República de Honduras
Secretaría de Educación

MATEMÁTICA IV

Libro del Estudiante

Undécimo grado

11

Bachillerato en Ciencias y Humanidades

Educación Media

Presentación

Jóvenes de HONDURAS:

Es una gran satisfacción para la Secretaría de Educación, presentar este Libro del Estudiante que ha sido elaborado para ustedes con mucho esmero y con el propósito de que encuentren en él la oportunidad de aprender matemática.

El Libro del Estudiante que tienen en sus manos, está diseñado de manera sencilla considerando sus experiencias diarias, sus capacidades y habilidades y sobre todo haciendo énfasis en la realización de actividades que les permitan aprender y aprender a hacer, mediante la aplicación de conceptos, resolución de problemas y ejercicios.

La orientación oportuna de sus docentes, el apoyo de sus padres y fundamentalmente sus esfuerzos por aprender, son la vía para el logro del derecho universal que les asiste: Educación de Calidad. Derecho estimado como el tesoro más preciado de nuestra querida Patria.

Como autoridades educativas tenemos un gran compromiso con ustedes, asegurarles un mejor futuro y para eso estamos trabajando con mucho esfuerzo, para encaminarlos en la formación de valores, hábitos, actitudes, habilidades y conocimientos que le permitan integrarse a la vida social como personas capacitadas e independientes; que sepan ejercer su libertad con responsabilidad, para convertirse cada día en mejores ciudadanos.

Se espera que este Libro del Estudiante se convierta en una herramienta de aprendizaje de mucha utilidad en su proceso de formación.

SECRETARIA DE ESTADO
EN EL DESPACHO DE EDUCACIÓN

ORIENTACIONES SOBRE EL USO DEL LIBRO DEL ESTUDIANTE

Queridos Estudiantes:

La Secretaría de Estado en el Despacho de Educación *de Honduras con mucha satisfacción le entrega este* ***Libro del Estudiante****, para que lo use en el aprendizaje de las Matemáticas. El mismo pertenece a su centro educativo: por lo tanto, debe apreciarlo, cuidarlo y tratarlo con mucho cariño para que pueda ser utilizado en años posteriores. Para cuidarlo le sugerimos lo siguiente:*

1. *Forre el* ***Libro del Estudiante*** *con papel y/o plástico, y sobre el forro escriba su nombre, grado, sección a la que pertenece, el nombre del docente y del centro educativo.*

2. *Evite rayar, manchar o romper las partes internas o externas del* ***Libro****, para que al devolverlo el mismo esté en buenas condiciones.*

3. *Todos los ejercicios propuestos en el* ***Libro*** *debe desarrollarlos en su cuaderno de Matemáticas.*

4. *Está permitido llevar a su casa el* ***Libro****, cuidando que otras personas que conviven con usted se lo manchen, rayen o rompan.*

5. *Recuerde llevar el* ***Libro*** *al centro educativo todos los días que tenga la clase de Matemáticas.*

6. *Antes de usar su* ***Libro****, por favor lávese y séquese las manos, evite las comidas y bebidas cuando trabaje en él; asimismo, limpie muy bien la mesa o el lugar donde lo utilice.*

7. *Tenga cuidado de usar su* ***Libro*** *como objeto para jugar, evite tirarlo o sentarse en él.*

8. *Al pasar las hojas o buscar el tema en el* ***Libro****, debe tener cuidado de no doblarles las esquinas, rasgarlas o romperlas; también cuide que no se desprendan las hojas por el mal uso.*

Recuerde que este Libro es una herramienta de apoyo para usted, por lo que debe conservarlo muy bonito, aseado y sobre todo evitar perderlo, porque no lo encontrará a la venta.

ESTIMADO DOCENTE: POR FAVOR EXPLIQUE A SUS ESTUDIANTES LA FORMA DE CUIDAR Y CONSERVAR EL LIBRO DEL ESTUDIANTE, YA QUE PERTENECE AL CENTRO EDUCATIVO.

Índice

Explicación de iconos en el libro

Cada ícono representa:

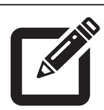
El desarrollo de un ejemplo.

La propuesta de ejercicios o problemas.

Aclaraciones o ampliaciones de conceptos trabajados en el libro, a la vez, algunos aspectos que se deben tener especial cuidado cuando se está estudiando un tema.

Recordatorios de temas, fórmulas, conceptos, etc., vistos en años o clases anteriores.

Conceptos, fórmulas, principios, reglas, etc., que es necesario que se memoricen para lograr mejor comprensión de los contenidos.



Sugerencias que se proporcionan al momento de resolver un ejercicio o problema.

Matemáticas IV

Unidad I

Trigonometría

- Lección 1: Teorema de la adición

Algo de historia

Jean-Baptiste Joseph Fourier
(1768 – 1830)

Fourier fue un matemático francés. Nació en Auxerre el 12 de marzo de 1768. Asistió a una escuela militar dirigida por monjes benedictos y mostró siempre gran habilidad para matemáticas, lo que le permitió fungir como profesor en la misma escuela donde estudió. En su estudio de la teoría de calor utilizó series infinitas de funciones trigonométricas. De esta manera abrió el camino a representar función como series de funciones trigonométricas (series de Fourier).

Por otra parte, la misma idea de representar una función por una serie de un sistema de funciones (que incluye como caso especial un sistema de funciones trigonométricas) aplica al análisis moderno.

Joseph Fourier falleció en 1830 en París.

Fuente: E. T. Bell: Men of mathematics

Lección 1. Teorema de adición

Clase 1. Teorema de adición de seno y coseno

Teorema 1.1. Teorema de adición de seno y coseno

a) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha\, \text{sen}\beta$

b) $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha\, \text{sen}\beta$

c) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha\, \text{sen}\beta$

d) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\alpha\, \text{sen}\beta$

Demostración de d). En la Fig. 1.1

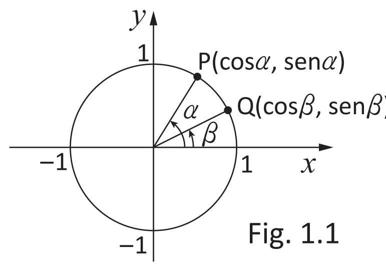


Fig. 1.1

$$
\begin{aligned}
(PQ)^2 &= (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\text{sen}\beta - \text{sen}\alpha)^2 \\
&= \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha \\
&\quad + \text{sen}^2\beta - 2\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta + \text{sen}^2\alpha \\
&= 2(1 - \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta)
\end{aligned}
$$

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
I. II. Clase 2.5

Se obtiene la Fig. 1.2, rotando $-\beta$ a los puntos P y Q de la Fig. 1.1.

