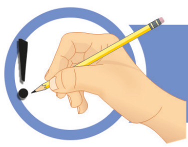
- Primero se calcula el perímetro utilizando la fórmula $P = n \cdot l$ donde,
  n = número de lados
  l = longitud del lado

  Se sustituye $P = n \cdot l$, $P = 6 \cdot 10\ cm = 60\ cm$

- Se calcula el área utilizando la fórmula $A = \dfrac{Perimetro \times Apotema}{2}$

  Se sustituye

$$A = \frac{60\,cm \times 8.66\,cm}{2} = \frac{519.6\,cm^2}{2} = 259.8\,cm^2$$

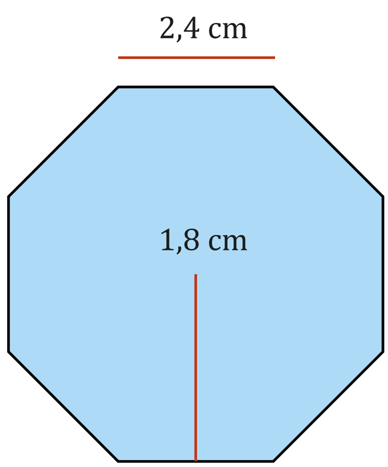


¡A trabajar!

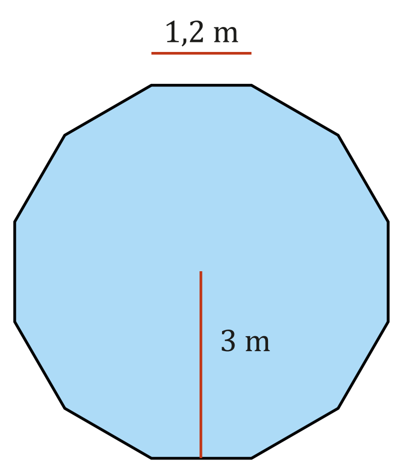
En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada realice los cálculos que se le indican:

1. Calcule el perímetro y el área de los siguientes polígonos regulares:

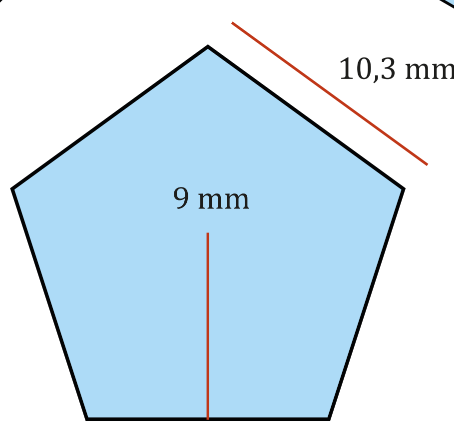
a)

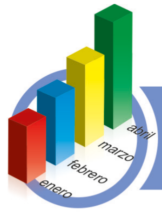


b)



c)



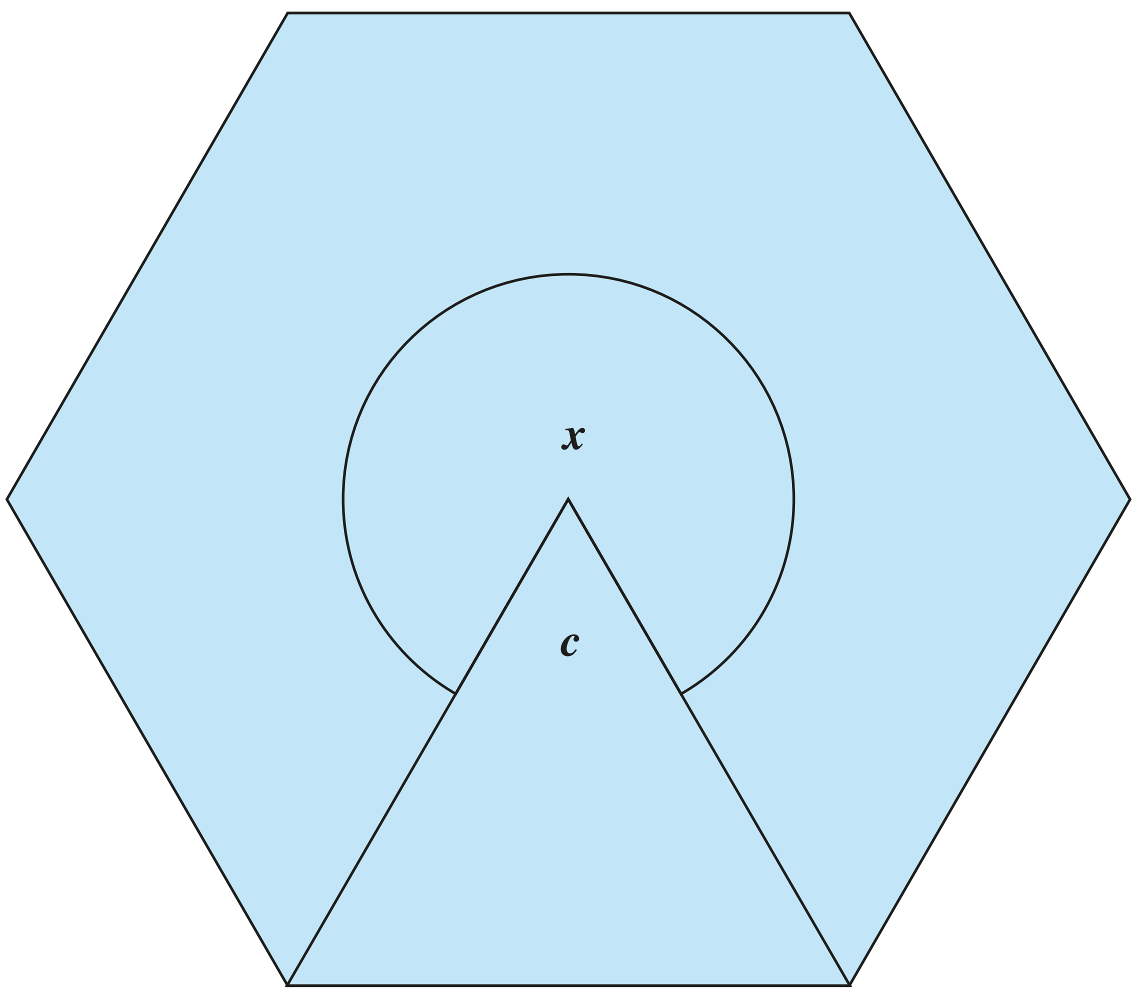


¡Valorando lo aprendido!

Recuerde lo más importante
Un **polígono** es la superficie interior de una línea poligonal cerrada. Pueden ser: **cóncavos** o **convexos** y **regulares** o **irregulares**.

Ahora conteste:
- La siguiente figura es un hexágono regular. “C” es el centro de la figura.

¿Cuál es la medida del ángulo x?, además, se sabe que el lado mide 8 cm y la apotema 8.30 cm, ¿Cuál es el perímetro y el área?



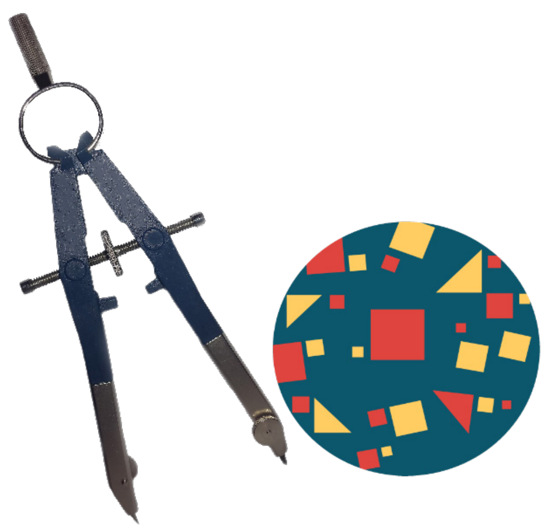
Secuencia 2
CONSTRUCCIONES CON CENTRO

¿Hacia dónde vamos?

Si observa su entorno podrá encontrar que la forma circular aparece en la construcción de objetos artesanales, en el diseño de placas para señalar lugares históricos, en obras arquitectónicas, en imágenes decorativas creadas por el hombre o por la naturaleza y desde hace mucho tiempo en la construcción de llantas para vehículos, hecho que ha trascendido hasta la actualidad.

Muchos de estos diseños pudieran haber sido sustituidos por otras formas geométricas, pero otros no, tal es el caso del diseño de las llantas de los vehículos y cabe preguntarse:

¿Qué elementos hay que tener en cuenta para diseñar y construir un objeto de esta forma?



RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Aprender los principales elementos de la circunferencia.

2. Realizar construcciones geométricas inscritas en un círculo.

¿Qué conoce de esto?

La **mediatriz de un segmento** es la recta que pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular a él.

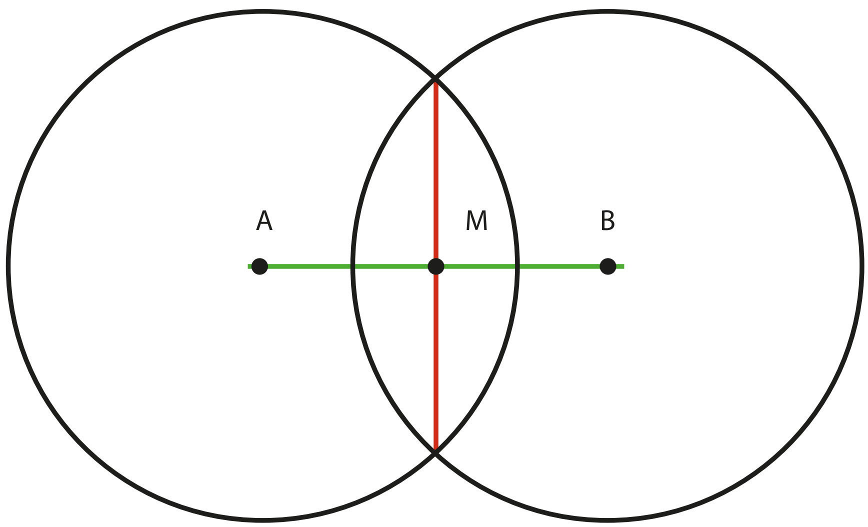
Construcción de la mediatriz de un segmento

1. Se traza el segmento AB.

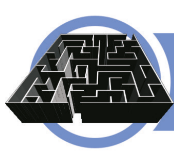
2. Con centro en A se traza una circunferencia de radio mayor que la mitad del segmento AB.

3. Desde B se traza una circunferencia de igual radio que la primera.

4. La recta que pasa por la intersección de las circunferencias es la mediatriz del segmento AB.



Punto medio de un segmento
La intersección de la mediatriz con el segmento AB es el punto medio M.



¿Cuál es la dificultad?

Responda la siguiente pregunta:
¿Cómo se llama al ángulo dentro de la circunferencia cuyo vértice está en la circunferencia?
a) Central
b) Interior
c) Inscrito

¿Qué piensan otros?

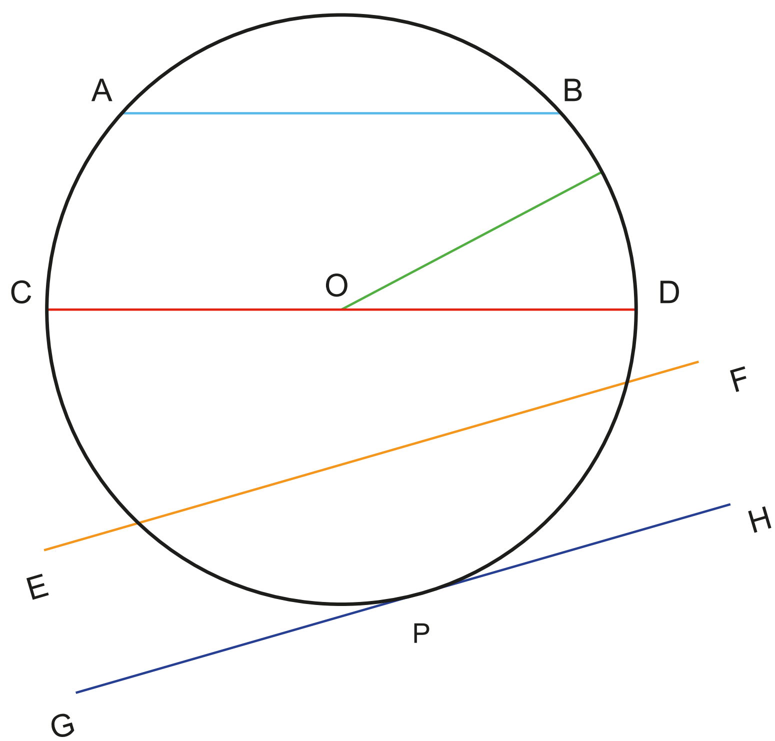
Definición y elementos

Definición de circunferencia
La **Circunferencia** es una curva cerrada cuyos puntos están en un mismo plano. Todos estos equidistan de otro punto llamado centro de la circunferencia.

Definición de círculo
El **Círculo** es la superficie definida, encerrada, por una circunferencia.

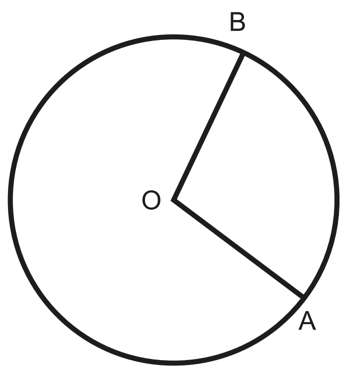
Algunas líneas notables, importantes, en la circunferencia se presentan en la siguiente figura:

- $\overline{AB}$ **cuerda.** Línea que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- $\overline{CD}$ **diámetro.** Línea que une dos puntos extremos de la circunferencia. La divide en dos partes iguales.
- $\overline{EF}$ **secante.** Línea que corta a la circunferencia por dos puntos cualesquiera.
- $\overline{GH}$ **tangente.** Línea externa a la circunferencia que la toca en un solo punto, en el punto P.
- $\overline{OI}$ **radio.** Segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de ésta.
- **AB arco.** El segmento de la circunferencia que va desde el punto A hasta el punto B.

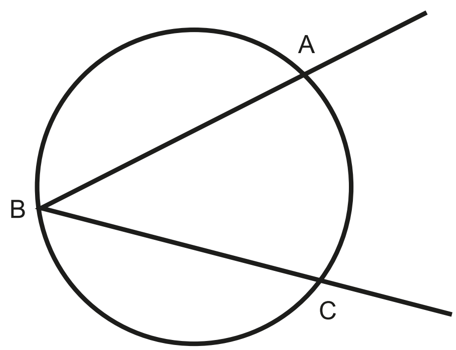


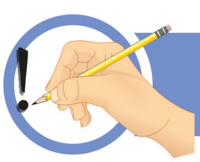
Ángulos importantes
Existen ángulos que son sumamente importantes en el estudio de las propiedades de la circunferencia y de las figuras que se relacionan con esta. Observe la siguiente relación de los ángulos citados.

Ángulo central: Es el ángulo que forman dos radios trazados a dos diferentes puntos de la circunferencia $\angle AOB$.



Ángulo inscrito: Es el ángulo cuyo vértice se encuentra en la circunferencia y que se forma por dos secantes, que pasan por esta recta $\angle ABC$.





¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada conteste cada uno de los enunciados planteados en esta sección:

1. Defina lo que es un círculo.
a) Conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.
b) Conjunto de todos los puntos interiores a una circunferencia.
c) Conjunto de circunferencias con centro común.

2. Cualquier segmento que une un punto de la circunferencia con su centro se llama:
a) Secante
b) Cuerda
c) Radio.

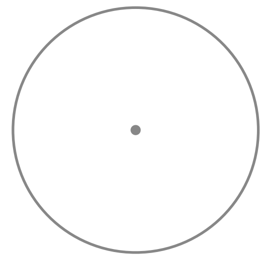
¿Qué piensan otros?

Construcción de polígonos

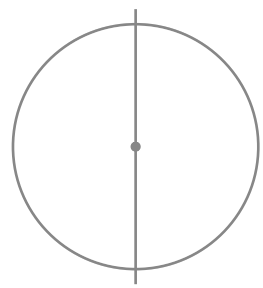
Dado el radio de una circunferencia (o la circunferencia con su centro), inscribir los polígonos regulares:

Triángulo equilátero

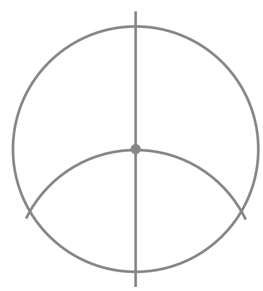
- Primero se traza una circunferencia



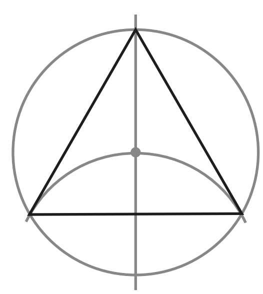
- Se traza un diámetro



- Con centro en un extremo y radio igual a la circunferencia se traza un arco.

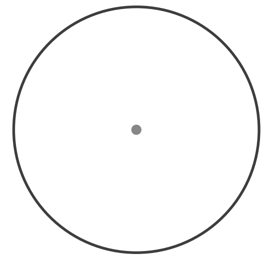


- Se une el otro extremo del diámetro con los dos puntos en la circunferencia que han dado los arcos.

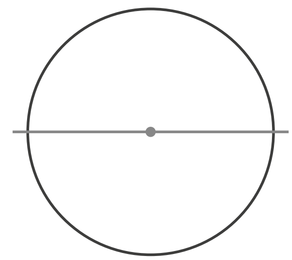


Pentágono

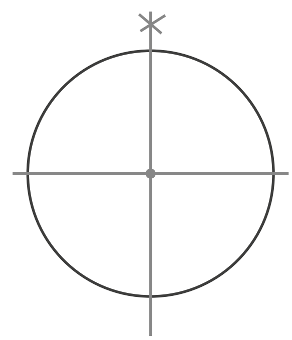
- Primero se traza una circunferencia



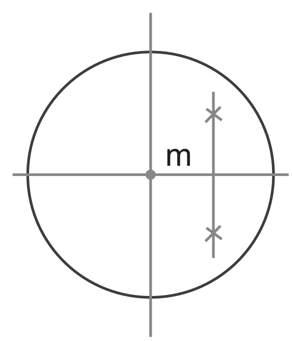
- Se traza un diámetro



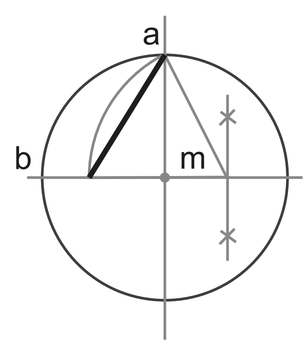
- Se traza un diámetro perpendicular al primero.



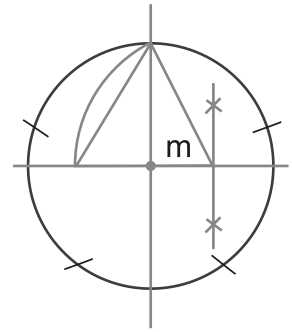
- Se hace la mediatriz de un radio obteniendo m



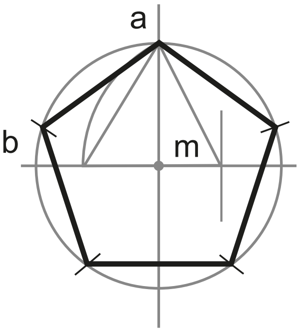
- Con centro en m y radio ab se traza un arco para obtener b $\Longrightarrow$ ab es el lado del pentágono inscrito.



- o Con radio ab empezando por a se trazan arcos sobre la circunferencia.



- o Se unen los puntos de la circunferencia



¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado “**Las construcciones**”, este interesante programa muestra construcciones de polígonos regulares que están inscritos en una circunferencia.

¡A trabajar!

En una hoja en blanco construya con regla y compás lo que se le pide en esta sección:

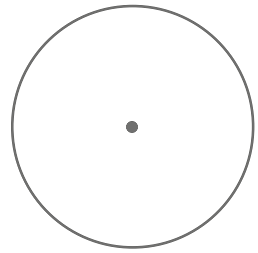
- Construir en base a las construcciones anteriores un cuadrado inscrito en una circunferencia.

¿Qué piensan otros?

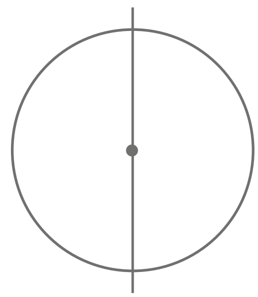
Más construcciones

Hexágono

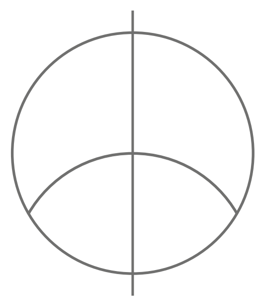
- o Primero se traza una circunferencia



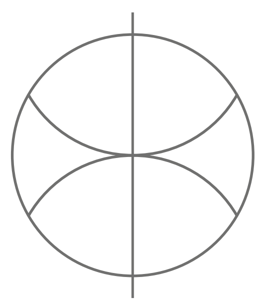
- o Se traza un diámetro



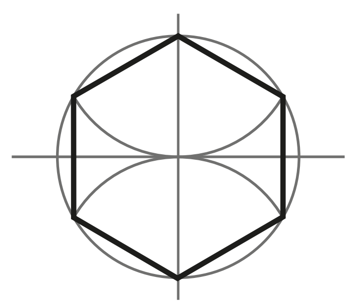
- o Con centro en un extremo y radio igual a la circunferencia se traza un arco.



- o Se repite la operación desde el otro extremo.

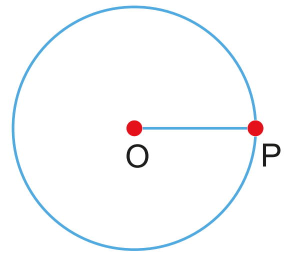


- o Se unen los puntos

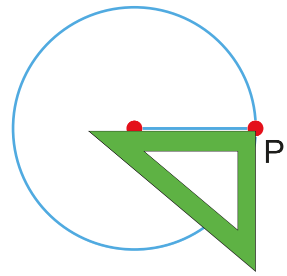


Construcción de la recta tangente a una circunferencia en un punto dado de ella
Consideremos la circunferencia C de centro O y un punto P de la circunferencia.

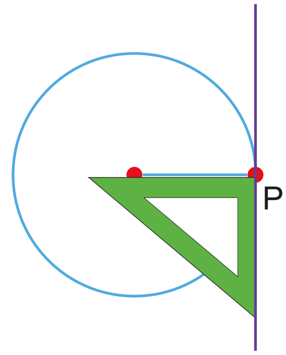
- Se traza el radio OP



- Se traza la recta perpendicular al radio por P, utilizando el ángulo de 90º de un cartabón o escuadra (o midiendo con el semicírculo o transportador la medida).

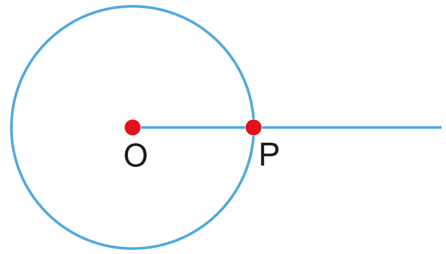


- La perpendicular trazada es tangente a la circunferencia.

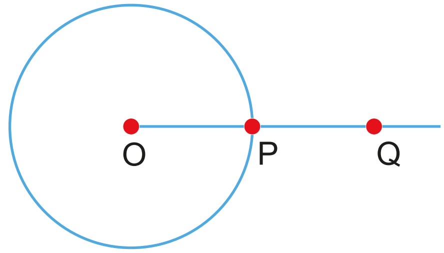


Si se desea también se puede realizar la construcción con exactitud de la tangente utilizando regla y compás:

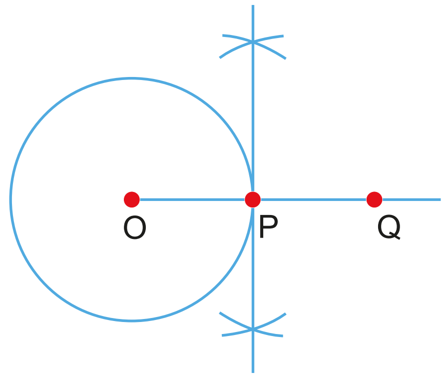
- Se traza la semirrecta OP

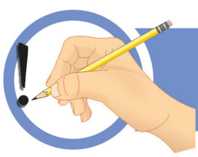


Se ubica un punto Q sobre la semirrecta tal que $\overline{QP} = \overline{PQ}$



Se construye la mediatriz de $\overline{OQ}$ del cual P es punto medio.

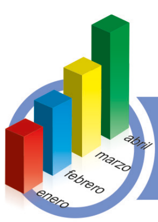




¡A trabajar!

Construya de forma clara y ordenada en su cuaderno de trabajo lo que se le pide:

- Construya un octágono inscrito en una circunferencia.



¡Valorando lo aprendido!

Recuerde las palabras y conceptos más importantes:

Cuerda
Arco
Radio

Tangente
Secante
Diámetro

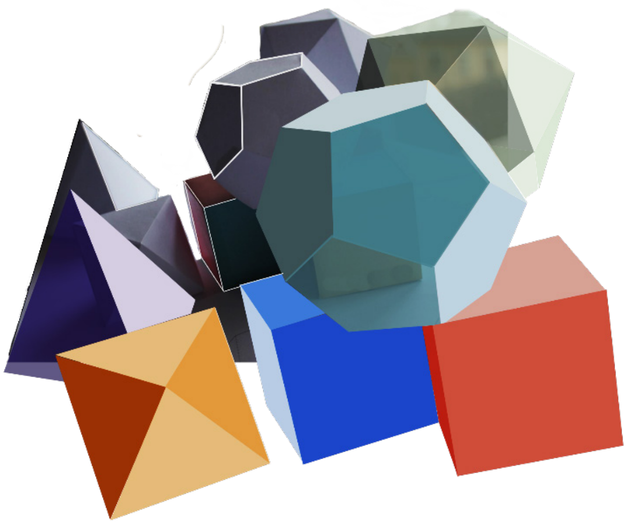
Secuencia 3
POLIEDROS

¿Hacia dónde vamos?

Los cuerpos geométricos están presentes en múltiples contextos de la vida real, de ahí la importancia de estudiarlos.

Es interesante construir distintos cuerpos geométricos a partir de su desarrollo en papel o cartón y, de esta forma, facilitar el posterior aprendizaje y razonamiento del proceso de obtención de áreas y volúmenes, sin necesidad de aprender las fórmulas de memoria.

En los poliedros regulares se prestará especial atención al estudio de los prismas y las pirámides, caracterizando sus elementos y señalando las similitudes y diferencias.



RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

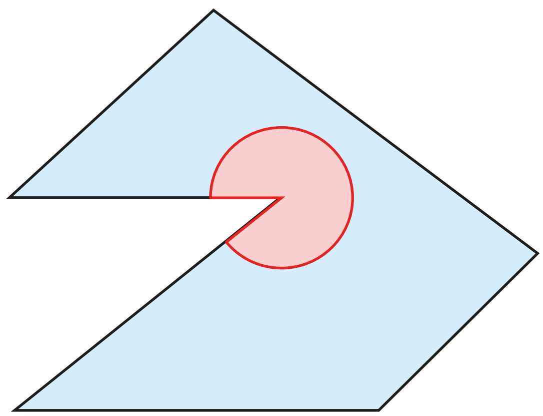
1. Diferenciar los elementos característicos de los prismas y pirámides.

2. Calcular el área de superficies laterales, áreas totales y volumen de primas y pirámides.

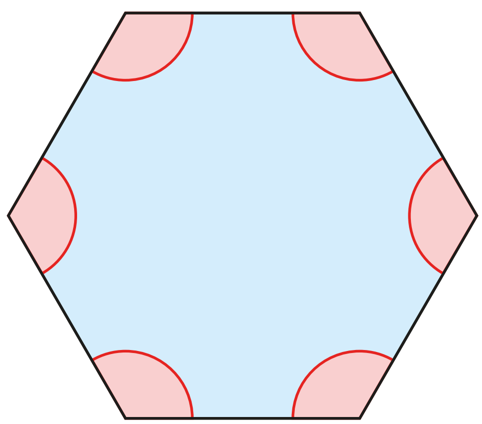
¿Qué conoce de esto?

Clasificación de los polígonos según la magnitud de sus ángulos.

Cóncavos.
Tienen al menos un ángulo interior de más de 180°. Observe que, en los ángulos que son mayores de 180°, el vértice apunta hacia dentro de la figura.



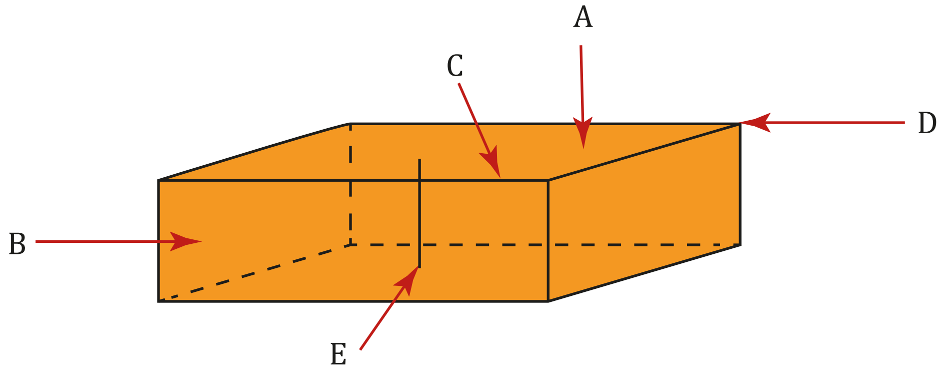
Convexos.
Sus ángulos interiores son todos ellos menores de 180°. Observe como todos los vértices de los ángulos apuntan hacia fuera.



Polígonos regulares	Son aquellos polígonos que tienen todos sus lados iguales. De la misma manera todos sus ángulos deberán ser iguales.
Polígonos irregulares	Son los polígonos que al menos uno de sus lados es distinto a los demás.

¿Cuál es la dificultad?

Responda de forma clara y ordenada la actividad planteada en esta sección:
Escriba el nombre de cada uno de los elementos indicados en el sólido geométrico:



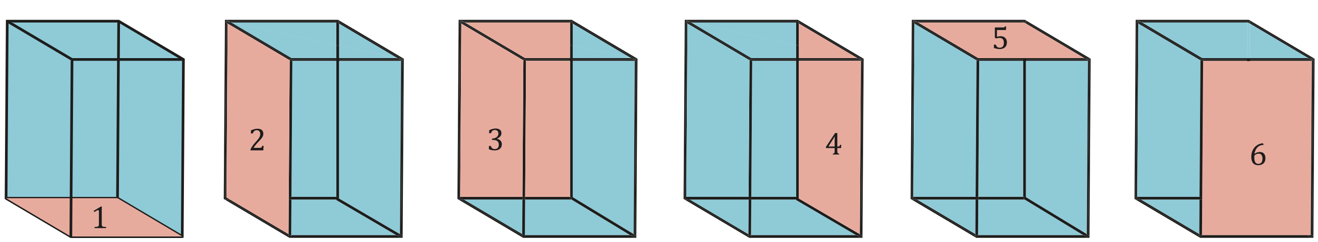
¿Qué piensan otros?

Definición, elementos y clasificación de poliedros

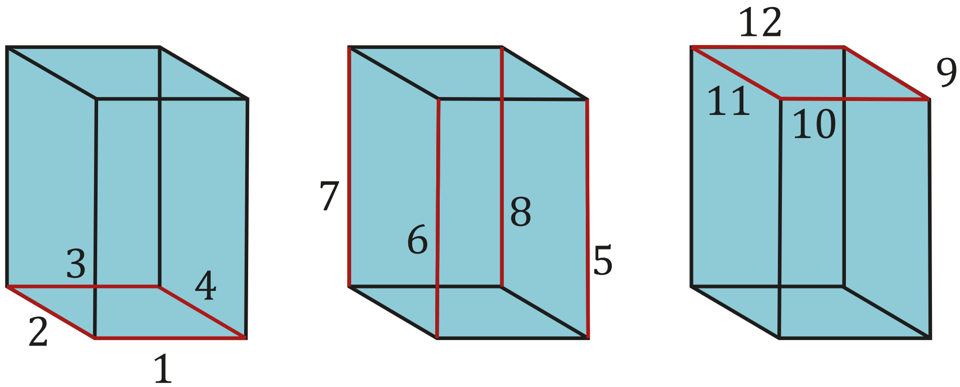
Un **poliedro** es un cuerpo geométrico tridimensional cuyas caras son polígonos. Cada uno de ellos es una cara.
El significado de **poli** es mucho y de **edro** es cara, por tanto, poliedro significa muchas caras.

Elementos de un poliedro.
En un poliedro podemos distinguir los siguientes elementos:

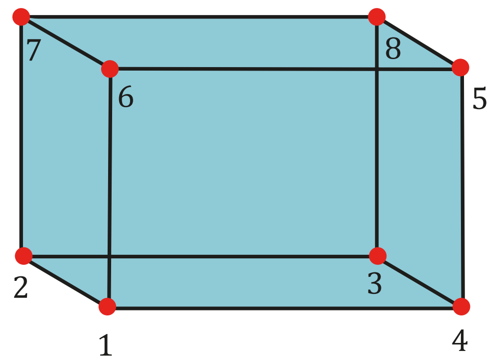
- **Caras**: son los polígonos que forman el poliedro.



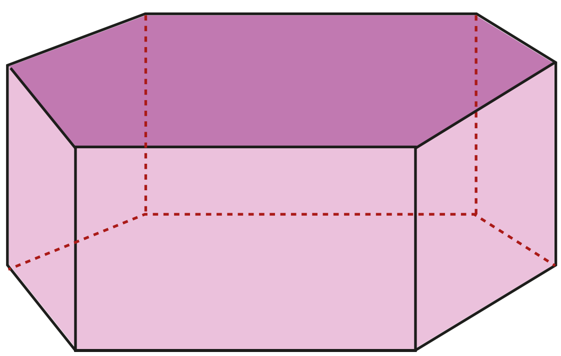
• **Aristas**: son los segmentos en los que se intersecan (cortan) las caras.



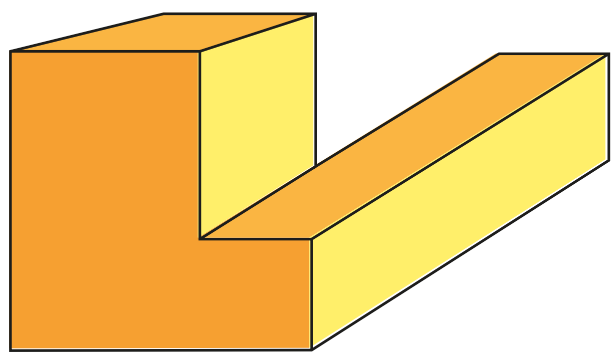
• **Vértices**: son los puntos donde se intersecan las aristas.



Los poliedros pueden ser:

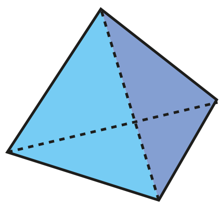


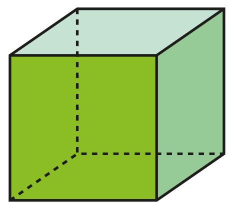
Poliedro convexo: Al prolongarse sus caras no cortan al poliedro.

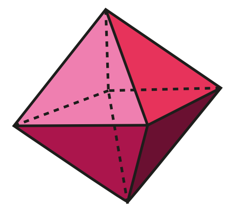


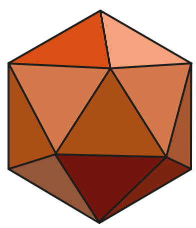
Poliedro cóncavo: Al prolongarse sus caras, alguna de ellas corta al poliedro.