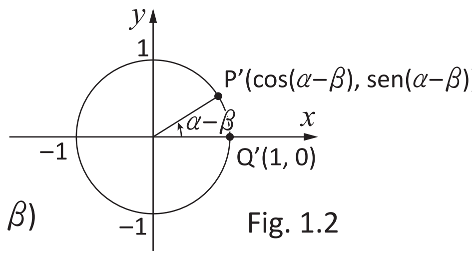


Fig. 1.2

$$
\begin{aligned}
(P'Q')^2 &= (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\text{sen}(\alpha - \beta) - 0)^2 \\
&= \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \text{sen}^2(\alpha - \beta) \\
&= 2(1 - \cos(\alpha - \beta))
\end{aligned}
$$

Como (por construcción) PQ = P'Q', se tiene que:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$$

Demostración de c). En d) sustituyendo $-\beta$ en β, se tiene que:

$$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \text{sen}\alpha\,\text{sen}(-\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$$

$\cos(-\beta) = \cos\beta$
$\text{sen}(-\beta) = -\text{sen}\beta$
I. II. Clase 2.8

Demostración de b). En c) sustituyendo $\frac{\pi}{2} - \beta$ en β, se tiene que:

$$\cos\left(\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) = \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$-\text{sen}(\alpha - \beta) = \cos\alpha\,\text{sen}\beta - \text{sen}\alpha\cos\beta$$

Luego $\quad \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\beta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right) = -\text{sen}(\alpha - \beta)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \text{sen}\beta$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta$
I. II. Clase 2.9

Demostración de a). En b) sustituyendo $-\beta$ en β, se tiene que:

$$\text{sen}(\alpha - (-\beta)) = \text{sen}\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\,\text{sen}(-\beta)$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta$$

Clase 2. Teorema de adición de tangente, ejemplos

Teorema 1.2. Teorema de adición de tangente

a) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

b) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

Demostración

a) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\text{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta}$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

Dividiendo el denominador y el numerador entre $\cos\alpha\cos\beta$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

b) En a) sustituyendo $-\beta$ en β, se tiene que:

$\tan(\alpha+(-\beta)) = \dfrac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$, luego

$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

[A]

$\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}$

$\tan(-\beta) = -\tan\beta$

I. II. Clase 2.8

Ejemplo 1.1. Utilizando la relación: 75° = 45° + 30°, encuentre los valores de sen75°, cos75° y tan75°

Solución

sen75° $= \text{sen}(45° + 30°)$

$= \text{sen}\,45°\cos 30° + \cos 45°\,\text{sen}30°$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

cos75° $= \cos(45° + 30°)$

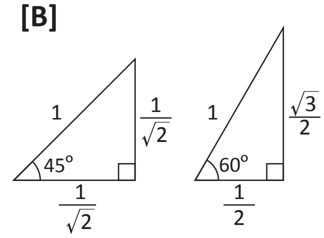
$= \cos45°\cos30° - \text{sen}45°\,\text{sen}30°$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

tan75° $= \tan(45° + 30°)$

$= \dfrac{\tan45^\circ+\tan30^\circ}{1-\tan45^\circ\tan30^\circ} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$

[B]



La otra manera es

$\tan75° = \dfrac{\text{sen}75^\circ}{\cos75^\circ}$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$= 2+\sqrt{3}$

Ejercicio 1.1. Utilice el teorema de adición para encontrar los valores:
a) sen15°; b) cos15°; c) tan15°; d) sen105°; e) cos105°; f) tan105°

Clase 3. Simples ejemplos del teorema de adición

Ejemplo 1.2. Sean $90° < \alpha < 180°$ y $0° < \beta < 90°$.
Cuando sen $\alpha = \frac{2}{3}$ y $\cos\beta = \frac{3}{5}$, encuentre los siguientes valores:
a) $\text{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$ c) $\tan(\alpha + \beta)$

Solución
Como $90° < \alpha < 180°$, $\cos \alpha < 0$. Por lo tanto,

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Como $0° < \beta < 90°$, sen $\beta > 0$. Por lo tanto,

$$\text{sen}\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

a) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}+\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\frac{4}{5} = \frac{6-4\sqrt{5}}{15} \qquad \left(= \frac{2}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{15}\right)$$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$

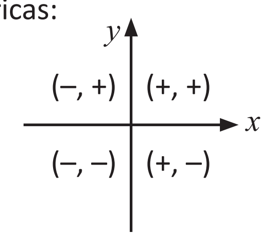
$$= -\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{3\sqrt{5}+8}{15} \qquad \left(= -\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{8}{15}\right)$$

c) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

$$= \frac{6-4\sqrt{5}}{15} \div \left(-\frac{3\sqrt{5}+8}{15}\right) = -\frac{6-4\sqrt{5}}{15}\cdot\frac{15}{3\sqrt{5}+8}$$

$$= -\frac{(6-4\sqrt{5})(8-3\sqrt{5})}{(8+3\sqrt{5})(8-3\sqrt{5})} = \frac{-108+50\sqrt{5}}{19}$$

La condición del ángulo define el signo de las funciones trigonométricas:



$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Otra manera
$\tan(\alpha + \beta)$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{3}}{1-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\frac{4}{3}} = \frac{-6+4\sqrt{5}}{8+3\sqrt{5}}$$

Ejercicio 1.2. En el Ejemplo 1.2 encuentre los valores de $\text{sen}(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$ y $\tan(\alpha - \beta)$.

Ejercicio 1.3.
a) Sean $180° < \alpha < 270°$ y $270° < \beta < 360°$. Cuando $\text{sen}\alpha = -\frac{1}{3}$ y $\cos\beta = \frac{2}{3}$, encuentre los valores de $\text{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha - \beta)$.

b) Sean $270° < \alpha < 360°$ y $90° < \beta < 180°$. Cuando $\text{sen}\alpha = -\frac{1}{4}$ y $\cos\beta = -\frac{3}{4}$, encuentre los valores de $\text{sen}(\alpha - \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$.

Clase 4. Fórmulas del ángulo doble

Teorema 1.3. Fórmulas del ángulo doble
a) $\text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen}\alpha \cos\alpha$
b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\text{ sen}^2\alpha$
c) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

En b) la segunda y la tercera se utilizarán con más frecuencia.

Demostración. Del teorema de adición se tiene que:

a) $\text{sen}2\alpha = \text{sen}(\alpha+\alpha) = \text{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\,\text{sen}\alpha = 2\text{ sen}\alpha\cos\alpha$

b)
$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\alpha\\ &= \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\\ &\begin{cases}= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1\\ = (1-\text{sen}^2\alpha) - \text{sen}^2\alpha = 1 - 2\text{ sen}^2\alpha\end{cases}\end{aligned}$$

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$
$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$

c) $\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Ejemplo 1.3. Sean $90° < \alpha < 180°$ y $\text{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$. Encuentre los siguientes valores:

a) $\text{sen}2\alpha$ b) $\cos 2\alpha$ c) $\tan 2\alpha$

De $90° < \alpha < 180°$, se sabe el signo de $\cos\alpha$.

Solución:

De $90° < \alpha < 180°$, se tiene que $\cos\alpha < 0$, por lo tanto,

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = -\dfrac{4}{5}$

a) $\text{sen } 2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{24}{25}$

b) $\cos 2\alpha = 1 - 2\text{ sen}^2\alpha = 1 - 2\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{7}{25}$

c) $\tan 2\alpha = \dfrac{\text{sen}2\alpha}{\cos 2\alpha} = \left(-\dfrac{24}{25}\right) \div \dfrac{7}{25} = -\dfrac{24}{25}\cdot\dfrac{25}{7} = -\dfrac{24}{7}$

Note que para el cálculo de $\cos 2\alpha$, basta el valor de $\text{sen}\alpha$.

Ejercicio 1.4. Encuentre los valores de $\text{sen } 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ y $\tan 2\alpha$ en los siguientes casos.

a) $180° < \alpha < 270°$ y $\text{sen}\alpha = -\dfrac{4}{5}$

b) $270° < \alpha < 360°$ y $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$

* c) $0° < \alpha < 180°$ y $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$

En c) identifique el cuadrante al que pertenece el ángulo α.

Clase 5. Fórmulas del ángulo medio

Teorema 1.4. Fórmulas del ángulo medio

a) $\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ b) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ c) $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

Demostración:

a) De la fórmula del ángulo doble $\cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$, se tiene que:

$\text{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ … despejando para $\text{sen}^2\alpha$

$\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ … sustituyendo α por $\frac{\alpha}{2}$

b) De $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, se tiene que:

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ … despejando para $\cos^2\alpha$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ … sustituyendo α por $\frac{\alpha}{2}$

c) $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \div \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Ejemplo 1.4. Encuentre el valor de sen 22.5°.

Utilice $22.5° = \frac{45°}{2}$

Solución

$$\text{sen}^2\, 22.5° = \text{sen}^2\frac{45°}{2} = \frac{1-\cos 45°}{2} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Como sen22.5° > 0, se tiene que: $\text{sen}\, 22.5° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Ejercicio 1.5. Encuentre los valores de cos 22.5° y tan 22.5°.

Ejemplo 1.5. Sean $0° < \alpha < 180°$ y $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Encuentre los siguientes valores: a) $\text{sen}\frac{\alpha}{2}$ b) $\cos\frac{\alpha}{2}$ c) $\tan\frac{\alpha}{2}$

Solución. Como $0° < \frac{\alpha}{2} < 90°$, se tiene que $\text{sen}\frac{\alpha}{2} > 0$ y $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$.

Luego:

a) $\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\left(= \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

c) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ejercicio 1.6. Encuentre los valores de $\text{sen}\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ y $\tan\frac{\alpha}{2}$ en los siguientes casos:

a) $180° < \alpha < 360°$ y $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ b) $-180° < \alpha < 0°$ y $\text{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$

Clase 6. Ecuaciones trigonométricas (uso de la relación entre seno y coseno)

Ejemplo 1.6. Encuentre los valores de θ ($0° \leq \theta < 360°$) que satisfacen la ecuación: $2\cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta - 1 = 0$

Solución. Sustituyendo $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$, se tiene que:

$2(1 - \operatorname{sen}^2\theta) - \operatorname{sen}\theta - 1 = 0,$

$2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 1 = 0$

$(2\operatorname{sen}\theta - 1)(\operatorname{sen}\theta + 1) = 0$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ o $\operatorname{sen}\theta = -1$. Como $0° \leq \theta < 360°$,

cuando $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = 30°$ o $150°$

cuando $\operatorname{sen}\theta = -1$, $\theta = 270°$

CS: $\theta = 30°$ o $150°$ o $270°$

Convierta la ecuación en una ecuación de segundo grado de $\operatorname{sen}\theta$.

$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ o $B = 0$

Ejercicio 1.7. Encuentre los valores de θ ($0° \leq \theta < 360°$), que satisfacen la ecuación:

a) $2\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 1 = 0$ b) $2\operatorname{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$

c) $2\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}\theta - 3 = 0$ d) $4\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta - 7 = 0$

Clase 7. Ecuaciones trigonométricas (uso de las fórmulas del ángulo doble)

Ejemplo 1.7. Encuentre los valores de θ ($0° \leq \theta < 360°$) que satisfacen la ecuación: $\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$

Solución. $\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$

$(2\cos^2\theta - 1) - 3\cos\theta + 2 = 0$ sustituyendo $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

$(2\cos\theta - 1)(\text{co}\theta - 1) = 0$ factorizando

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ o $\cos\theta = 1$. Como $0° \leq \theta < 360°$,

cuando $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = 60°$ o $300°$

cuando $\cos\theta = 1$, $\theta = 0°$

CS: $\theta = 0°$ o $60°$ o $300°$

Convierta la ecuación en la ecuación de segundo grado de $\cos\theta$.

Ejercicio 1.8. Encuentre los valores de θ ($0° \leq \theta < 360°$) que satisfacen la ecuación:

a) $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$ b) $\cos 2\theta + \operatorname{sen}\theta = 0$

c) $\cos 2\theta - 3\operatorname{sen}\theta - 2 = 0$

Ejemplo 1.8. Encuentre los valores de θ ($0° \leq \theta < 360°$) que satisfacen la ecuación: $\text{sen } 2\theta + \text{sen}\theta = 0$.