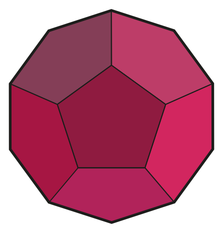
Poliedros regulares:
Todas las caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice se une el mismo número de caras. Solo existen cinco poliedros regulares:


Tetraedro


Cubo


Octaedro


Dodecaedro

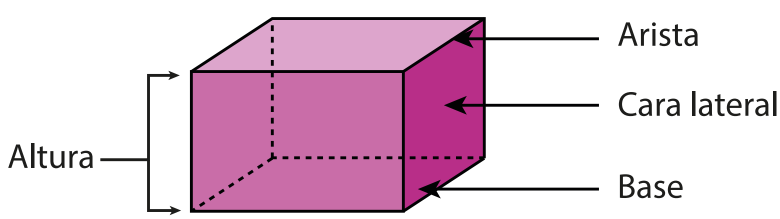

Icosaedro

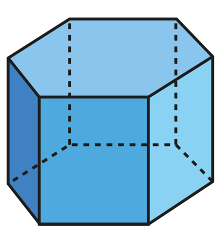
Tipos de poliedros

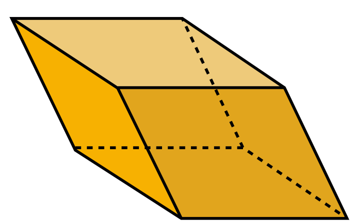
Prismas
Un prisma es un poliedro determinado por:
- **bases:** Dos caras paralelas que son polígonos iguales.

- **Caras laterales**, que son paralelogramos, como lados tienen las bases.

- **La altura** del prisma es la distancia entre las bases. Si la altura coincide con las aristas laterales el prisma es recto, en caso contrario es oblicuo



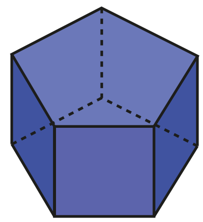

Prisma recto


Prisma oblicuo

Las **caras laterales** de los prismas rectos son rectángulos.
Un prisma es **convexo** o **cóncavo** si respectivamente sus bases son polígonos convexos o cóncavos.

A los prismas se les clasifica según el número de lados de sus bases: triangular (3 lados), cuadrangular (4 lados), pentagonal (5 lados), hexagonal (6 lados), etc.

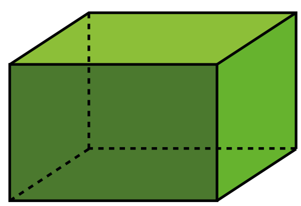
Prisma regular: Es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.



Prisma pentagonal regular

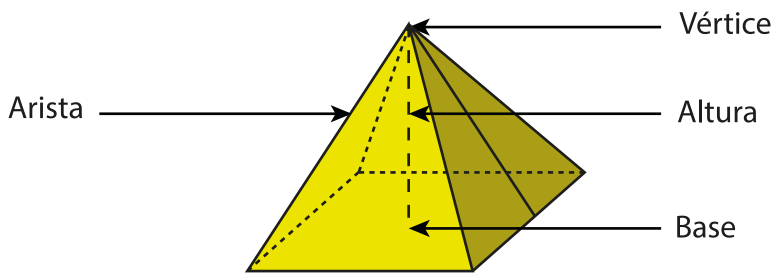
Paralelepípedos: Son los prismas cuyas bases son paralelogramos.

Ortoedro: Es un paralelepípedo recto.



Pirámides
Una pirámide es un poliedro determinado por:

- Una **cara poligonal** denominada base.
- Tantas **caras triangulares** como lados tienen la base.
- **La altura** de una pirámide es la distancia del vértice a la base.

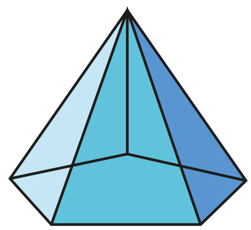


El punto donde convergen todos los triángulos se denomina vértice o cúspide.

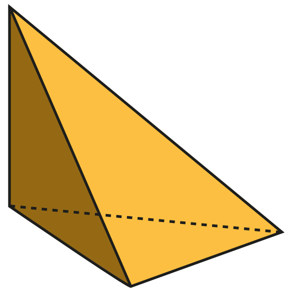
Una pirámide es **convexa** o **cóncava** si su base es un polígono convexo o cóncavo respectivamente.

Según la forma de la base, las pirámides se clasifican en triangulares, cuadrangulares, pentagonales...

Pirámide recta: Las caras laterales son todas triángulos isósceles.

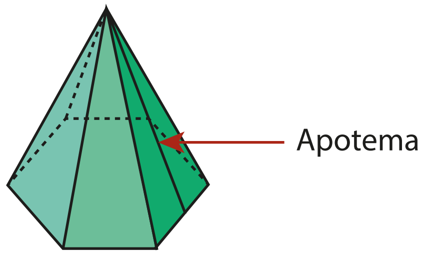


Pirámide oblicua: Las caras laterales no son todas triángulos isósceles.



Pirámide regular: Es una pirámide cuya base es un polígono regular.

Apotema: Es la altura de cualquiera de las caras laterales de una pirámide regular, (Es decir la altura del triángulo lateral).



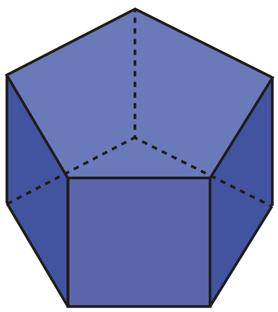
¿Qué dice la ley?

Relación de Euler: Euler demostró que en un poliedro se mantiene la relación:

$$\mathbf{C + V = A + 2}$$

donde C: número de caras, V: número de vértices y A: número de aristas del prisma.

Ejemplo:
Observe con atención el siguiente ejemplo donde se cumple la relación de Euler.



Prisma de base pentagonal:

$C = 7;\ \mathbf{V} = 10;\ \mathbf{A} = 15$

$C + \mathbf{V} = 17 = \mathbf{A} + 2$

¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada encierre la letra que hace cierto el enunciado:

1. En los prismas inclinados u oblicuos:
 a. Todas las caras son rectangulares.
 b. Alguna cara puede ser un rectángulo.
 c. Ninguna cara puede ser rectangular

2. Un cubo es:
a. Un pentaedro.
b. Un tetraedro.
c. Un exaedro.

3. Todos los prismas tienen:
a. El doble de vértices que lados tiene una base
b. El mismo número de vértices que lados tiene una base
c. Tantos vértices como números de lados de una base más dos.

¿Qué piensan otros?

Área de prismas

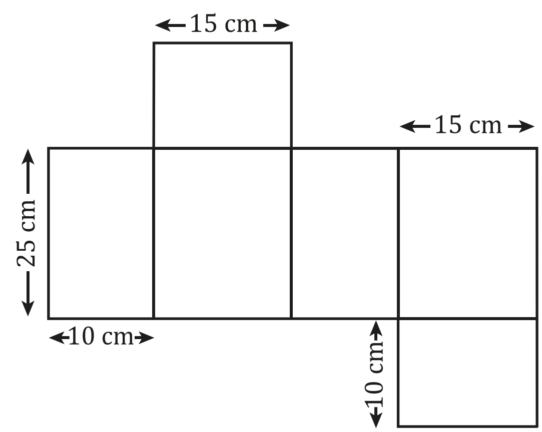
El área de un prisma o de cualquier poliedro, es la suma de las áreas de cada una de sus caras. Se pueden distinguir:

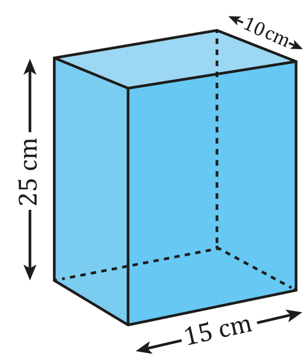
- **Área lateral:** Suma de las áreas de las caras laterales. En el prisma las caras laterales son rectángulos.
- **Área total**: Es la suma del área lateral y el área de las dos bases. Las bases son dos polígonos iguales.

Ejemplo 1:

Calcule el área lateral y el área total de un paralelepípedo de 25 cm de alto, 15 cm de ancho y 10 cm de largo.

Solución:
Paralelepípedo de forma desarrollada.





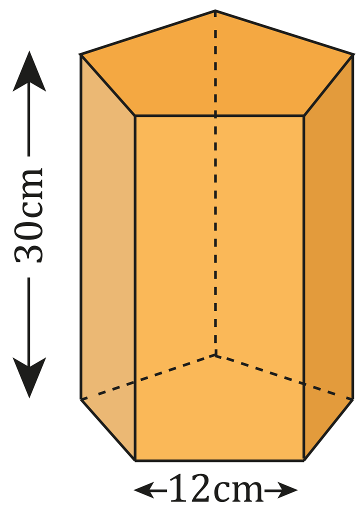
Área lateral:
Cálculo del área de un rectángulo de $25\ cm$ por 10 cm: $A = 25\ cm \times 10\ cm = 250 cm^2$
Cálculo del área de un rectángulo de $25\ cm$ por 15 cm: $A = 25\ cm \times 15\ cm = 375\ cm^2$
El área lateral es: $\boldsymbol{Al} = 2 \times 375\ cm^2 + 2 \times 250\ cm^2 = 1250\ cm^2$

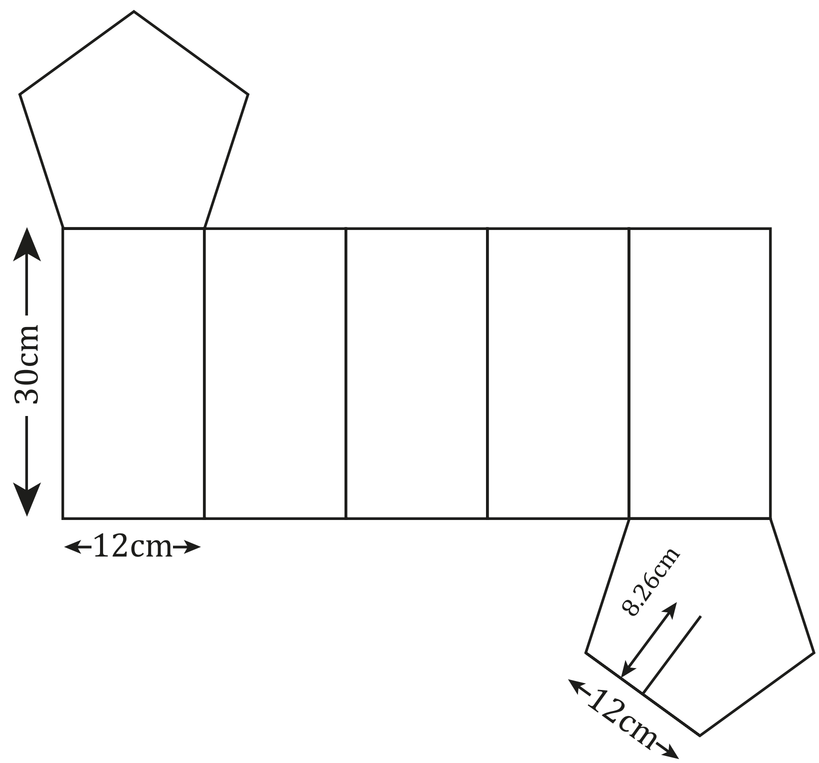
Área total:
Cálculo del área de una base que es un rectángulo de $15\ cm$ por $10\ cm$:
$A = 15\ cm \times 10\ cm = 150\ cm^2$

El área total es: $\boldsymbol{At} = 1250\ cm^2 + 2 \times 150\ cm^2 = 1550\ cm^2$

Ejemplo 2:
Calcule el área lateral y el área total de un prisma pentagonal de 30 cm de alto y 12 cm de arista de la base. La apotema de la base mide 8.26 cm.

Solución:
Prisma pentagonal de forma desarrollada





Agregar como calcular la apotema

Área lateral:
Cálculo del área de un rectángulo de 30 cm por 12 cm: $30\ cm \times 12\ cm = 360\ cm^2$

El área lateral es: $\boldsymbol{Al} = 5 \times 360\ cm^2 = 1800\ cm^2$

Área total:
Las bases son dos pentágonos de 12 cm de lado y 8.26 cm de apotema:

Cálculo del área de una de las bases:

$$Ab = \frac{P \times a}{2} = \frac{5 \times 12\ cm \times 8.26\ cm}{2} = 247.8\ cm^2$$

El área total es: $\boldsymbol{At} = 1800\ cm^2 + 2 \times 247.8\ cm^2 = 2295.6\ cm^2$

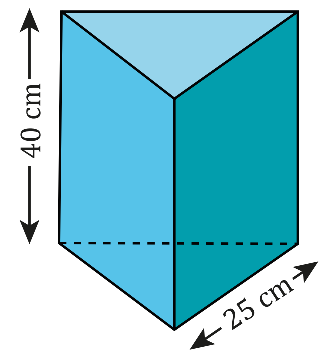
¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**El mundo de los poliedros**", en este interesante programa se muestran los elementos de los poliedros, su forma en tercera dimensión y el cálculo del área de estos.

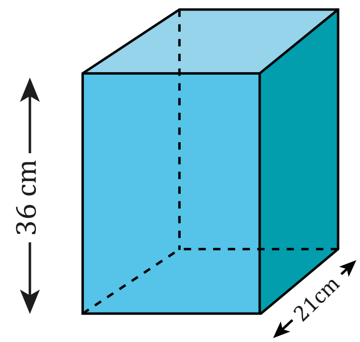
¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada resuelva los ejercicios planteados en esta sección:

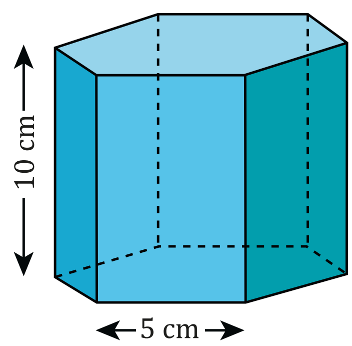
1. Calcule el área lateral y el área total de un prisma triangular de 40 centímetros de altura y 25 centímetros de arista de la base.



2. Calcule el área lateral y el área total de un prisma de base cuadrada de 36 centímetros de altura y 21 centímetros de arista de la base.



3. Calcule el área lateral y el área total de un prisma hexagonal de 10 centímetros de altura y 5 centímetros de arista de la base.



¿Qué piensan otros?

Área de la pirámide

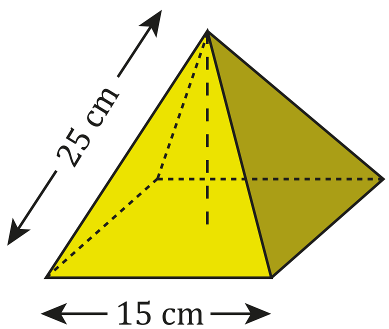
Al desarrollar una pirámide se obtiene la base que es un polígono y las caras laterales que son triángulos.

- **Área lateral:** Suma de las áreas de las caras laterales.

- **Área total:** Es la suma del área lateral y el área de la base. La base es un polígono cualquiera, regular o no. (Aquí se trabajará con bases que son polígonos regulares).

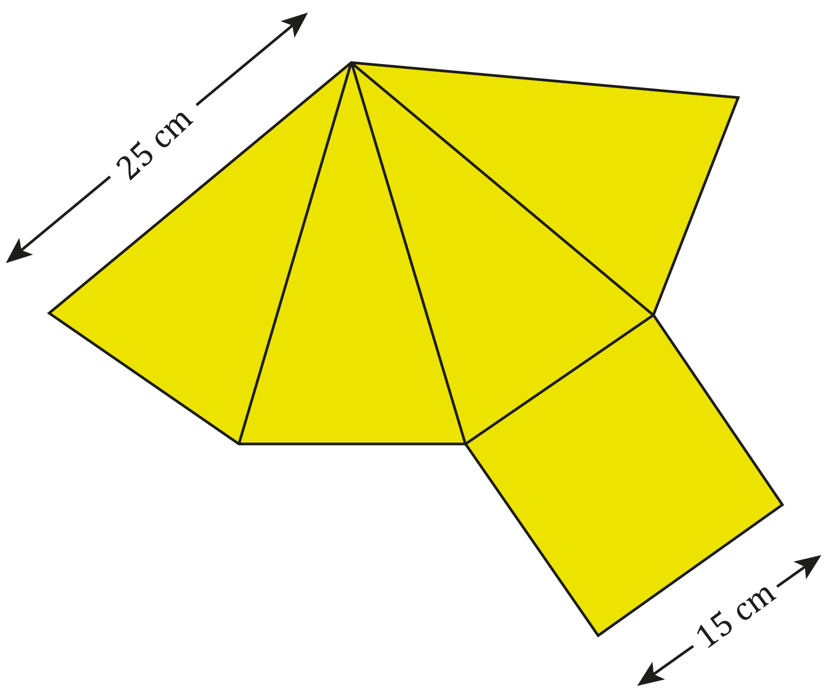
Ejemplo 1:

Calcule el área lateral y el área total de una pirámide de base cuadrada de 25 cm de arista lateral y 15 cm de arista de la base.



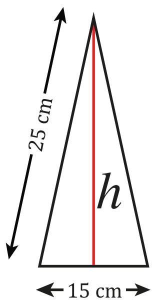
Solución:

Prisma pentagonal de forma desarrollada.



Área lateral:

Hay cuatro triángulos de 15 cm de base. Se necesita calcular la altura:



$$h = \sqrt{25^2 - (7.5)^2} = \sqrt{568.75} = 23.85\ cm$$

$$A = \frac{base \times altura}{2} = \frac{15 \times 23.85}{2} = 178.86\ cm^2$$

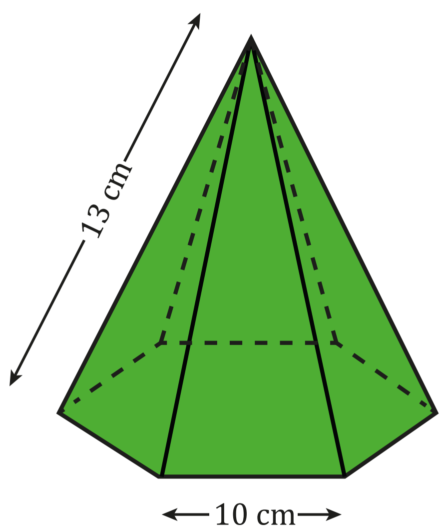
El área lateral es: $\boldsymbol{Al} = 4 \times 178.86 = 715.45\ cm^2$

Área total:
La base es un cuadrado de 15 cm de lado: $\boldsymbol{Ab} = 15 \times 15 = 225\ cm^2$

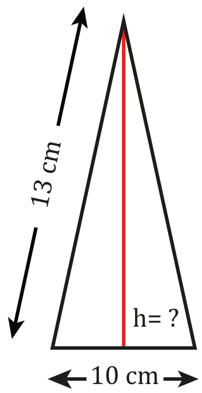
El área total es: $\boldsymbol{At} = 715.45 + 225 = 940.45\ cm^2$

Ejemplo 2:

Calcule el área total de una pirámide hexagonal regular con aristas laterales de 13 cm y aristas de la base de 10 cm.