Solución. $\text{sen } 2\theta + \text{sen}\theta = 0$

$2 \text{ sen}\theta \cos\theta + \text{sen}\theta = 0$ sustituyendo $\text{sen } 2\theta = 2 \text{ sen}\theta\cos\theta$

$\text{sen}\theta\,(2\cos\theta + 1) = 0$ factorizando

$\text{sen}\theta = 0$ o $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Como $0° \leq \theta < 360°$,

cuando $\text{sen}\theta = 0$, $\theta = 0°$ o $180°$

cuando $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\theta = 120°$ o $240°$

CS: $\theta = 0°$ o $120°$ o $180°$ o $240°$

Ejercicio 1.9. Encuentre los valores de θ ($0° \leq \theta < 360°$) que satisfacen la ecuación:

a) $\text{sen } 2\theta + \cos\theta = 0$ b) $\text{sen } 2\theta - \text{sen}\theta = 0$

c) $\text{sen } 2\theta - \sqrt{3}\,\text{sen}\theta = 0$ d) $\text{sen } 2\theta + \sqrt{2}\cos\theta = 0$

Clase 8. Funciones trigonométricas inversas

La Figura 1.3, muestra una parte de la gráfica de $y = \text{sen}x$ que corresponde a los valores de x: $-90° \leq x \leq 90°$. En esta parte a cada valor β que satisface $-1 \leq \beta \leq 1$, existe el único valor α que satisface $-90° \leq \alpha \leq 90°$ y $\beta = \text{sen } \alpha$.

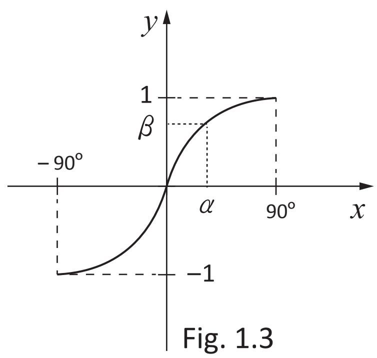


Fig. 1.3

La correspondencia de β a α es una función. Se le denomina **arcoseno** y se denota mediante $y = \text{sen}^{-1} x$.

Lo importante es que si $-90° \leq \alpha < \alpha' \leq 90°$, entonces $\text{sen}\alpha \neq \text{sen}\alpha'$.

$$y = \text{sen}^{-1} x \Leftrightarrow x = \text{sen } y;\ -90° \leq y \leq 90°$$

Generalmente cuando existe este tipo de relación entre dos funciones, se dice que una es la **función inversa** a la otra.

La Fig. 1.4, muestra la gráfica de $y = \text{sen}^{-1} x$.

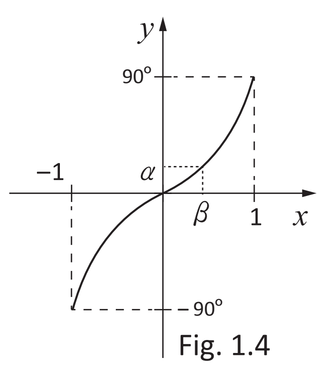


Fig. 1.4

Ejemplo 1.9. Encuentre el valor de $\text{sen}^{-1} \frac{1}{2}$.

Solución.

$\alpha = \text{sen}^{-1} \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \text{sen } \alpha$; $-90° \leq \alpha \leq 90°$,

por lo tanto $\alpha = 30°$

$y = \text{sen}^{-1} x$

Dominio: $\{x; -1 \leq x \leq 1\}$

Rango: $\{y; -90° \leq y \leq 90°\}$

$\alpha = 150°$ no es la respuesta, porque no satisface $-90° \leq \alpha \leq 90°$.

Ejercicio 1.10. Complete la tabla.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{sen}^{-1} x$									

De la misma manera se definen las funciones inversas de las otras funciones trigonométricas.

arcocoseno

$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$
$0° \le y \le 180°$

Dominio: $\{x; -1 \le x \le 1\}$
Rango: $\{y; 0° \le y \le 180°\}$

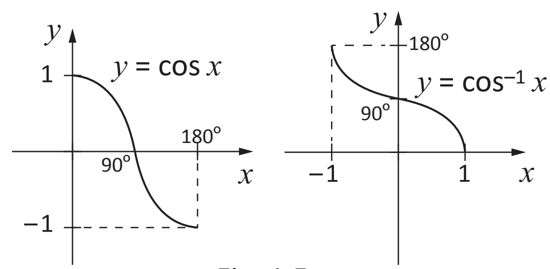


Fig. 1.5

arcotangente

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$
$-90° < y < 90°$

Dominio: El conjunto de los números reales
Rango: $\{y; -90° < y < 90°\}$

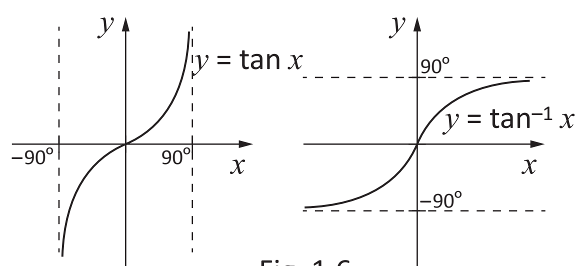


Fig. 1.6

Ejemplo 1.10. Encuentre los siguientes valores.

a) $\cos^{-1} \frac{1}{2}$ b) $\tan^{-1} \sqrt{3}$

Solución: a) $\alpha = \cos^{-1} \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$ y $0° \le \alpha \le 180°$

Por lo tanto, $\cos^{-1} \frac{1}{2} = 60°$

b) $\alpha = \tan^{-1} \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{3}$ y $-90° < \alpha < 90°$

Por lo tanto, $\tan^{-1} \sqrt{3} = 60°$

Ejercicio 1.11. Complete la tabla

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos^{-1} x$									

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\tan^{-1} x$							

Ejercicios de la lección

1. Utilizando el teorema de adición, encuentre los valores de sen 165°, cos 165° y tan 165° — Clase 2 Ejemplo 1.1

2. Sean $90° < \alpha < 180°$ y $270° < \beta < 360°$. Cuando $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ y $\cos\beta = \frac{2}{3}$, encuentre los siguientes valores. — Clase 3 Ejemplo 1.2

   a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ c) $\cos(\alpha + \beta)$

   d) $\cos(\alpha - \beta)$ e) $\tan(\alpha + \beta)$ f) $\tan(\alpha - \beta)$

3. Encuentre los valores de $\operatorname{sen}2\alpha$, $\cos2\alpha$ y $\tan2\alpha$ en cada caso: — Clase 4 ejemplo 1.3

   a) $0° < \alpha < 180°$ y $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ b) $90° < \alpha < 270°$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$