Solución:
Área lateral:
Hay seis triángulos de 10 cm de base. Se necesita calcular la altura:

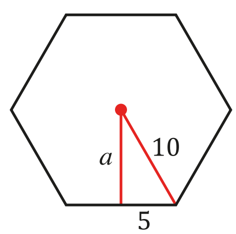


$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\ cm$$

$$A = \frac{base \times altura}{2} = \frac{10\ cm \times 12\ cm}{2} = 60\ cm^2$$

El área lateral es: $\boldsymbol{Al} = 6 \times 60\ cm^2 = 360\ cm^2$

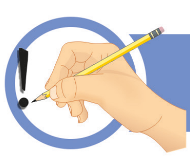
Área total:
La base es un hexágono de 10 cm de lado:



Cálculo de la apotema: $a = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 8.66\ cm$

$$\text{Ab} = \frac{\text{P×a}}{2} = \frac{6\times10\ \text{cm}\times8.66\ \text{cm}}{2} = 259.8\ \text{cm}^2$$

El área total es: $\text{At} = 360\ \text{cm}^2 + 259.8\ \text{cm}^2 = 619.8\ \text{cm}^2$



¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada resuelva el ejercicio planteado.

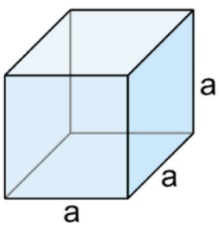
- Calcule el área lateral y el área total de una pirámide hexagonal de 30 cm de arista lateral y 12 cm de arista de la base.

¿Qué piensan otros?

Volumen de poliedros

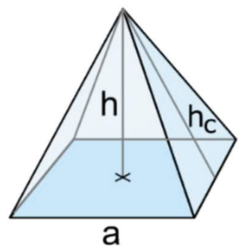
Definición: Un cuerpo geométrico es un elemento que existe en la realidad o que somos capaces de concebir, el cual ocupa un volumen en el espacio, es decir, tiene tres dimensiones (ancho, alto y largo) a diferencia de las figuras, las cuales no tienen volumen.

Para encontrar el volumen de poliedros se utilizarán las formulas siguientes de acuerdo a cada poliedro:



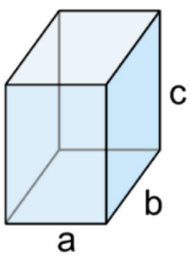
Cubo

$$V = a^3$$



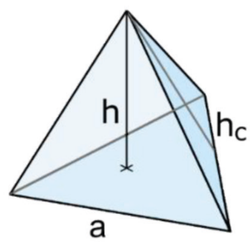
Pirámide

$$V = \frac{A_{base} \times h}{3}$$



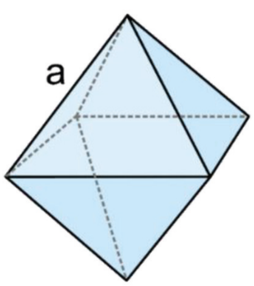
Prisma recto

$$V = a \times b \times c$$



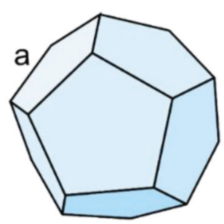
Tetraedro

$$V = \frac{\sqrt{12}}{12}a^3$$



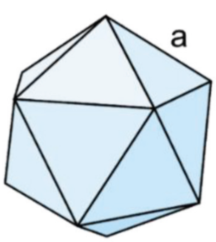
Octaedro

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$



Dodecaedro

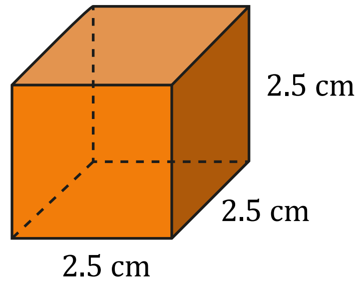
$$V \quad \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}a^3$$



Icosaedro

$$V = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})a^3$$

Ejemplos:
a) Calcule el volumen del prisma.

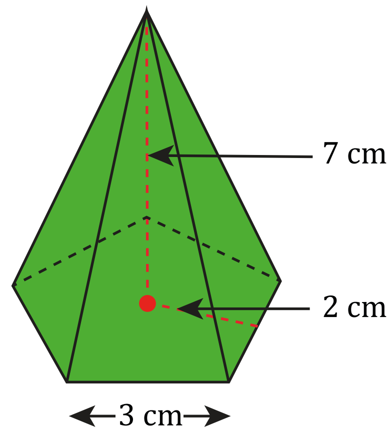


Solución:

Fórmula a utilizar: $V = a^3$

$$V = (2.5\ \text{cm})^3 = 15.625\ \text{cm}^3$$

b) Calcule el volumen de una pirámide de base pentagonal.



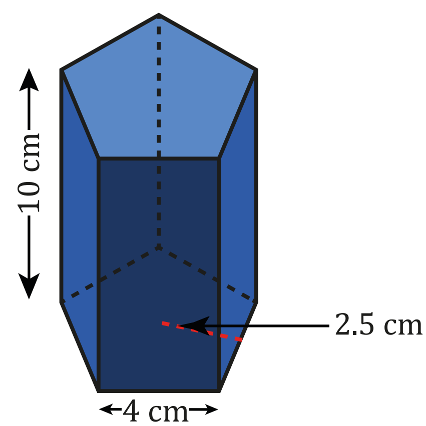
Solución:
Fórmula a utilizar: $\boldsymbol{V = \dfrac{A_{base} \times h}{3}}$

$$\boldsymbol{A_{base}} = \frac{P \times a}{2} = \frac{(3\ cm \times 5)\ 2\ cm}{2} = 15\ cm^2$$

$$\boldsymbol{V} = \frac{15\ cm^2 \times 7cm}{3} = \boldsymbol{35}\ cm^3$$

c) Calcule el volumen del siguiente prisma pentagonal.

Solución:



Fórmula a utilizar: $\boldsymbol{V = A_{base} \times h}$

$$\boldsymbol{A_{base}} = \frac{P \times a}{2} = \frac{(4\ cm \times 5)\ 2.75\ cm}{2} = 27.5\ cm^2$$

$$\boldsymbol{V} = 27.5\ cm^2 \times 10\ cm = \boldsymbol{275}\ cm^3$$

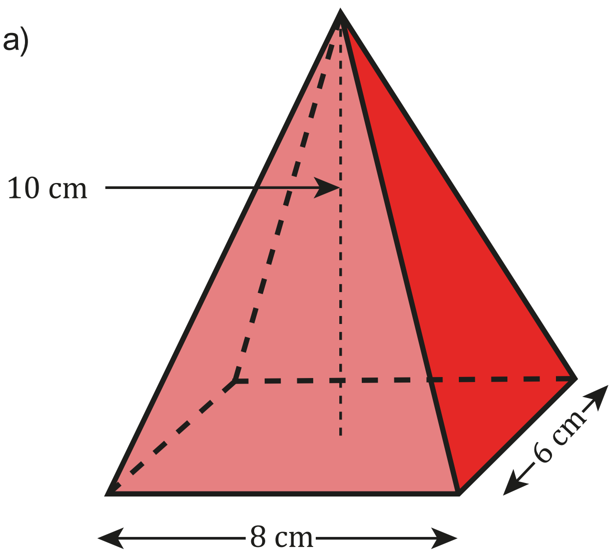
¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**Volumen de poliedros**", en este interesante programa se muestra el cálculo del volumen de algunos poliedros aplicados en la vida cotidiana.

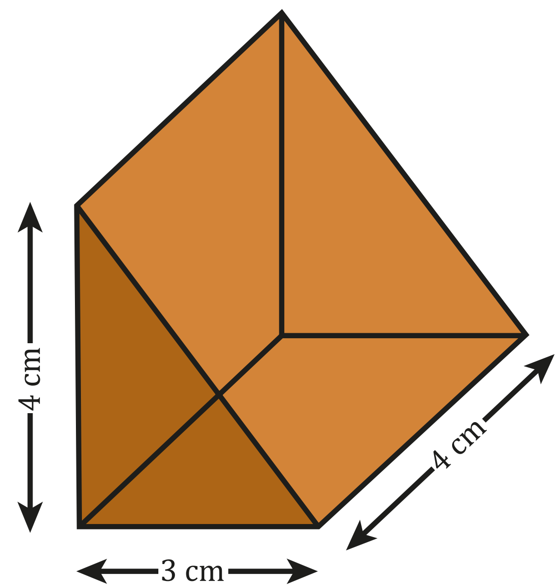
¡A trabajar!

De forma clara y ordenada calcule el volumen de los siguientes solidos geométricos:

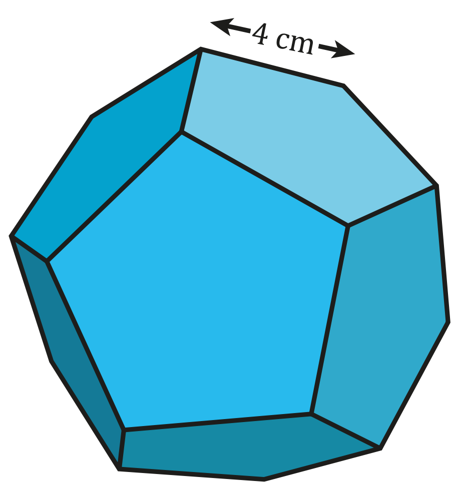
a)

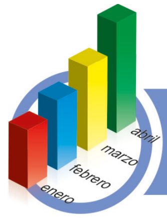


b)



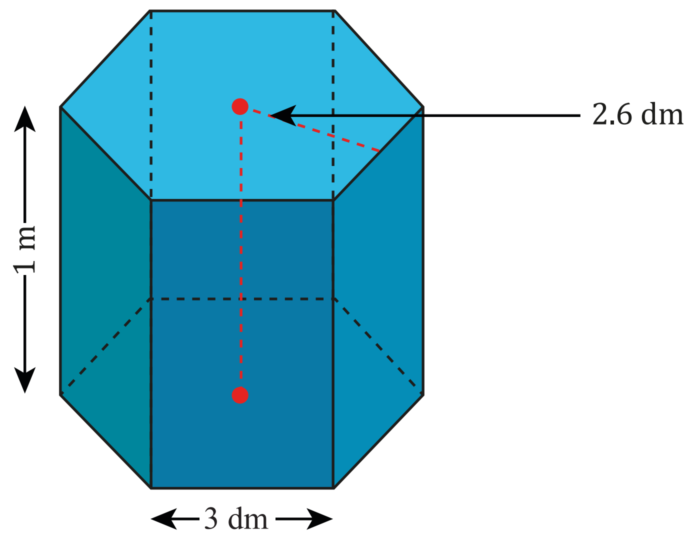
c)





¡Valorando lo aprendido!

Resuelva de forma clara y ordenada el siguiente problema:
Calcule cuánto tiempo tardará en llenarse el depósito de la figura si se echan 85 litros por minuto.



Secuencia 4
CUERPOS REDONDOS

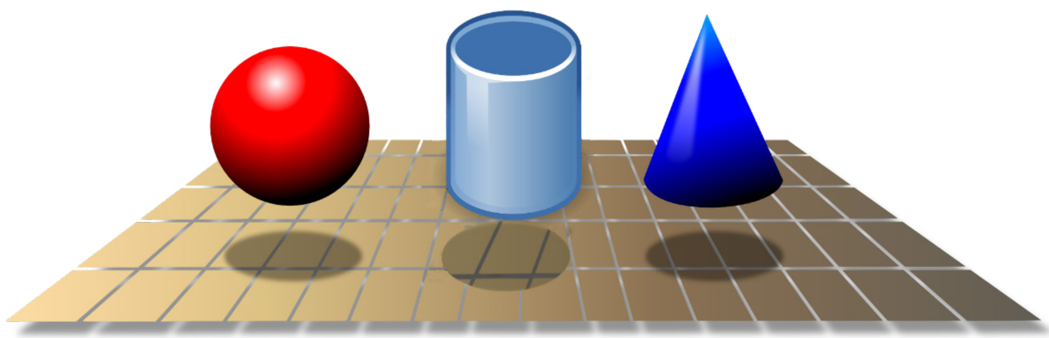
En el ámbito de la geometría, se denomina cuerpo al elemento que dispone de tres dimensiones: altura, anchura y longitud. De acuerdo a sus características, es posible distinguir entre distintos tipos de cuerpos geométricos.

Los cuerpos redondos disponen de una o más superficies o caras con forma curva. Esto les permite diferenciarse de los cuerpos planos o poliedros, compuestos totalmente por caras planas. Entre los cuerpos redondos se tienen:

Los conos; se trata de un sólido de revolución que se forma a partir del giro de un triángulo rectángulo en torno a un cateto.

Los cilindros también son cuerpos redondos. En este caso, el objeto se desarrolla a partir del desplazamiento paralelo de la generatriz (recta) por la directriz (curva plana).

Entre los cuerpos redondos también aparecen las **esferas**, que son superficies de revolución compuestas por puntos que equidistan de un centro.



RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

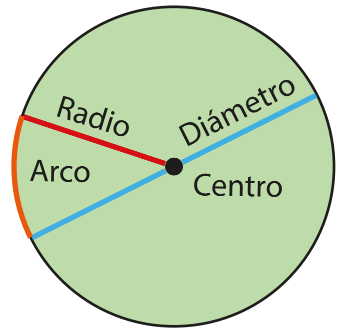
1. Diferenciar los elementos y tipos de cuerpos redondos más comunes.

2. Calcular el área de superficies laterales, áreas totales y volumen del cilindro, cono y la esfera.

¿Qué conoce de esto?

El área de un círculo es igual al producto de π por el radio (r) al cuadrado.

Recuerde que π es la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro y tiene un valor aproximado de 3.1416…



$$Área = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{D^2}{4}$$

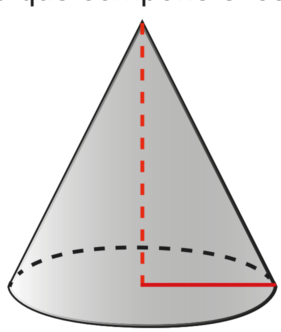
También se puede calcular el área conociendo el diámetro del círculo (D), ya que éste es el doble del radio.

Como un círculo es un polígono regular de infinitos lados, podemos aplicar la fórmula general del área del polígono regular:

$$Área = \frac{perímetro \times apotema}{2} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot r}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^2}{2} = \pi \cdot r^2$$

¿Cuál es la dificultad?

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada responda:
Escribir el nombre de cada elemento que compone el cono:



¿Qué piensan otros?

Definición y clasificación de cuerpos redondos

Los **cuerpos redondos** son aquellos que tienen, al menos, una de sus caras o superficies de forma curva. También se denominan **cuerpos de revolución** porque pueden obtenerse a partir de una figura que gira alrededor de un eje.

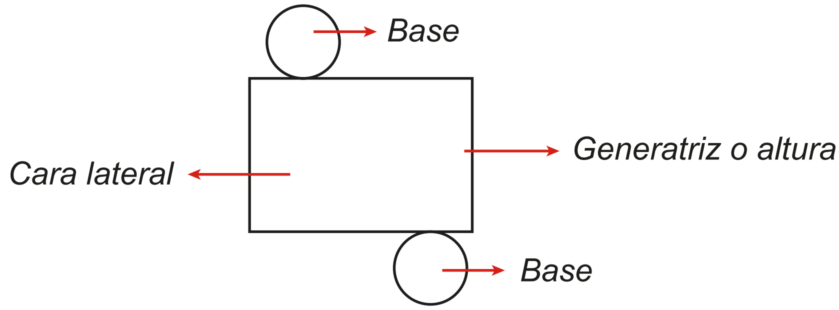
Clasificación de cuerpos redondos

Cilindro.
Un cilindro recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. La recta en la que se sitúa el lado sobre el que gira se denomina **eje de rotación** y el lado paralelo a él es la generatriz.

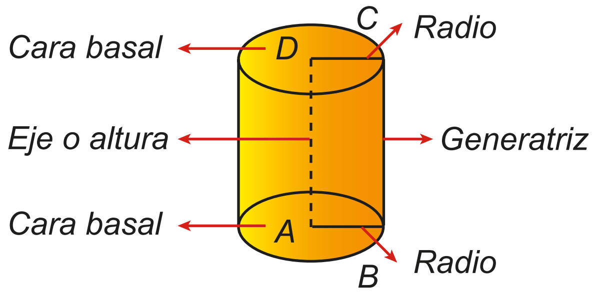
En un cilindro distinguimos la **superficie lateral** y **dos bases** que son dos círculos iguales.

La **altura** del cilindro es la distancia entre las dos bases. En un cilindro recto la altura y la generatriz miden lo mismo.

Cilindro



Cilindro desarrollado

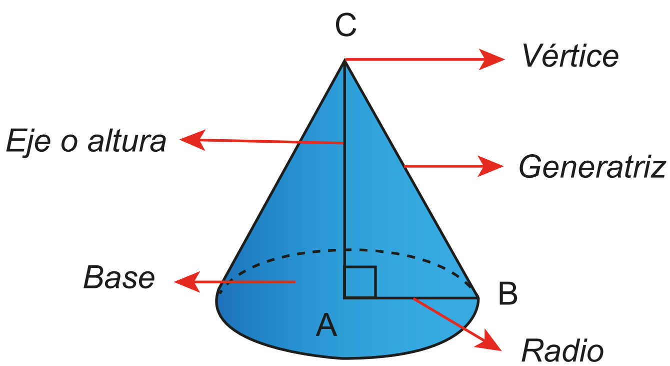


Cono.
Un **cono recto** es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos. La recta en la que se sitúa el lado sobre el que gira se denomina **eje de rotación** y la hipotenusa es la **generatriz**.

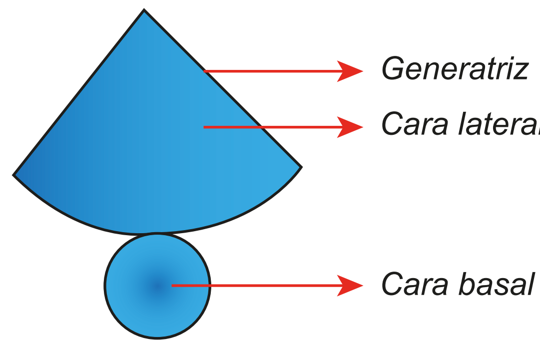
En un cono distinguimos la **superficie lateral** y la base que es un círculo. El punto donde convergen las generatrices es el **vértice**.

La **altura** del cono recto es la distancia del vértice a la base

Cono

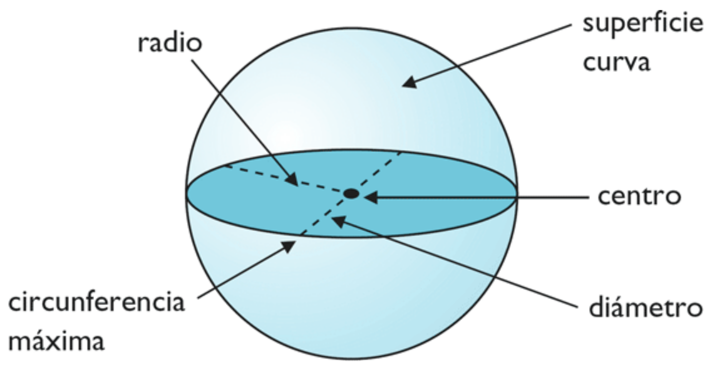


Cono desarrollado



Esfera.
La esfera es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un semicírculo (o un círculo) alrededor del diámetro. La recta en la que se sitúa éste es el eje de revolución y la semicircunferencia la generatriz.

La superficie esférica **no es desarrollable** en el plano



¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo encierre en un círculo la letra correspondiente que hace cierto el enunciado.

1. Un cono:
a. No tiene base.
b. Tiene dos bases.
c. Tiene una base.

2. El desarrollo de la cara lateral del cilindro es:
a. Dos círculos
b. Un sector circular
c. Un rectángulo

3. Un cilindro:
a. No tiene base.
b. Tiene dos bases.
c. Tiene una base.

4. Un cono:
a. No tiene ningún vértice.
b. Tiene varios vértices.
c. Tiene un vértice.

5. Una esfera:
a. Una se desarrolla en el plano y forma un círculo
b. Una esfera no puede desarrollarse en el plano.

¿Qué piensan otros?

Área de cuerpos redondos

Área de**l cilindro**

Para hallar el área del cilindro observe muy bien su desarrollo: está formado por un rectángulo y dos círculos.

- **Área lateral:** es un rectángulo, en el que uno de sus lados es igual a la longitud de la circunferencia de la base $(2\pi r)$, y el otro es la altura (h).

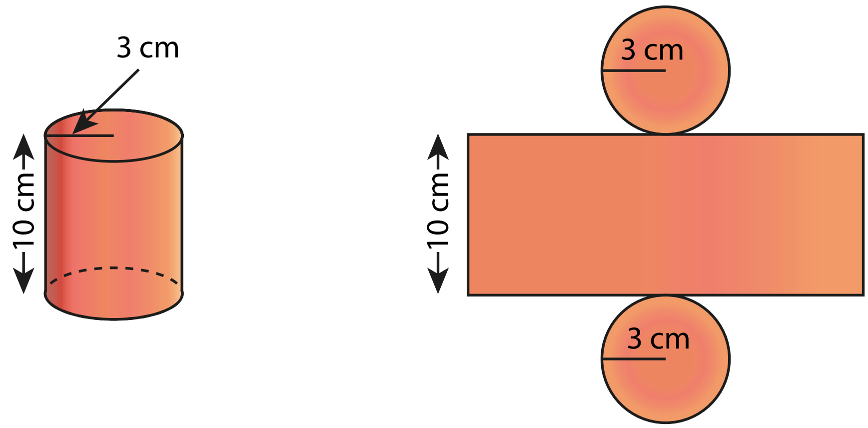
$$\boldsymbol{A_L} = \textit{perímetro de la base} \cdot \textit{altura} = 2\pi\, r \times h$$

➢ **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y las áreas de las dos bases.

$$\boldsymbol{A_T} = 2\pi h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$$

Ejemplo:

Calcule el área lateral y el área total de un cilindro de 10 cm de alto, y de 3 cm de radio de la base.



Área lateral: $A_L = 2\pi rh = 2\pi(3\,cm)(10\,cm) = 2\pi \cdot 30\ cm^2 = 188.496\ cm^2$

Área de las bases: $Ab = 2\pi r^2 = 2\pi(3\,cm)^2 = 2\pi \cdot 9\ cm^2 = 56.548\ cm^2$

El área total es: $\boldsymbol{At} = 188.496\ cm^2 + 56.548\ cm^2 = 245.044\ cm^2$

Área del cono

Para hallar el área de un cono observe muy bien su desarrollo: está formado por un sector circular y un círculo, que es la base.

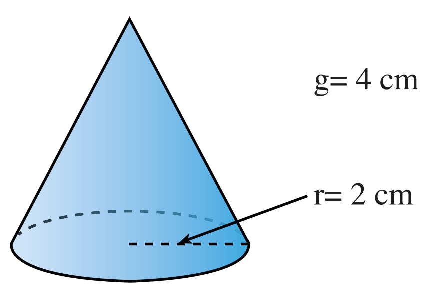
➢ **Área lateral:** la calculamos como si fuese el área de un triángulo, en el que la longitud de la base es la de la circunferencia $(2\pi r)$ y la altura es el radio del sector.

$$\boldsymbol{A_L} = \frac{longitud\ de\ la\ base \cdot altura}{2} = \frac{2\pi\, r \times g}{2} = \pi\, rg$$

➢ **Área total:** $A_T = \pi rg + \pi r^2 = \pi r(g+r)$

Ejemplo:

Calcule el área lateral y el área total de un cono de 4 cm de generatriz y de 2 cm de radio de la base.



Área lateral: $A_L = \pi rg = \pi(2cm)(4cm) = \pi \cdot 8\ cm^2 = 25.133\ cm^2$

Área de la base: $Ab = \pi r^2 = \pi(2cm)^2 = \pi \cdot 4\ cm^2 = 12.566\ cm^2$

El área total es: $\boldsymbol{At} = 25.133\ cm^2 + 12.566\ cm^2 = 37.699\ cm^2$

Área de una esfera

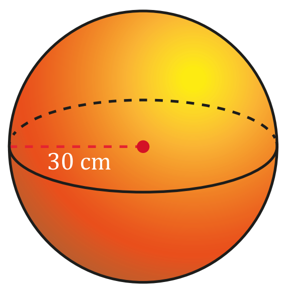
La esfera no se puede desarrollar y representar en un plano.

El **área de la esfera** es igual a cuatro veces la superficie del círculo de mayor radio que contiene.

- Área: $A = 4\pi r^2$

Ejemplo:

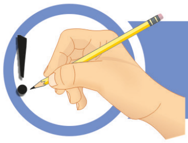
Calcule el área de una esfera 30 cm de radio.



$$\boldsymbol{A} = 4\pi r^2 = 4\pi(30\ cm)^2 = 4\pi \times 900\ cm^2 = \pi \times 3600\ cm^2 = 11{,}309.76\ cm^2$$

¡Descúbralo en la tele!

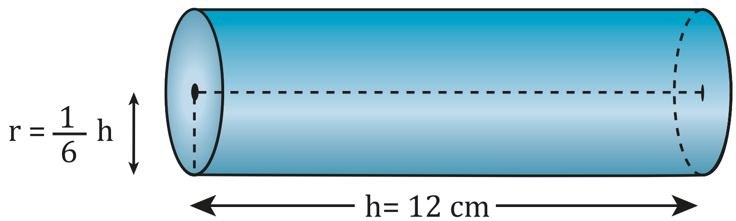
En esta sección se presentará el programa de televisión denominado “**Cuerpos con área**”, en este interesante programa se resolverán problemas especiales de cuerpos redondos en los cuales habrá que encontrar su área.



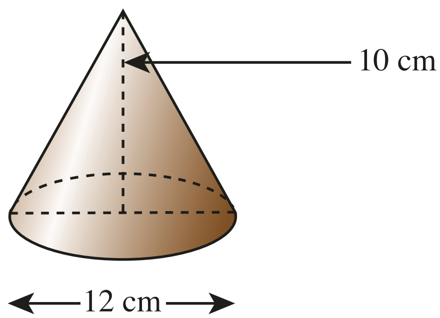
¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada resuelva los ejercicios planteados en esta sección:

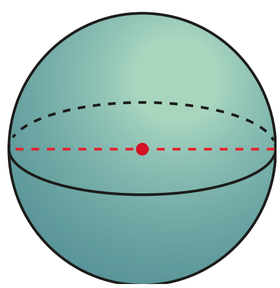
1) Calcule el área lateral y el área total de un cilindro de 12 cm de altura con un radio que mide $\frac{1}{6}$ de la medida de la altura.



2) Calcule el área lateral y el área total de un cono de 10 cm de altura y 12 cm de diámetro de la base.



3) Calcule el área de una esfera de 2 metro de diámetro.

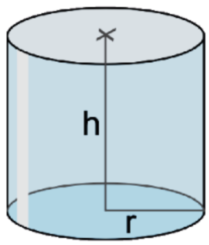


4) En base a lo observado en el programa de televisión realice un resumen en su cuaderno y discuta en su salón de clases que fue lo que le pareció más importante del programa de televisión.

¿Qué piensan otros?

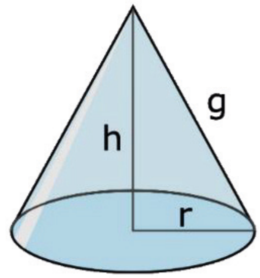
Volumen de cuerpos redondos

Para encontrar el volumen de cuerpos redondos se utilizarán las formulas siguientes de acuerdo a cada cuerpo redondo:



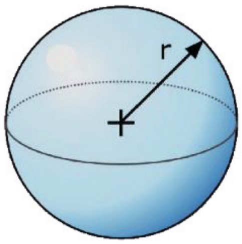
Cilindro

$$\boldsymbol{V = \pi r^2 h}$$



Cono

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi r^2 h}{3}}$$



Esfera

$$\boldsymbol{V = \frac{4\pi r^3}{3}}$$

Ejemplos:

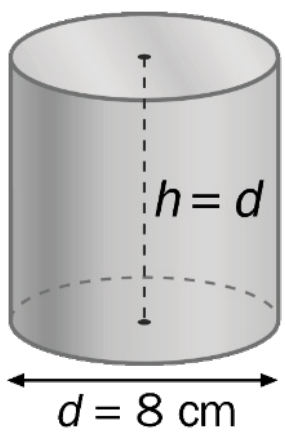
1. Calcule el volumen de un cilindro con un diámetro de 8 cm y una altura igual al diámetro.

Solución:

Radio: $r = 8 \div 2 = 4\ cm.$

Altura: $h = d = 8\ cm.$

$\boldsymbol{V} = \pi r^2\ h = 3.14 \times (4\ cm)^2 \times 8\ cm = 3.14 \times 16\ cm^2 \times 8\ cm = 401.92\ cm^3$



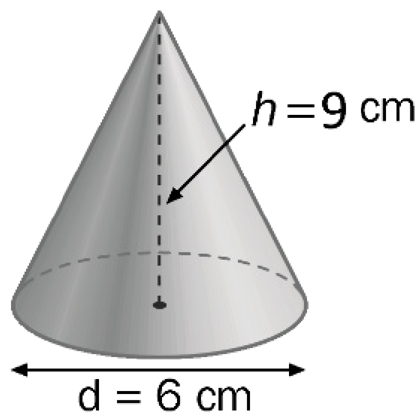
2. Calcule el volumen de un cono con un diámetro de 6 cm y una altura de 9 cm.

Solución:

Radio: $r = 6 \div 2 = 3\ cm.$

Altura: $h = 9\ cm.$

$$\boldsymbol{V} = \frac{\pi r^2\ h}{3} = \frac{3.14 \times (3\ cm)^2 \times 9\ cm}{3} = \frac{3.14 \times 9\ cm^2 \times 9\ cm}{3} = \frac{254.34\ cm^3}{3} = 84.78\ cm^3$$

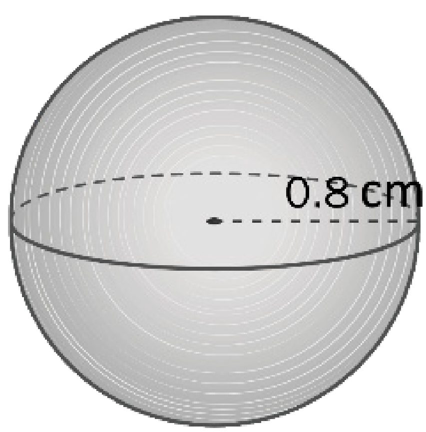


3. Calcule el volumen de una circunferencia con un radio de 0.8 cm.

Solución:

Radio: $r = 0.8\ cm.$

$$\boldsymbol{V} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \times 3.14 \times (0.8\ cm)^3}{3} = \frac{4 \times 3.14 \times 0.512\ cm^3}{3} = \frac{6.431 cm^3}{3} = 2.143\ cm^3$$



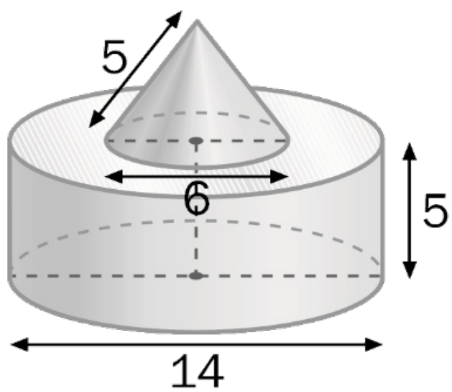
¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**Cuerpos con volumen**", en este interesante programa se resolverán problemas especiales de cuerpos redondos en los cuales habrá que encontrar su volumen.

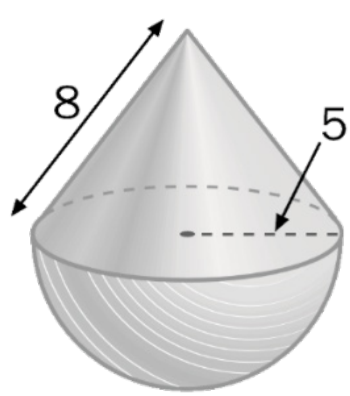
¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada calcule el volumen de los siguientes cuerpos, cuyas longitudes vienen dadas en centímetros:

a)



b)

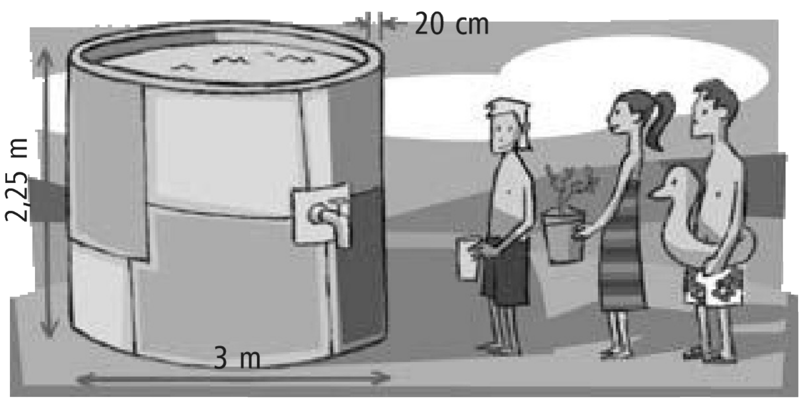


¡Valorando lo aprendido!

Resuelva el siguiente problema de forma clara y ordenada en su cuaderno de trabajo.

- Las dimensiones de un depósito cilíndrico son las especificadas en la figura.

  Calcule la capacidad del recipiente en metros cúbicos.



Secuencia 5
VALORANDO LO QUE APRENDO

¿Hacia dónde vamos?

El aprendizaje de la geometría es de suma importancia ya que todo nuestro entorno está lleno de formas geométricas; en la vida cotidiana es indispensable el conocimiento geométrico básico para orientarse adecuadamente en el espacio, haciendo estimaciones sobre formas y distancias, para distribuir objetos en el espacio.

Por tanto, la geometría es el estudio de la teoría de las formas y figuras en el plano y en el espacio y por el carácter de sus conceptos, su representación de forma gráfica se torna de forma fácil y comprensible para el estudiante.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Reconocer y definir correctamente los diversos tipos de figuras geométricas que se abordan en el bloque de geometría de 9no grado.
2. Repasar las principales fórmulas para realizar el cálculo de áreas o volúmenes de las diversas figuras geométricas.

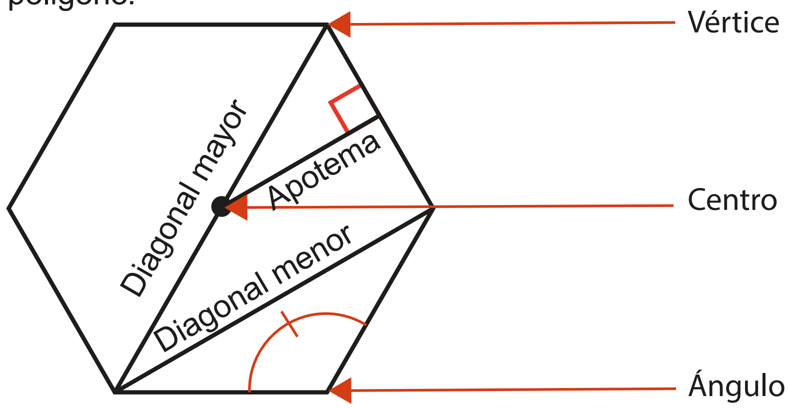
¿Qué conoce de esto?

En esta secuencia se presenta un resumen fundamental que servirá como retroalimentación de los contenidos abordados en el bloque de geometría de noveno grado.