4. Sean $360° < \alpha < 540°$ y $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Encuentre los valores de $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ y $\tan\frac{\alpha}{2}$. — Clase 5 Ejemplo 1.5

5. Sea $0° \leq \theta < 360°$. Resuelva: — Clase 6 Ejemplo 1.6

   a) $4\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}\theta - 5 = 0$ b) $2\cos^2\theta + 3\operatorname{sen}\theta - 3 = 0$

   c) $\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos\theta - 2 = 0$ d) $\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta - 2 = 0$

   e) $4\operatorname{sen}^2\theta - 4\sqrt{3}\cos\theta - 7 = 0$

6. Sea $0° \leq \theta < 360°$. Resuelva: — Clase 7 Ejemplo 1.7, 1.8

   a) $2\cos2\theta + 4\operatorname{sen}\theta - 3 = 0$ b) $\cos2\theta + 4\cos\theta + 3 = 0$

   c) $\operatorname{sen}2\theta - 2\cos\theta = 0$ d) $\operatorname{sen}2\theta + \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta = 0$

Problemas de la unidad A

1. El ángulo α satisface las siguientes igualdades:

   sen $(\alpha + 30°) = \frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ ...(1), sen $(\alpha - 30°) = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ ...(2).

   Encuentre senα y cosα.

2. Encuentre todas las soluciones. No hay restricciones en θ.

   a) sen $2\theta - \sqrt{3}$ cos$\theta = 0$ b) cos $2\theta -$ sen$\theta - 1 = 0$

3. Sean $0° < \alpha < 90°$, sen$\alpha = \frac{3}{5}$ y cos$(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5}$.

   Encuentre los valores de senβ, cosβ y tanβ.

4. Sea $0° \leq \theta < 360°$. Resuelva:

   a) $\cos^2\theta + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)$ sen$\theta - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) = 0$

   b) cos$2\theta + (2 - \sqrt{3})$ cos$\theta + (1 - \sqrt{3}) = 0$

5. Aplicando el Teorema 1.1, demuestre las siguientes fórmulas.

   a) senα cos$\beta = \frac{1}{2}$ {sen$(\alpha + \beta)$ + sen $(\alpha - \beta)$}

   b) cosα sen$\beta = \frac{1}{2}$ {sen$(\alpha + \beta)$ – sen $(\alpha - \beta)$}

   c) cosα cos$\beta = \frac{1}{2}$ {cos$(\alpha + \beta)$ + cos$(\alpha - \beta)$}

   d) senα sen$\beta = -\frac{1}{2}$ {cos$(\alpha + \beta)$ – cos$(\alpha - \beta)$}

6. Utilizando las fórmulas del problema 5, demuestre las siguientes:

   a) sen A + sen B = 2 sen $\frac{A+B}{2}$ cos $\frac{A-B}{2}$

   b) sen A – sen B = 2 cos $\frac{A+B}{2}$ sen $\frac{A-B}{2}$

   c) cos A + cos B = 2 cos $\frac{A+B}{2}$ cos $\frac{A-B}{2}$

   d) cos A – cos B = –2 sen $\frac{A+B}{2}$ sen $\frac{A-B}{2}$

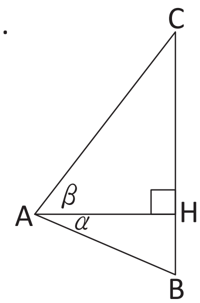
Conversión de producto en suma.

Conversiones de suma en producto.

En 5 escriba $\alpha + \beta = A$ y $\alpha - \beta = B$

Problemas de la unidad B

1. Sean $0° < \alpha < 90°$ y $0° < \beta < 90°$. En la figura AH = 1.
   a) Represente AB, AC, BH y CH con α o β.
   b) Aplicando la ley de los senos al ΔABC, demuestre a) del Teorema 1.1.
   c) Aplicando la ley de los cosenos al ΔABC, demuestre c) del Teorema 1.1.



Representar con α quiere decir usar senα, cosα y/o tanα.

2. Sea $0° \leq \theta < 360°$. Resuelve:
   a) sen $(\theta + 30°)$ + sen $2\theta = 0$ b) cos $(\theta - 60°)$ + cos $(3\theta + 20°) = 0$

Utilice la fórmula del problema A 6.

3. Sea $y = -\text{sen}\, x + \sqrt{3}\cos x$ ...(1) una función.
   a) Encuentre el número real r y un ángulo α tales que:
      $-1 = r\cos\alpha$ y $\sqrt{3} = r\,\text{sen}\alpha$
   b) Aplicando el Teorema 1.1 a) exprese y en la forma de $y = r$ sen $(x + \alpha)$.
   c) Encuentre el rango de esta función cuando el dominio es el conjunto de los números reales.

4. a) Exprese sen 3θ como un polinomio de senθ.
   b) Exprese cos 3θ como un polinomio de cosθ.

$3\theta = 2\theta + \theta$

Matemáticas IV

Unidad II

Límites y continuidad

- Lección 1: Límite de funciones
- Lección 2: Continuidad de funciones
- Lección 3: Asíntotas

Algo de historia

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916)

Dedekind fue un matemático alemán. Nació y falleció en Brunswick. Su campo de especialización es álgebra y teoría de números. Con relación al tema de esta unidad, él definió rigurosamente el conjunto de los números reales y estableció la continuidad de los números reales dando así el fundamento de análisis que empezó con el descubrimiento del cálculo infinitesimal, que venía careciendo de fundamento.

Para esta meta él utilizó los conjuntos llamados corte de los números racionales como lo siguiente: Se divide el conjunto de los números racionales en dos subconjuntos A y B no vacíos de modo que los números que pertenece a A son menor que los de B.

Entonces hay tres casos. a) En A existe un número que es mayor que cualquier otro número de A y en B no existe el mínimo número. b) En B existe el mínimo número y en A no existe el máximo número. c) En A no existe el máximo número y en B tampoco existe el mínimo número. En c) el par de subconjuntos define un número irracional. Después de añadir los números irracionales al conjunto de los números racionales, en el corte de estos números siempre ocurre sólo los casos a) y b), lo que es la continuidad de los números reales.

Fuente: E. T. Bell: Men of mathematics

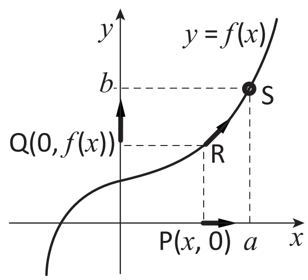
Nota: a partir de esta unidad se utiliza la unidad de medida radián para medir los ángulos.
Términos y notación: sean a y b números reales tal que $a < b$

Intervalo abierto	$(a, b) = \{x;\ a < x < b\}$
Intervalo cerrado	$[a, b] = \{x;\ a \leq x \leq b\}$
Intervalo semi abierto	$(a, b] = \{x;\ a < x \leq b\}$
	$[a, b) = \{x;\ a \leq x < b\}$

Lección 1. Límite de funciones

Clase 1. Definición de límite de funciones

Explicación 1. En la figura, en el eje x el punto P $(x, 0)$ tiende al punto $(a, 0)$, pero no alcanza a este punto. En la gráfica el punto R que corresponde al punto P tiende al punto S. En el eje y el punto Q $(0, f(x))$ que corresponde al punto R y representa el valor de $f(x)$ tiende al punto $(0, b)$.



En resumen, cuando x tiende sin límite a a tomando valores diferentes de a, $f(x)$ tiende sin límite a b.

No es necesario que $f(x)$ esté definida en $x = a$.

Se expresa esta situación como: "$f(x)$ converge a b" y se denota mediante:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

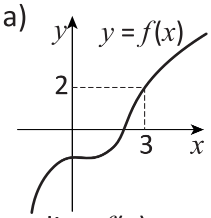
También se utiliza la siguiente notación:

$$\boxed{f(x) \to b \quad (a \to x)}$$

El valor de b se le llama **límite** de $f(x)$ cuando x tiende sin límite a a.

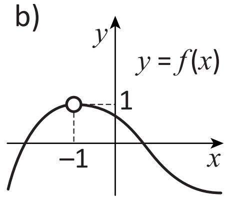
Ejercicio 1.1. Encuentre los límites:

a)



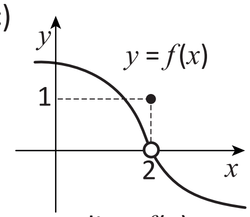
$\lim_{x \to 3} f(x)$

b)



$\lim_{x \to -1} f(x)$

c)

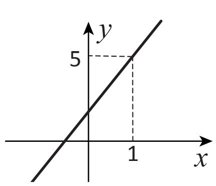


$\lim_{x \to 2} f(x)$

En b) $f(x)$ no está definida en $x = -1$; en c) $f(2) = 1$.

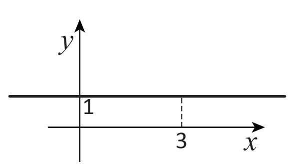
Ejemplo 1.1. Encuentre los límites: a) $\lim_{x \to 1} (2x + 3)$ b) $\lim_{x \to 3} 1$

Solución: a)



de gráfica se ve que $\lim_{x \to 1} (2x + 3) = 5$

b)



$\lim_{x \to 3} 1 = 1$

De b) se ve que:

$$\boxed{\lim_{x \to a} c = c \quad (c\text{: constante})}$$

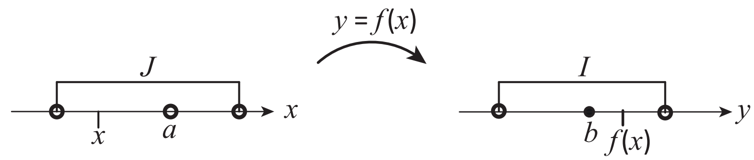
Ejercicio 1.2. Encuentre el límite:

a) $\lim_{x\to 2}(x-3)$ b) $\lim_{x\to 2}(-5)$ c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x$ d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \cos x$

e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan x$ f) $\lim_{x\to 2} 10^x$ g) $\lim_{x\to 1} \log_2 x$ h) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}$

*** Explicación 2.** $\lim_{x\to a} f(x) = b$ equivale lo siguiente:

Cuando está dado un intervalo abierto I que contiene el valor de b, existe un intervalo abierto J tal que: $x \in J,\ x \neq a \Rightarrow f(x) \in I$



En la figura de arriba puede limitarse I y J en la forma:
$I = (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \{y;\ |y-b| < \varepsilon\}$
$J = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = \{x;\ 0 < |x-a| < \delta\}$
con los números positivos ε y δ.

Entonces la definición tiene la siguiente forma:

Definición de límite de funciones.
Sea $f(x)$una función definida alrededor de $x = a$ salvo en a. Se denota $\lim_{x\to a} f(x) = b$ cuando se verifica lo siguiente:

Para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que:
$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

Para el tratamiento más riguroso, hay que definir el límite de tal manera que explica el sentido de "tender sin límite".

Esta forma es uno de los resultados de la actitud crítica del siglo XIX, hacia la base del cálculo infinitesimal que data del siglo XVII.

Clase 2. Propiedades del límite

Propiedades del límite:
Sean α, β y k números reales, $f(x)$y $g(x)$ funciones. Se supone que existen $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \beta$.

a) $\lim_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$

b) $\lim_{x\to a}\{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$

c) $\lim_{x\to a}\{kf(x)\} = k\alpha$

d) $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$

e) Si $\beta \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Para la demostración se utiliza la definición de la Explicación 2 de la Clase 1.