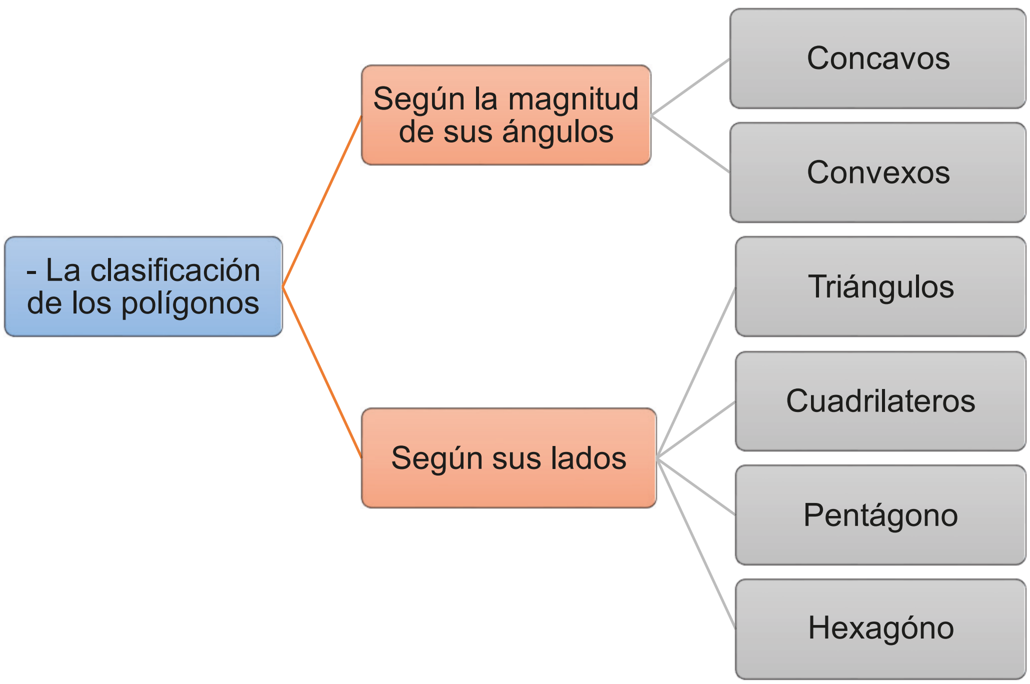
Los principales temas abordados en el bloque anterior son: polígonos y sus propiedades, construcciones geométricas entre las que destacan; la construcción de polígonos de diversos lados, Elementos y clasificación de los poliedros, área de poliedro, volumen de poliedros, definición y clasificación de cuerpos redondos, área de cuerpos redondos y volumen de cuerpos redondos.

Recuerde:

- Las partes de un polígono:



- Clasificación de los polígonos:



Los polígonos también se pueden clasificar de acuerdo a si sus ángulos y lados son iguales o diferentes entre sí.

Polígonos regulares	Son aquellos polígonos que tienen todos sus lados iguales. De la misma manera todos sus ángulos deberán ser iguales.
Polígonos irregulares	Son los polígonos que al menos uno de sus lados es distinto a los demás.

Ahora recuerde algunas fórmulas importantes:

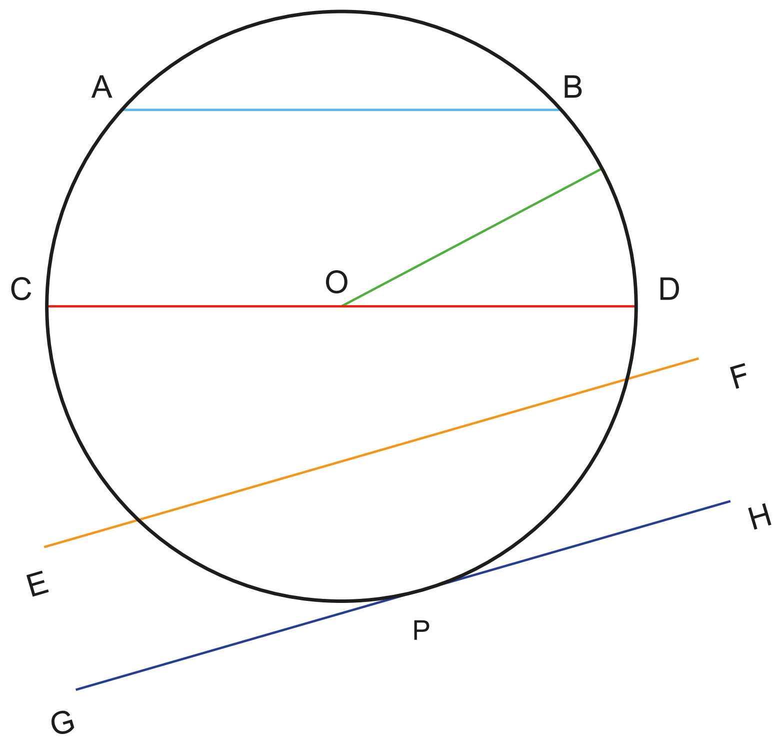
1. Para el cálculo de las diagonales de un polígono su fórmula es: $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$

2. El perímetro es igual al número de lados por la longitud del lado. $P = n \cdot l$

3. Área de un polígono regular $A = \dfrac{Perimetro \times Apotema}{2}$

Repase las líneas más importantes de un circulo.

- o $\overline{AB}$ **cuerda.** Línea que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- o $\overline{CD}$ **diámetro.** Línea que une dos puntos extremos de la circunferencia. La divide en dos partes iguales.
- o $\overline{EF}$ **secante.** Línea que corta a la circunferencia por dos puntos cualesquiera.
- o $\overline{GH}$ **tangente.** Línea externa a la circunferencia que la toca en un solo punto, en el punto P.
- o $\overline{OI}$ **radio.** Segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de ésta.
- o **AB arco.** El segmento de la circunferencia que va desde el punto A hasta el punto B.

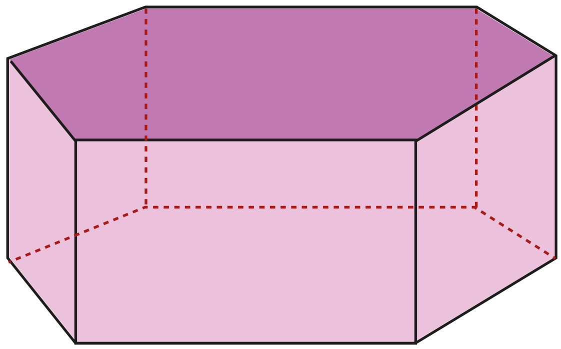


Continúe con los poliedros y sus principales características.

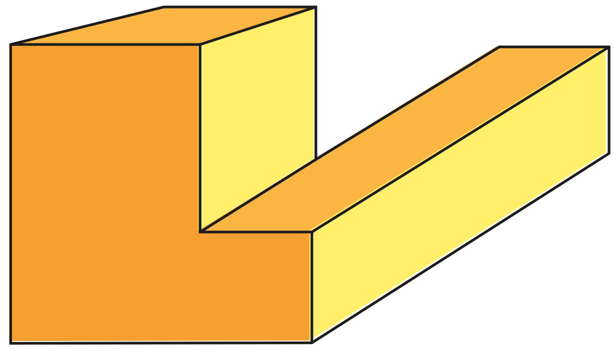
Los elementos principales de los poliedros son:

- ➢ **Caras**: son los polígonos que forman el poliedro.
- ➢ **Aristas**: son los segmentos en los que se intersecan (cortan) las caras**.**
- ➢ **Vértices**: son los puntos donde se intersecan las aristas.

Los poliedros además pueden ser:

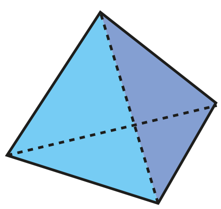


Poliedro convexo: Al prolongarse sus caras no cortan al poliedro.

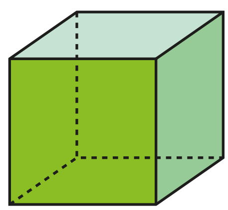


Poliedro cóncavo: Al prolongarse sus caras, alguna de ellas corta al poliedro.

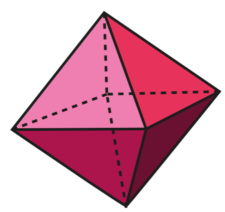
Poliedros regulares:
Todas las caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice se une el mismo número de caras. Solo existen cinco poliedros regulares:



Tetraedro



Cubo



Octaedro

Tipos de poliedros

- **Prismas** Un prisma es un poliedro que puede ser:
  Prisma regular: Es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.
- **Paralelepípedos:** Son los prismas cuyas bases son paralelogramos.
- **Ortoedro**: Es un paralelepípedo recto.
- **Pirámides** Una pirámide es un poliedro que puede ser:
  Pirámide regular: Es una pirámide cuya base es un polígono regular.
  Pirámide recta: Las caras laterales son todas triángulos isósceles.
  Pirámide oblicua: Las caras laterales no son todas triángulos isósceles.

➢ **Área de prismas**
El área de un prisma o de cualquier poliedro, es la suma de las áreas de cada una de sus caras. Se pueden distinguir:

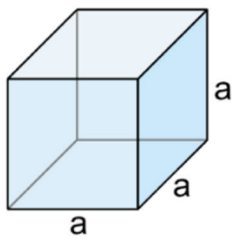
➢ **Área lateral:** Suma de las áreas de las caras laterales. En el prisma las caras laterales son rectángulos.

➢ **Área total:** Es la suma del área lateral y el área de las dos bases. Las bases son dos polígonos iguales.

- **Área de la pirámide**
  Al desarrollar una pirámide se obtiene la base que es un polígono y las caras laterales que son triángulos.

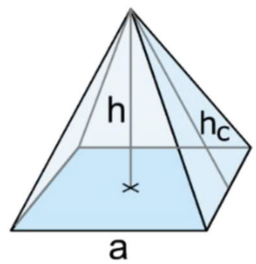
- **Área lateral**: Suma de las áreas de las caras laterales.
- **Área total:** Es la suma del área lateral y el área de la base. La base es un polígono cualquiera, regular o no. (Aquí se trabajará con bases que son polígonos regulares).

- **Volumen de poliedros**
  Para encontrar el volumen de poliedros se utilizarán las formulas siguientes de acuerdo a cada poliedro:



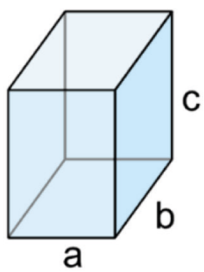
Cubo

$$V = a^3$$



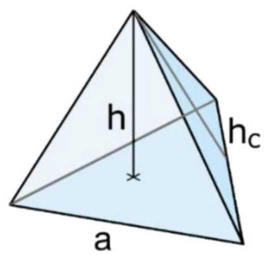
Pirámide

$$V = \frac{A_{base} \times h}{3}$$



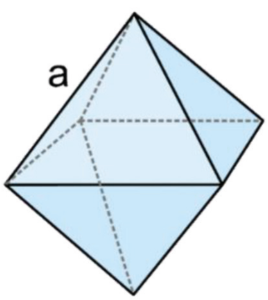
Prisma recto

$$V = a \times b \times c$$



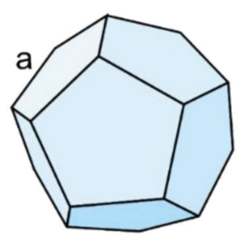
Tetraedro

$$V = \frac{\sqrt{12}}{12}a^3$$



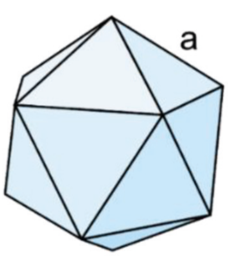
Octaedro

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$



Dodecaedro

$$V \quad \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}a^3$$

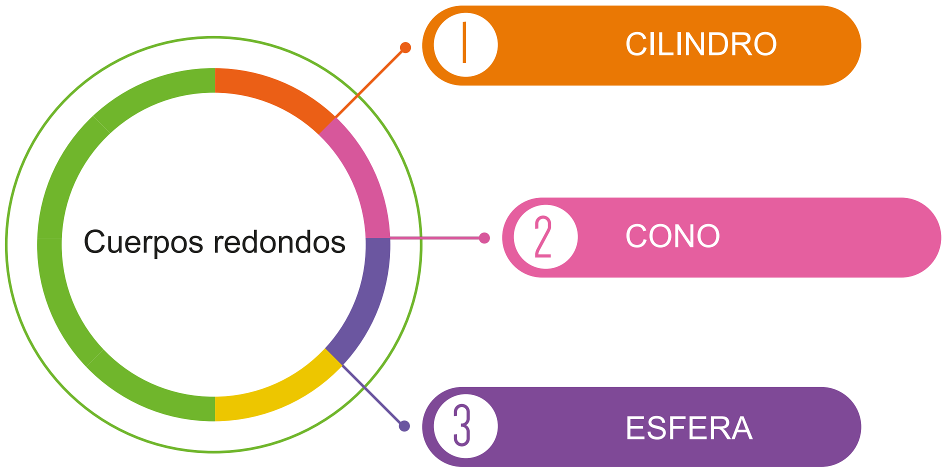


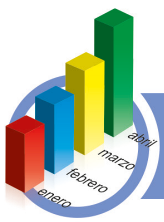
Icosaedro

$$V = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})a^3$$

Cierre con los cuerpos redondos.

Los **cuerpos redondos** son aquellos que tienen, al menos, una de sus caras o superficies de forma curva. La clasificación de los cuerpos redondos es la siguiente:

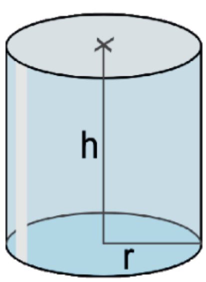




¡Valorando lo aprendido!

Área y volumen de cuerpos redondos

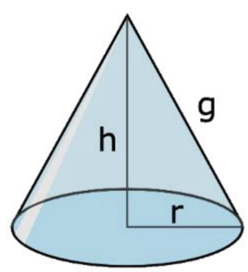
Cilindro



$$V = \pi r^2 h$$

$$A_T = 2\pi r(h + r)$$

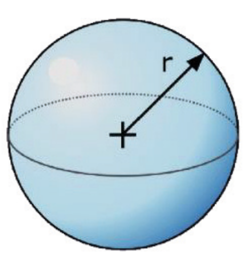
Cono



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$A_T = \pi r(g + r)$$

Esfera



$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$A = 4\pi r^2$$

En esta sección siga las instrucciones del docente que le aplicará la evaluación del contenido del bloque.

BLOQUE IV
ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA Y PROBABILIDAD DISCRETA

PRESENTACIÓN

En el bloque de Estadística Descriptiva y Probabilidad Discreta, los estudiantes recolectan y organizan datos, comparan e interpretan la información recolectada mediante el uso de fórmulas como el rango, desviación absoluta media de un conjunto de datos, varianza y desviación típica.

Además, realizan el estudio de las técnicas de conteo para facilitar el cálculo de probabilidades de un determinado evento.

Secuencia 1
MEDIDAS DE DISPERSIÓN

¿Hacia dónde vamos?

Con las medidas de centralización y posición se pueden conocer los valores centrales de un conjunto de datos y la distribución de éstos. Uno de los objetivos de las medidas de tendencia central es la de sintetizar la información de los datos, pero estas medidas por sí solas no bastan para ver su grado de significación, véalo con un ejemplo.

Considere las notas de dos grupos de 50 estudiantes, en el primero 25 estudiantes obtienen un 10 y 25 un 4, en el segundo grupo los 50 estudiantes obtienen un 7. Si se calcula la media en ambos conjuntos es la misma (7), si sólo se fija en la media se puede afirmar que los dos grupos de estudiantes son bastantes buenos, pero lo cierto es que en el primer grupo hay 25 estudiantes que han obtenido una nota excelente y 25 con mala nota, mientras que en el segundo todos los estudiantes han sacado una buena nota.

La media para el primer grupo es menos representativa que para el segundo. Se ha visto un ejemplo, bastante exagerado para comprobar que las medidas de tendencia central necesitan un complemento, una medida que permita otorgar mayor o menor representatividad de estas medidas.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Definir el rango y desviación absoluta media de un conjunto de datos.

2. Calcular la varianza y desviación típica de un conjunto determinado de datos.

¿Qué conoce de esto?

Medidas de tendencia central

Una de las características más sobresalientes de la distribución de datos es su tendencia a acumularse hacia el centro de la misma. Esta característica se denomina Tendencia central. Las medidas de tendencia central más usuales son:

Media aritmética.
La media aritmética de una serie de datos, es igual a la suma de todos ellos dividida entre el número total de datos.

Mediana.
La mediana es el punto central de una serie de datos.

Moda.
Es aquel valor de mayor frecuencia, la moda puede ser no única e inclusive no existir.

¿Cuál es la dificultad?

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada responda:
a) ¿Cuál es el rango de los siguientes datos?

27	27	24	64
65	68	71	77
82	85	87	87
88	88	91	95
97	97	98	98

b) Defina la fórmula para el cálculo de la desviación típica.

¿Qué piensan otros?

Rango

Es la medida de variabilidad más fácil de calcular. Para datos finitos o sin agrupar, **el rango** se define como la diferencia entre el valor más alto (**Vmax**) y el más bajo (**Vmin**) en un conjunto de datos.

Rango para datos no agrupados

R = Vmax - Vmin

Ejemplo:
Las calificaciones obtenidas por 50 estudiantes en la asignatura de matemáticas de 9no grado son las siguientes:

50	53	54	55	59	60	60	60	61	61
62	62	63	65	66	68	68	68	69	71
73	73	74	74	75	75	75	75	76	77
78	78	78	79	79	82	82	84	85	87
88	88	89	90	93	93	94	95	95	99

para calcular el rango de las calificaciones, se tiene que:

Rg = (Vmax - Vmin) = 99 - 50 = 49

Ahora piense que con datos agrupados no se saben los valores máximos y mínimos. Si no hay intervalos de clases abiertos se puede aproximar el rango mediante el uso de los límites de clases. Se aproxima el rango tomando el límite superior de la última clase menos el límite inferior de la primera clase.

Rango para datos agrupados

Rg = (lim. Sup. de la clase n – lim. Inf. De la clase 1)

Ejemplo:
Si se toman los datos de un ejemplo resuelto con el cual se ha construido una tabla de distribución de frecuencia de 10 intervalos reales, ¿Cómo calcular el rango?

Intervalos reales	
Límite inferior	Límite superior
40.5	46.5
46.5	52.5
52.5	58.5
58.5	64.5
64.5	70.5
70.5	76.5
76.5	82.5
82.5	88.5
88.5	94.5
94.5	100.5

Respuesta:
Rg = (lim. Sup. de la clase n – lim. Inf. De la clase 1) = 100.5 – 40.5 = 60

Puntos importantes:

Propiedades del Rango o Recorrido:

- El rango es la medida de dispersión más sencilla de calcular e interpretar puesto que simplemente es la distancia entre los valores extremos (máximo y mínimo) en una distribución.

- Puesto que el rango se basa en los valores extremos éste tiende a ser errático.