Nota: Utilizando d) y e) repetidamente se tiene que:

$$\text{f) } \lim_{x\to a}\{f(x)\}^n = \alpha^n \qquad (n\text{: número entero})$$

*** Explicación.** sobre la demostración: se utilizan las siguientes relaciones:

a) $|\{f(x)+g(x)\}-(\alpha+\beta)| \leq |f(x)-\alpha| + |g(x)-\beta|$

b) $|\{f(x)-g(x)\}-(\alpha-\beta)| \leq |f(x)-\alpha| + |g(x)-\beta|$

c) $|kf(x)-k\alpha| \leq |k|\ |f(x)-\alpha|$

d) $|f(x)g(x)-\alpha\beta| \leq |f(x)-\alpha||g(x)| + |\alpha||g(x)-\beta|$

e) $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{\alpha}{\beta}\right| \leq \dfrac{|f(x)-\alpha||\beta|+|\alpha||g(x)-\beta|}{|\beta|\{|\beta|-|g(x)-\beta|\}}$

Donde $|g(x)-\beta| < |\beta|$

Tenga en cuenta las siguientes relaciones:
$|s+t| \leq |s| + |t|$
$|s\,t| = |s|\ |t|$
$|g(x)| = |g(x)-\beta+\beta|$
$\leq |g(x)-\beta| + |\beta|$
$|g(x)| = |g(x)-\beta+\beta|$
$\geq |\beta| - |g(x)-\beta|$
Cuando
$|\beta| \geq |g(x)-\beta|$

Ejemplo 1.2. Encuentre los límites: a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+4)$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-1}{x}$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+4)$

$= \lim\limits_{x\to 2}x^2 - \lim\limits_{x\to 2}3x + \lim\limits_{x\to 2}4$ por a) y b)

$= (\lim\limits_{x\to 2}x)^2 - 3\lim\limits_{x\to 2}x + \lim\limits_{x\to 2}4$ por f) y d)

$= 2^2 - 3\,(2) + 4$

$= 2$

Este valor equivale a $f(2)$, donde $f(x) = x^2-3x+4$.

b) $\lim\limits_{x\to 3} x = 3 \neq 0$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-1}{x} = \lim\limits_{x\to 3}(x^2-1) \div \lim\limits_{x\to 3} x = \dfrac{8}{3}$

Nota: de a) se ve los siguientes:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ donde } f(x) \text{ es un polinomio de } x$$

Ejercicio 1.3. Encuentre el límite:

a) $\lim\limits_{x\to 1}2x^3$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}x^3\,2^x$

Clase 3. Cálculo del límite donde el denominador converge a 0

Ejemplo 1.3. Encuentre el límite: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

Solución. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+3) = 4$

Transforme la función en la forma donde el denominador no converge a 0.

Ejercicio 1.4. Encuentre el límite.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+x-1}{2x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x^2+3x}{x}$

*e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$ *f) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x+3}$ *g) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x+2}$

Ejemplo 1.4. Encuentre el límite: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Solución 1: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = 2$

Solución 2: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = 2$

En el Ejemplo 1.4 solución 1 aplique la racionalización del denominador.

En el Ejemplo 1.4 solución 2 aplique la factorización al numerador:
$x-1 = (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$

Ejercicio 1.5. Encuentre el límite:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$ *e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+\sqrt{x}-2}$

Ejemplo 1.5. Encuentre el valor de a y b que satisfacen $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-b}{x-1} = 3$

Solución: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b) = \lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}\cdot(x-1)\right\}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-b}{x-1}\quad \lim\limits_{x\to 1}(x-1)$ por d) de la Clase 2.

$= 3\cdot 0 = 0.$

Por lo tanto, como x tiende a 1 (se sustituye convenientemente en x^2+ax+b)

$a+b+1=0.$

Luego, $x^2+ax+b = x^2+ax+(-a-1)$ Sustituyendo $b=-a-1$

$= (x-1)(x+a+1)$. Entonces,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-b}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+a+1) = a+2,$$

Por lo tanto, $a+2=3$, $a=1$. Respuesta: $a=1$, $b=-2$

Si el denominador converge a 0 y existe el límite, entonces el numerador converge en 0.

Ejercicio 1.6. Encuentre el valor de a y b que satisfacen la igualdad:

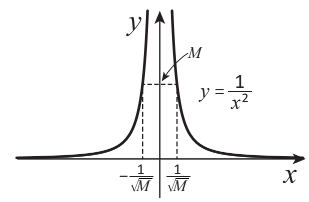
a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2} = 3$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+ax+b}{x+1} = -4$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+ax+b}{x+2} = 2$

Clase 4. Divergencia

Ejemplo 1.6. Describa el cambio del valor de $\frac{1}{x^2}$ cuando x tiende al 0.

Solución: si $x \to 0$, entonces $x^2 > 0$ y tiende al 0. Por lo tanto, el valor de $\frac{1}{x^2}$ aumenta sin límte.



En efecto, a cualquier número positivo M, si se toma x en $\left(-\frac{1}{\sqrt{M}}, 0\right)$ o $\left(0, \frac{1}{\sqrt{M}}\right)$, entonces se tiene que $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2} = M$.

Cuando se escribe $x \to a$, x no toma el valor de a.

El símbolo ∞ no es un número, tampoco se llama límite.

Si el valor de $f(x)$ aumenta sin límite cuando $x \to a$, entonces se expresa que $f(x)$ **diverge al infinito positivo** y se denota mediante

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty}$$

De la misma manera si el valor de $f(x)$ disminuye sin límite cuando $x \to a$, entonces se expresa que $f(x)$ **diverge al infinito negativo** y se denota mediante.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty}$$

Ejercicio 1.7. Investigue si converge o diverge.

a) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ b) $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ c) $\lim_{x\to 1}(x-1)^2$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan^2 x$

Propiedades de divergencia

a) $f(x) > 0$ y $\lim_{x\to a} f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \infty$

$f(x) < 0$ y $\lim_{x\to a} f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = -\infty$

b) $f(x) \leq g(x)$, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

$g(x) \leq f(x)$, $\lim_{x\to a} f(a) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\{-f(x)\} = -\infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\{-f(x)\} = \infty$

d) $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ o ∞, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = \infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ o $-\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = -\infty$

e) $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha > 0$ o ∞, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\{f(x)\, g(x)\} = \infty$

f) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ o $-\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = 0$

Se omite la demostración.

Ejemplo 1.7. Encuentre $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} x \tan^2 x$.

Se utiliza la propiedad e).

Solución: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} x = \dfrac{\pi}{2} > 0$ y $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan^2 x = \infty$. Por lo tanto

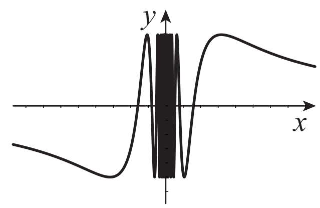
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} x \tan^2 x = \infty$$

Ejercicio 1.8. Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x-2}{\cos^2 x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{\operatorname{sen}^2 x}$ d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-2}{(x-3)^2}$

Ejemplo 1.8. Investigue los valores de $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ cuando $x \to 0$.