- La principal desventaja del rango es que sólo está influenciado por los valores extremos, puesto que no cuenta con los demás valores de la variable. Por tal razón, siempre existe el peligro de que el recorrido ofrezca una descripción distorsionada de la dispersión.

- En el control de la calidad se hace un uso extenso del recorrido cuando la distribución a utilizarse no la distorsionan y cuando el ahorro del tiempo al hacer los cálculos es un factor de importancia.

Desviación absoluta media

En teoría, la desviación puede referirse a cada una de las medidas de tendencia central: media, mediana o moda; pero el interés se suele centrar en la medida de la desviación con respecto a la media, que se llamará **desviación absoluta media**.

Puede definirse como la media aritmética de las desviaciones de cada uno de los valores con respecto a la media aritmética de la distribución, y se indica así:

$$DM = \frac{\sum \left| x - \overline{x} \right|}{N}$$

Note que se toman las desviaciones en valor absoluto, es decir, que la fórmula no distingue si la diferencia de cada valor de la variable con la media es en más o en menos.

Ya se habrá advertido que esta expresión sirve para calcular la desviación media en el caso de datos sin agrupar.

Ejemplo:
Se tiene los valores 2, 2, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 8. Averiguar la desviación media de estos valores.

Solución:
Primero se construye una tabla como la siguiente:

x	$x-\bar{x}$	$\lvert x\rvert$
2	2 – 5 = – 3	3
2	2 – 5 = – 3	3
4	4 – 5 = – 1	1
4	4 – 5 = – 1	1
5	5 – 5 = 0	0
6	6 – 5 = 1	1
7	7 – 5 = 2	2
8	8 – 5 = 3	3
8	8 – 5 = 3	3
N = 9	$\sum \lvert x-\bar{x}\rvert$	17

Se calcula la media $\bar{x}$:

$46 \div 9 = 5$

$$DM = \frac{\sum\lvert x-\bar{x}\rvert}{N}$$

$$DM = \frac{17}{9} = 1.8$$

Por tanto, para este caso la desviación absoluta media es 1.8

Desviación absoluta media en el caso de datos agrupados en intervalos.

Para calcular la desviación media en este tipo de casos se utiliza la siguiente fórmula:

$$DM = \frac{\sum\lvert n_i \cdot x\rvert}{N}$$

Donde se observa que ahora las desviaciones van multiplicadas por las frecuencias de los intervalos correspondientes. Además, las desviaciones son de cada centro, o marca de clase, a la media aritmética. Es decir,

$$DM = \frac{\sum\lvert n_i\left(x_m-\bar{x}\right)\rvert}{N}$$

Ejemplo:

Para hallar la desviación absoluta media de la siguiente tabla referida a las edades de los 100 empleados de una cierta empresa:

Clase	n_i
16 – 20	2
20 – 24	8
24 – 28	8
28 – 32	18
32 – 36	20
36 – 40	18
40 – 44	15
44 – 48	8
48 – 52	3
Total	100

Recuerde:

x_m: La marca de clase es el punto medio de cada intervalo y es el valor que representa a todo el intervalo para el cálculo de algunos parámetros.

$\bar{x}$: con **datos agrupados** la media será la sumatoria de $n_i \cdot x_m$ dividida entre la sumatoria de n_i.

Primero se construye una tabla como la siguiente:

Clase	n_i	x_m	$n_i \cdot x_m$	$\lvert x_m - \bar{x} \rvert$	$n_i \cdot \lvert x - \bar{x} \rvert$
16 – 20	2	18	36	|18-34.72|= 16.72	33.44
20 – 24	8	22	176	|22-34.72|= 12.72	101.76
24 – 28	8	26	208	|26-34.72|= 8.72	69.76
28 – 32	18	30	540	|30-34.72|= 4.72	84.96
32 – 36	20	34	680	|34-34.72|= 0.72	14.4
36 – 40	18	38	684	|38-34.72|= 3.28	59.04
40 – 44	15	42	630	|42-34.72|= 7.28	109.2
44 – 48	8	46	368	|46-34.72|= 11.28	90.24
48 – 52	3	50	150	|50-34.72|= 15.28	45.84
	100		3,472		608.64

$$DM = \frac{\sum \left| n_i \left(x_m - \bar{x} \right) \right|}{N} = \frac{608.64}{100} = 6.09$$

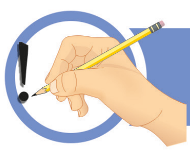
Por tanto, la desviación absoluta media sería 6.09

La desviación media viene a indicar el grado de concentración o de dispersión de los valores de la variable. Si es muy alta, indica gran dispersión; si es muy baja refleja un buen agrupamiento y que los valores son parecidos entre sí.

La desviación media se puede utilizar como medida de dispersión en todas aquellas distribuciones en las que la medida de tendencia central más significativas haya sido la media.

Puntos importantes:

- Propiedades de la desviación absoluta media:
- Nos da la media de la dispersión de los datos.
- Intervienen para su cálculo todos los datos.
- Cada vez que se inserte un dato nuevo se modificará.
- Al intervenir un valor absoluto los cálculos son complicados.
- A mayor concentración de los datos entorno a la media menor será su valor.
- DM es no negativa.
- DM = 0 si y sólo si todos los valores son coincidentes.



¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada conteste cada uno de los ejercicios planteados en esta sección:

1. Encuentre el rango para los siguientes grupos de datos y compare cual rango es mayor.

En dos tiendas se venden camisetas, la siguiente tabla muestra las ventas obtenidas por cada tienda durante 10 días.

Tienda Sol	Tienda Novedad
37, 19, 24, 27, 16, 21, 25, 13, 31, 10	23, 15, 11, 32, 24, 18, 13, 27, 29, 30

2. Dada la siguiente tabla calcular el rango para datos agrupados utilizando los intervalos de clase reales de la tablaW.

Clase X (Estatura)	Frecuencia F Nº de Estudiantes	Limites reales
60 – 62	5	59.5 – 62.5
63 – 65	18	62.5 – 65.5
66 – 68	42	65.5 – 68.5
69 – 71	27	68.5 – 71.5
72 – 74	8	71.5 – 74.5
Total	100	

3. Hallar la desviación absoluta media de la siguiente tabla referida a la altura de 80 estudiantes de un CEB:

Clase (altura en cm)	n_i	x_m	$n_i \cdot x_m$	$\lvert x_m - \bar{x} \rvert$	$n_i \cdot \lvert x - \bar{x} \rvert$
110 – 120	8				
120 – 130	7				
130 – 140	12				
140 – 150	17				
150 – 160	25				
160 – 170	7				
170 – 180	4				

¿Qué piensan otros?

Desviación típica

Con la varianza se elevan al cuadrado las unidades de medida, sería interesante tener una medida de dispersión con las mismas unidades de la media y los datos, esto lo se puede conseguir haciendo la raíz cuadrada positiva de la varianza, a la que se llamará **desviación típica o desviación estándar**.

Es sin duda la medida de dispersión más importante, ya que además sirve como medida previa al cálculo de otros valores estadísticos.

La **desviación típica o estándar** se define como la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media de la distribución.

Desviación típica para datos sin agrupar

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{N}}$$

Desviación típica para datos agrupados

$$s = \sqrt{\frac{\sum \lvert x - \bar{x} \rvert^2}{N}}$$

Cálculo de la desviación típica para datos no agrupados en clases. Veamos la fórmula anterior aplicada a un caso concreto.

Ejemplo:
Hallar la desviación típica de la serie: 5, 8, 10, 12, 16.

Solución:

x	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$\lvert x-\bar{x}\rvert^2$
5	5.2	27.04
8	2.2	4.84
10	0.2	0.04
12	1.8	3.24
16	5.8	33.64
Total: 51		68.8
	68.8	

Se calcula

$$\bar{x} = \frac{51}{5} = 10.2$$

Por lo tanto,

$$s = \sqrt{\frac{\sum \lvert x-\bar{x}\rvert^2}{N}} = \sqrt{\frac{68.8}{5}} = \sqrt{13.76} = 3.71$$

Puntos importantes:
Propiedades de la desviación típica:

- Tiene la misma unidad que los datos y que la media.
- Siempre es positiva, será cero si y sólo si todos los datos son coincidentes.
- Es la medida de dispersión más usada.
- Es invariante ante cambios de origen.
- Si se produce un cambio de escala la nueva desviación típica es igual a la anterior multiplicada por el cambio.
- Si se produce simultáneamente un cambio de origen y escala en los datos, sólo el cambio de escala afectará a la desviación típica.

¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**Las medidas de dispersión",** este interesante programa muestra el cálculo de las medidas de dispersión y la importancia de estas para el desarrollo de la estadística.

¡A trabajar!

Resuelva los siguientes ejercicios de forma clara y ordenada evidenciando con tablas su trabajo realizado.

1. Hallar la desviación típica de la serie: 7, 6, 4, 13, 18, 20, 14.

2. Hallar la desviación típica de la serie: 19, 15, 3, 27, 11, 9, 4, 17.

¿Qué piensan otros?

Varianza

La desviación absoluta media es una medida de dispersión de datos correcta, pero presenta un inconveniente y es la complejidad de manipulación al intervenir valores absolutos. Sería conveniente encontrar otra medida que no presente el problema inicial (que no se compensen las dispersiones negativas con las positivas) y cuyo manejo se hace más sencillo.

Otra forma de evitar la compensación de dispersiones es elevar al cuadrado la diferencia y es más sencillo trabajar con cuadrados que con valores absolutos, teniendo en cuenta esta consideración se introducirá el concepto de varianza.

La **varianza** es la media aritmética del cuadrado de las desviaciones respecto a la media de una distribución estadística.

La varianza se representa por a^2, donde:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{N} \rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{N}$$

La varianza para datos agrupados se define como:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 f_1+(x_2-\bar{x})^2 f_2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2 f_n}{N} \rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 f_i}{N}$$

Para simplificar el cálculo de la varianza se utilizarán las siguientes expresiones que son equivalentes a las anteriores:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{N}-\bar{x}^2 \rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{N}-\bar{x}^2$$

La varianza para datos no agrupados se define como:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 f_1+x_2^2 f_2+\ldots+x_n^2 f_n}{N}-\bar{x}^2 \rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 f_i}{N}-\bar{x}^2$$

Ejemplo:
Calcular la varianza de la distribución:

9, 3, 8, 8, 9, 8, 9, 18.

Solución:

Calcular $\bar{x} = \frac{9+3+8+8+9+8+9+18}{8} = 9$

Ahora calcular σ^2

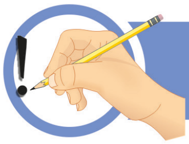
$$\sigma^2 = \frac{(9-9)^2+(3-9)^2+(8-9)^2+(8-9)^2+(9-9)^2+(8-9)^2+(9-9)^2+(18-9)^2}{8} = 15$$

Por tanto, la varianza es de 15.

Puntos importantes:
Propiedades de la varianza:

- Como se suman cuadrados la varianza siempre es positiva y será nula cuando todos los valores de la variable sean coincidentes y por tanto iguales a la varianza.
- Al elevar al cuadrado se eleva la unidad de medida de las observaciones al cuadrado.
- Al elevarse al cuadrado las desviaciones aquellos valores más alejados de la media afectarán mucho a la varianza.

- Es invariante ante cambios de origen.
- Si se produce un cambio de escala la nueva varianza es igual a la anterior multiplicada por el cuadrado del cambio.
- Si se produce simultáneamente un cambio de origen y escala en los datos, sólo el cambio de escala afectará a la varianza.

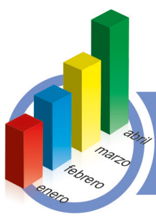


¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada responda los ejercicios planteados en esta sección.
Calcular la varianza para las distribuciones siguientes:

a) 7, 12, 5, 8, 11, 15, 3.

b) 14, 21, 1, 31, 6, 13, 17, 9, 8, 2.



¡Valorando lo aprendido!

Recuerde:
Las medidas de dispersión son:

Rango

Desviación absoluta media

Desviación típica

Varianza

Con ellas se pueden realizar diversos cálculos para datos agrupados y datos no agrupados.

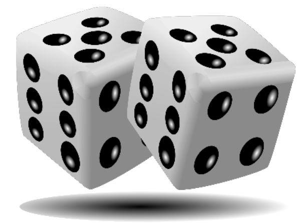
En su cuaderno de trabajo resuelva la siguiente actividad:

a) Calcule el rango, deviación absoluta media, desviación típica y varianza de los siguientes datos:

8	24	11	8
4	5	13	21
7	2	17	19

Secuencia 2
CONTANDO TIENES MÁS PROBABILIDADES

¿Hacia dónde vamos?



El principio fundamental en el proceso de contar ofrece un método general para contar el número de posibles arreglos de objetos dentro de un solo conjunto o entre varios conjuntos. Las técnicas de conteo son aquellas que son usadas para enumerar eventos difíciles de cuantificar.

Por otro lado, la probabilidad mide la frecuencia con la que se obtiene un resultado (o conjunto de resultados) al llevar a cabo un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables. La teoría de la probabilidad se usa extensamente en áreas como la estadística, la física, la matemática, la ciencia y la filosofía para sacar conclusiones sobre la probabilidad de sucesos potenciales y la mecánica subyacente de sistemas complejos.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Definir las principales técnicas de conteo; diagrama de árbol, principio de multiplicación y combinaciones y permutaciones.

2. Calcular la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso.

¿Qué conoce de esto?

Estadística descriptiva y probabilidad discreta

La estadística descriptiva puede definirse como aquellos métodos que incluyen la recolección, presentación y caracterización de un conjunto de datos con el fin de describir apropiadamente las diversas características de ese conjunto.

En la estadística hay una serie de conceptos que se necesitan para trabajar en los temas que se desarrollaran en esta secuencia, estos conceptos se definen como:

Población: Es la totalidad de elementos o cosas bajo consideración.

Muestra: Es la porción de la población que se selecciona para su análisis.

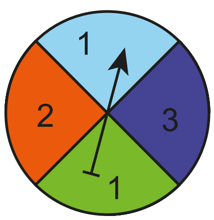
Parámetro: Es una medida de resumen que se calcula para describir una característica de toda una población.

Factorial: El factorial de un entero positivo n, o el factorial de n o n factorial se define en principio como el producto de todos los números enteros positivos desde 1 (es decir, los números naturales) hasta n. Por ejemplo,

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

¿Cuál es la dificultad?

En la figura:



Se tiene una ruleta en que la flecha puede indicar cualquiera de los 4 sectores y ella nunca cae en los límites de dichos sectores. ¿Cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que la flecha caiga en el número 1 es $\frac{1}{2}$

II) La probabilidad de que la flecha caiga en el número 2 es $\frac{1}{4}$

III) La probabilidad de que la flecha caiga en el número 2 o en el 3 es $\frac{2}{3}$

¿Qué piensan otros?

Técnicas de conteo

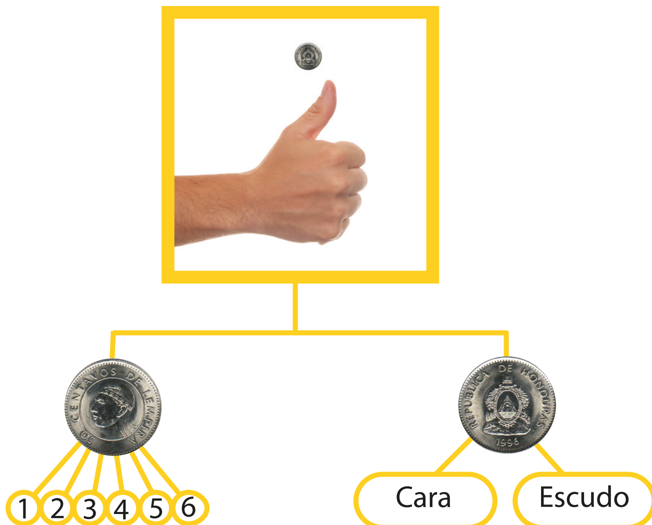
Si el número de posibles resultados de un experimento es pequeño, es relativamente fácil listar y contar todos los posibles resultados. Al tirar un dado, por ejemplo, hay seis posibles resultados. Y, sin embargo, hay un gran número de posibles resultados en el experimento de listar el número de niños y niñas por familias con cinco hijos, sería tedioso listar y contar todas las posibilidades.

Las posibilidades serían, 5 niños, 4 niños y 1 niña, 3 niños y 2 niñas, 2 niños y 3 niñas, etc. Para facilitar esta tarea existen las técnicas de conteo.

1. Diagrama de árbol

Un **diagrama de árbol** es una representación gráfica de un experimento que consta de r pasos, donde cada uno de los pasos tiene un número finito de maneras de ser llevado a cabo.

Ejemplo:
Se lanza una moneda, si sale cara se lanza un dado y si sale escudo se lanza la moneda de nuevo.



Si sale cara se lanza el dado y al lanzar el dado existe la probabilidad de sacar cualquiera de los 6 números de un dado.

Si sale escudo se vuelve a lanzar la moneda y lanzar la moneda existe la probabilidad de sacar cara o escudo nuevamente.

2. Principio de multiplicación

Si hay **m** formas de hacer una cosa y hay **n** formas de hacer otra cosa, hay **m × n** formas de hacer ambas cosas.

⇨ En términos de fórmula. Número total de arreglos = **m × n**
Esto puede ser extendido a más de dos eventos. Para tres eventos, **m**, **n**, y **o**, sería:
⇨ Número total de arreglos = **m × n × o**

Ejemplos:

1. Un vendedor de autos quiere presentar a sus clientes todas las diferentes opciones con que cuenta: auto convertible, auto de 2 puertas y auto de 4 puertas, cualquiera de ellos con rines deportivos o estándar ¿Cuántos diferentes arreglos de autos y rines puede ofrecer el vendedor?

Solución:

Para solucionar el problema se puede emplear la técnica de la multiplicación, (donde **m** es número de modelos y **n** es el número de tipos de rin).

⇨ Número total de arreglos = **3 x 2 = 6**

No fue difícil de listar y contar todos los posibles arreglos de modelos de autos y rines en este ejemplo. Suponga, sin embargo, que el vendedor tiene para ofrecer ocho modelos de auto y seis tipos de rines. Sería tedioso hacer un dibujo con todas las posibilidades.

Aplicando la técnica de la multiplicación fácilmente se realiza el cálculo:

⇨ Número total de arreglos = **m** × **n** = **8 6 = 48**

2. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 7 personas en una fila?

Solución

La primera posición en la fila (P1), puede ser ocupada por cualquiera de las 7 personas (P1 = 7); la segunda posición por 6 (P2 = 6) y así, sucesivamente.

$$P1 \times P2 \times P3 \times P4 \times P5 \times P6 \times P7 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! = 5040$$

R// Existen 5040 maneras de colocar a 7 personas en una fila.

3. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 4 personas alrededor de una mesa?

Solución:

La posición relativa de todos los lugares es similar, por lo que la colocación de las primeras personas es irrelevante, a diferencia de su colocación en una fila; cuando la primera persona se ha colocado en un lugar, quedas 3 opciones para la segunda persona; la tercera persona tiene 2 opciones y la última sólo una.

Esto equivale a: $3 \times 2 \times 1 = (n-1)! = 3! = 6$

¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada resuelva el ejercicio planteado en esta sección:

1. ¿Cuántas representaciones diferentes serán posibles formar, si se desea que consten de presidente, secretario, tesorero, primer vocal, y segundo vocal?, si esta representación puede ser formada de entre 25 miembros del sindicato de una pequeña empresa?

¿Qué piensan otros?

3. Combinaciones y permutaciones

Combinaciones

Las combinaciones son muy parecidas a los arreglos, con la diferencia de que en los conjuntos que se forman no importa el orden. En una combinación interesa formar grupos y el contenido de los mismos. Una combinación se denota como C_{rn} o ${}_nC_r$, Se lee como una combinación de n elementos tomados r a la vez.

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}! $$

Ejemplos:

1. Si se cuenta con 14 estudiantes que desean colaborar en una campaña pro limpieza de la comunidad, cuántos grupos de limpieza podrán formarse si se desea que consten de 5 estudiantes cada uno de ellos.

Solución:

Se aplica la fórmula: ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}!$

$$ {}_{14}C_5 = \frac{14!}{5!(14-5)!} = \frac{14!}{5!(9!)} = \frac{14\times13\times12\times11\times10\times9!}{5!\times9!} $$

$$ = \frac{14\times13\times12\times11\times10}{5\times4\times3\times2\times1} = 2,002 \text{ **Grupos**} $$

2. Para contestar un examen un estudiante debe contestar 9 de 12 preguntas, ¿Cuántas maneras tiene el estudiante de seleccionar las 9 preguntas?

Solución: n = 12, r = 9

$$
\begin{aligned}
{}_{12}C_9 &= \frac{12!}{9!(12-9)!} \\
&= \frac{12!}{9!(3!)} \\
&= \frac{12\times 11\times 10}{3!} \\
&= \frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1} \\
&= 220
\end{aligned}
$$

R// 220 maneras de seleccionar las nueve preguntas o, dicho de otra manera, el estudiante puede seleccionar cualquiera de 220 grupos de 9 preguntas para contestar el examen.

Permutaciones

La técnica de la **permutación** es aplicada para encontrar el número posible de arreglos donde hay solo un grupo de objetos.

Ejemplos:

1. Tres componentes electrónicos: - un transistor (T), un capacitor (C), y un diodo (D), serán ensamblados en una tablilla de una televisión. Los componentes pueden ser ensamblados en cualquier orden. ¿De cuantas diferentes maneras pueden ser ensamblados los tres componentes?

Las diferentes maneras de ensamblar los componentes son llamadas permutaciones, y son las siguientes:

T D C - D T C - C D T
T C D - D C T - C T D

Permutación: Todos los arreglos de ***r*** objetos seleccionados ***n*** de objetos posibles
La fórmula empleada para contar el número total de diferentes permutaciones es:

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Donde:
nPr es el número de permutaciones posible, ***n*** es el número total de objetos y ***r*** es el número de objetos utilizados en un mismo momento.

Para el ejemplo anterior si se aplica la fórmula establecida se tendría lo siguiente:

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{1 \times 2 \times 3}{1} = 6$$

2. ¿De cuántas maneras se pueden permutar los 3 dígitos del número 478?

   Solución: $3P3 = P(3) = 3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$

   R// Las permutaciones son: 478, 487, 748, 784, 847 y 874.

3. ¿Cuántas permutaciones de 2 letras se puede formar a partir de las 5 vocales?

Solución: $$\begin{aligned} \mathrm{nPr} = 5\mathrm{P}3 &= \frac{5!}{(5-2)!} \\ &= \frac{5!}{3!} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} \\ &= 5 \times 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Las permutaciones son:
ae, ai, ao, au, ea, ei, eo, eu, ia, ie, io, iu, oa, oe, oi, ou, ua, ue, ui y uo.

¡Descúbralo en la tele!

En esta sección se presentará el programa de televisión denominado "**Tus probabilidades aumentan**", este interesante programa muestra elementos fundamentales de las probabilidades estadísticas en diversos juegos de azar.

¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada resuelva el ejercicio planteado en esta sección:

1. Suponga que hay ocho tipos de computadora, pero solo tres espacios disponibles para exhibirlas en la tienda de computadoras. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ser arregladas las 8 máquinas en los tres espacios disponibles?

¿Qué piensan otros?

Probabilidad

Concepto de probabilidad

La **probabilidad** sirve para medir la frecuencia con que ocurre un resultado de entre todos los posibles en algún experimento, suceso o evento.

Espacios muéstrales

El **espacio muestral** (Se abrevia simplemente como **S**), es un conjunto formado por todos los resultados posibles de algún experimento, por ejemplo, si se lanza una moneda al aire (a esto se llamará experimento), existen solo 2 posibilidades, que salga cara o que salga escudo. Por lo tanto, el espacio muestral en este caso es un conjunto de dos elementos.

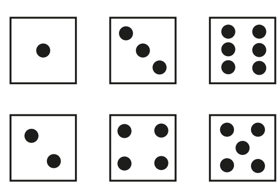
$$Smoneda = \{que\ salga\ cara, que\ salga\ escudo\}$$

Espacio muestral del lanzamiento de la moneda.

Posibilidades del espacio muestral.

Si en lugar de una moneda, lanzamos un dado entonces el espacio muestral tendrá seis elementos, uno correspondiente a cada cara del dado:

$$Sdado = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$$



Y si se lanza el dado y la moneda al mismo tiempo el espacio muestral estará conformado por pares ordenados de la forma:

Smoneda + dado = (cara; 1); (cara; 2); (cara; 3); (cara; 4); (cara; 5); (cara; 6); (escudo; 1); (escudo; 2); (escudo; 3); (escudo; 4); (escudo; 5); (escudo; 6)

Cálculo de probabilidades
La probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso podría definirse como la proporción de veces que ocurriría dicho suceso si se repitiese un experimento o una observación en un número grande de ocasiones bajo condiciones similares. Por definición, entonces, la probabilidad se mide por un número entre cero y uno: si un suceso no ocurre nunca, su probabilidad asociada es cero, mientras que si ocurriese siempre su probabilidad sería igual a uno. Así, las probabilidades suelen venir expresadas como decimales, fracciones o porcentajes.

El método más utilizado en probabilidad es aplicando la Regla de Laplace: define la probabilidad de un suceso como el cociente entre casos favorables y casos posibles.

$$P_{(suceso)} = \frac{casos \;\; favorables \;\; (f)}{casos \;\; posibles \;\; (n)}$$

Ejemplos:
a) Probabilidad de que al lanzar un dado salga el número 2: el caso favorable (f) es tan sólo uno (que salga el dos), mientras que los casos posibles (n) son seis (puede salir cualquier número del uno al seis).

Por lo tanto:

$$P_{(suceso)} = \frac{(f)}{(n)} = \frac{1}{6} = 0.166$$

(o lo que es lo mismo, 16,6%)

b) Probabilidad de que al lanzar un dado salga un número par: en este caso los casos favorables (f) son tres (que salga el dos, el cuatro o el seis), mientras que los casos posibles (n) siguen siendo seis.

Por lo tanto:

$$P_{(suceso)} = \frac{(f)}{(n)} = \frac{3}{6} = 0.50$$

(o lo que es lo mismo, 50%)

Puntos importantes
Para poder aplicar la Regla de Laplace el experimento aleatorio tiene que cumplir dos requisitos:

1. El número de resultados posibles (sucesos eventos) tiene que ser finito. Si hubiera infinitos resultados, al aplicar la regla “casos favorables dividido por casos posibles” el cociente siempre sería cero.

2. Todos los sucesos o eventos tienen que tener la misma probabilidad. Si al lanzar un dado, algunas caras tuvieran mayor probabilidad de salir que otras, no podríamos aplicar esta regla.

A la regla de Laplace también se le denomina “probabilidad a priori”, ya que para aplicarla hay que conocer antes de realizar el experimento cuales son los posibles resultados y saber que todos tienen las mismas probabilidades.

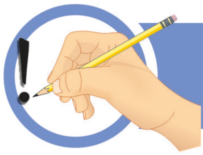
Cuando se realiza un experimento aleatorio un número muy elevado de veces, las probabilidades de los diversos posibles sucesos empiezan a converger hacia valores determinados, que son sus respectivas probabilidades.

Independencia de eventos
Existen relaciones entre los sucesos:

- **Sucesos Excluyentes.** Dos o más sucesos serán excluyentes si solo uno de ellos puede ocurrir en un experimento, por ejemplo, al lanzar una moneda, si sale cara entonces no puede salir sello y viceversa, por lo tanto, estos sucesos son excluyentes.

- **Sucesos Independientes.** Dos o más sucesos son independientes cuando la ocurrencia de uno, no afecta la ocurrencia del o los otros. Por ejemplo, en el lanzamiento del dado y la moneda si sale cara o sale sello, no afecta en ninguna medida el número que salga en el dado, por lo tanto, estos sucesos son independientes.

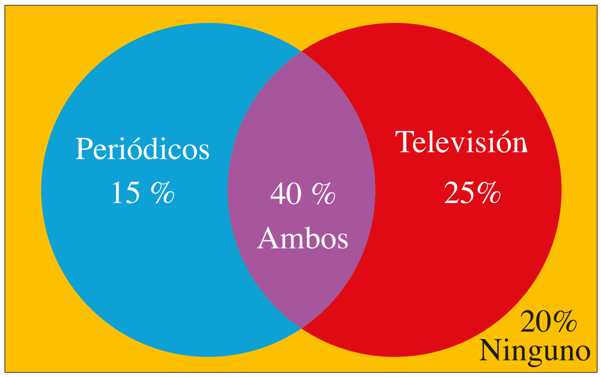
- **Sucesos Dependientes.** Dos o más sucesos son dependientes cuando la ocurrencia de alguno de ellos sí afecta la ocurrencia de los otros. Por ejemplo, si tengo un saco con 2 bolas negras y una bola roja, el suceso de sacar la bola roja me impedirá sacar una bola roja en el siguiente intento pues en el saco solo hay 2 bolas negras, en este caso esos sucesos son dependientes.

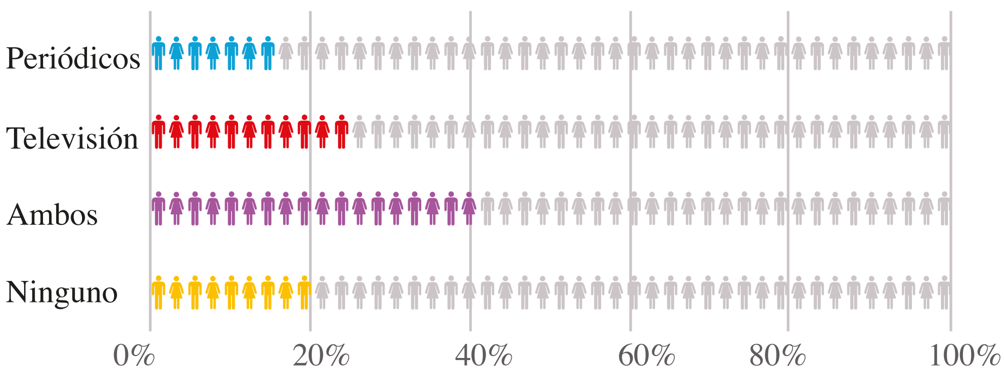


¡A trabajar!

En su cuaderno de trabajo de forma clara y ordenada resuelva el ejercicio planteado en esta sección:

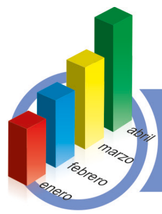
1. El diagrama de Venn muestra los resultados de una encuesta en la que les preguntaron a 100 personas si se informan de las noticias leyendo los periódicos o mirando televisión.





a) Calcule la probabilidad de que una persona seleccionada al azar de esta encuesta no elija a la televisión como una fuente de información de las noticias.

b) Calcule la probabilidad de que una persona seleccionada al azar de esta encuesta elija a la televisión y los periódicos como una fuente de información de las noticias.



¡Valorando lo aprendido!

Resolver los siguientes problemas y exponerlos en el aula de clases:

1. Se lanzan dos dados, uno a continuación del otro. Sabiendo que la suma de los puntos obtenidos es 6, calcule la probabilidad de que en un dado aparezca un 2.

2. De una tómbola se saca una de 30 bolitas numeradas de 1 a 30. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la bolita extraída sea múltiplo de 4?

Secuencia 3
VALORANDO LO QUE APRENDO

¿Hacia dónde vamos?

El bloque de estadística descriptiva y probabilidad discreta provee a los alumnos y alumnas conceptos, modelos y herramientas para recolectar, procesar, presentar e interpretar datos, para investigar la probabilidad de eventos y para la comprobación de hipótesis.

En noveno grado se comienza con temas fundamentales como el cálculo del rango para datos no agrupados y agrupados. Luego se continúa con otra serie de temas que son desarrollados conforme a las programaciones y estándares educativos para noveno grado.

RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Al finalizar la secuencia de aprendizaje, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

1. Comprender el uso adecuado de las medidas de dispersión para datos agrupados y no agrupados.

2. Repasar los conceptos fundamentales de las técnicas de conteo y probabilidad discreta.

¿Qué conoce de esto?

En esta secuencia se presenta un resumen fundamental que servirá como retroalimentación de los contenidos abordados en el estadística descriptiva y probabilidad discreta de noveno grado.

Los conocimientos básicos aprendidos en el bloque van desde el cálculo de rango para datos no agrupados y agrupados hasta el cálculo de probabilidades utilizando diversas técnicas de conteos. Todos estos conocimientos son de vital importancia para resolver problemas en la asignatura de matemáticas del noveno grado, además, son conocimientos que sirven para ser aplicados en la vida cotidiana.

En estadística es bueno recordar los conceptos fundamentales de los temas y las formulas principales. Así que en esta sección se presenta un pequeño resumen de los principales temas abordados.

El Rango

Es la medida de variabilidad más fácil de calcular. Para datos finitos o sin agrupar, **el rango** se define como la diferencia entre el valor más alto (**Vmax**) y el más bajo (**Vmin**) en un conjunto de datos.

Rango para datos no agrupados

R = Vmax - Vmin

Rango para datos agrupados

Rg = (lim. Sup. de la clase n – lim. Inf. De la clase 1)

Desviación absoluta media

En teoría, la desviación puede referirse a cada una de las medidas de tendencia central: media, mediana o moda; pero el interés se suele centrar en la medida de la desviación con respecto a la media, que se llamará **desviación absoluta media**.

$$DM = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{N}$$

Desviación típica

La **desviación típica** se define como la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media de la distribución.

Desviación típica para datos sin agrupar

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{N}}$$

Desviación típica para datos agrupados

$$s = \sqrt{\frac{\sum |x - \bar{x}|^2}{N}}$$

Varianza

La **varianza** es la media aritmética del cuadrado de las desviaciones respecto a la media de una distribución estadística.

La varianza para datos agrupados se define como:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{N}$$

La varianza para datos no agrupados se define como:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2$$

Técnicas de conteo

1. **Diagrama de árbol**

Un **diagrama de árbol** es una representación gráfica de un experimento que consta de r pasos, donde cada uno de los pasos tiene un número finito de maneras de ser llevado acabo.

2. **Principio de multiplicación**
   Si hay m formas de hacer una cosa y hay n formas de hacer otra cosa, hay m x n formas de hacer ambas cosas.

En términos de fórmula. Número total de arreglos = **m x n**

Esto puede ser extendido a más de dos eventos. Para tres eventos, m, n, y o:

Número total de arreglos = **m x n x o**

3. **Combinaciones y permutaciones**

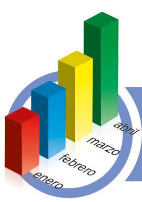
Combinaciones

Las **combinaciones** son muy parecidas a los arreglos, con la diferencia de que en los conjuntos que se forman no importa el orden. En una combinación interesa formar grupos y el contenido de los mismos. Una combinación se denota como C_r^n o ${}_nC_r$, Se lee como una combinación de n elementos tomados r a la vez.

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}!$$

Permutaciones

La técnica de la **permutación** es aplicada para encontrar el número posible de arreglos donde hay solo un grupo de objetos.



¡Valorando lo aprendido!

Concepto de probabilidad

La **probabilidad** sirve para medir la frecuencia con que ocurre un resultado de entre todos los posibles en algún experimento, suceso o evento.

Espacios muéstrales

El **espacio muestral** (Se abrevia simplemente como **S**), es un conjunto formado por todos los resultados posibles de algún experimento, por ejemplo, si lanzamos una moneda al aire (a esto se llamará experimento), existen solo 2 posibilidades, que salga cara o que salga escudo. Por lo tanto, el espacio muestral en este caso es un conjunto de dos elementos.

$$Smoneda = \{que\ salga\ cara, que\ salga\ escudo\}$$

Espacio muestral del lanzamiento de la moneda.

Posibilidades del espacio muestral.

En esta sección siga las instrucciones del docente que le aplicará la evaluación del contenido del bloque.

BIBLIOGRAFÍA

- Larson, R. y Hostetler, R. (2006). Álgebra. México: Publicaciones Cultural.
- Lozano, C. y Vázquez, A. (2009). Geometría y trigonometría. México: Prentice Hall.
- Swokowski, E. y Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: CENGAGE.
- Peterson, John A. y cols. (1969). Teoría de la aritmética. Ciudad de México, México: Editorial LimusaWiley.
- Zill, D. y Dewar, J. (1996) Álgebra y trigonometría. McGraw-Hill. Ciudad de México, México: Editora Prentice Hall.
- Swokowski, E. y Cole, J. (2002). Álgebra y trigonometría con geometría analítica.12º Edición. Ciudad de México, México: Editorial Cengage.
- www.librosvivos.net -20 de agosto de 2012