Solución: $\left|\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right| \leq 1$. Por otra parte, para cada número $b \in [-1, 1]$, hay valores de x en cualquier cercanía del 0 que satisface $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = b$



$y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

Del Ejemplo 1.8 se sabe que $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ no converge cunado $x \to 0$.

En este caso se dice que $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ **diverge** cuando $x \to 0$.

Ejercicio 1.9. Investigue si $\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$ converge o no.

Clase 5. Límites laterales

Ejemplo 1.9. La función $f(x)$ está definida como lo siguiente:

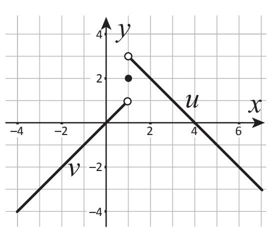
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{cuando } x < 1 \\ 2 & \text{cuando } x = 1 \\ -x + 4 & \text{cuando } 1 < x \end{cases}$$

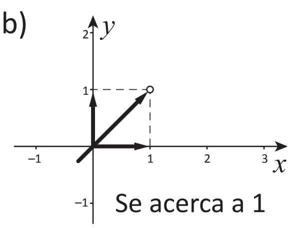
a) Dibuje la gráfica de $y = f(x)$.

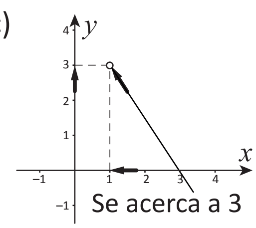
b) Investigue el valor de $f(x)$ cuando x < 1 y se acerca a 1.

c) Investigue el valor de $f(x)$ cuando $1 < x$ y se acerca a 1.

Solución:

a) 

b) 

c) 

En b) del Ejemplo 1.9, al número 1 se le llama **límite por la izquierda** y se denota mediante $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$.

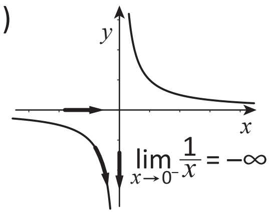
En c) al número 3 se le llama **límite por la derecha** y se denota mediante $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$.

Se aplica la notación similar cuando la función diverge. Se verifican las mismas propiedades que el límite anterior.

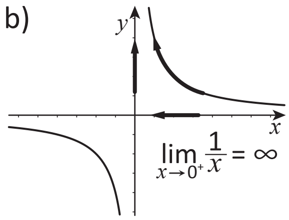
Ambas se les llama **límite lateral**.

Ejemplo 1.10. Calcule. a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$

Solución: a)



b)



Ejercicio 1.10. Encuentre los límites.

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3}$

Ejemplo 1.11. Se define una función que se denota mediante $[\![x]\!]$ como lo siguiente:

$$[\![x]\!] = n \quad \text{si} \quad n \in \boldsymbol{Z} \text{ y } n \le x < n+1$$

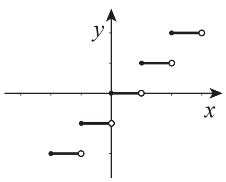
Es decir $[\![x]\!]$ representa el número entero máximo que no sobrepasa x.

a) Dibuje la gráfica de $y = [\![x]\!]$.

b) Encuentre $\lim\limits_{x\to 1^-} [\![x]\!]$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} [\![x]\!]$.

Se le llama esta función "función de parte entera".
Ejemplo: $[\![2]\!] = 2$, $[\![2.9]\!] = 2$, $[\![-1.3]\!] = -2$

Solución: a)



b) $\lim\limits_{x\to 1^-} [\![x]\!] = 0$ c) $\lim\limits_{x\to 1^+} [\![x]\!] = 1$

Ejercicio 1.11. Encuentre el límite lateral.

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} [\![x]\!]$ b) $\lim\limits_{x\to 3^+} [\![x]\!]$ c) $\lim\limits_{x\to -2^-} [\![x]\!]$ d) $\lim\limits_{x\to -2^+} [\![x]\!]$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} [\![x]\!]$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} [\![x]\!]$ *g) $\lim\limits_{x\to -1^-} [\![x^2]\!]$ *h) $\lim\limits_{x\to -1^+} [\![x^2]\!]$

Para g) y h) contruya la gráfica de $f(x) = [\![x^2]\!]$.

Entre el límite y el límite lateral existe la siguiente relación:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existen y coinciden.

En este caso $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

Ejemplo 1.12. Se define la función $f(x)$ como lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 3x - 6 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$

Investigue si $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe.

Solución: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^3 - x^2) = 4$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 + 3x - 6) = 4$

Concuerdan, luego $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe.

Ejercicio 1.12. La función $f(x)$ está definida como lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 4x & \text{si } -2 \le x \end{cases}$$

Investigue si $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ existe.

Clase 6. Límites en el infinito

Ejemplo 1.13. Investigue el cambio de valor de $\frac{1}{x}$ cuando:

a) x aumenta sin límite.

b) $x < 0$ y $|x|$ aumenta sin límite.

Solución: a) $\frac{1}{x} \to 0$ b) $\frac{1}{x} \to 0$

Se denota el fenómeno de a) mediante $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ y el b) mediante $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Se le llama a $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ límite en el infinito positivo y al $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ límite en el infinito negativo.

Ejercicio 1.13. Encuentre el límite:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$ b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$ c) $\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x}$

Los límites en el infinito tienen las mismas propiedades que las de la Clase 2 y 4.

Ejemplo 1.14. Sean $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ y $g(x) = b_0 x^m + bx^{m-1} + \cdots + b_m$ $(b_0 \neq 0)$ polinomios.

Encuentre $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ en los siguientes casos:

a) $n > m$ b) $n = m$ c) $n < m$

Solución: $\frac{f(x)}{g(x)} = x^{n-m}\,\dfrac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}}$ y $\lim_{x\to\infty}\dfrac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$

a) $\lim_{x\to\infty} x^{n-m} = \infty$, por lo tanto $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & \text{si } \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty & \text{si } \frac{a_0}{b_0} < 0 \end{cases}$

b) $\lim_{x\to\infty} x^{n-m} = 1$, por lo tanto $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0}$

c) $\lim_{x\to\infty} x^{n-m} = 0$, por lo tanto $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Ejercicio 1.14. En el Ejemplo 1.14, encuentre $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ en los siguientes casos:

a) $n > m$ b) $n = m$ c) $n < m$

Ejercicio 1.15. Encuentre el límite.

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x+2}{x^2-x+1}$ b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+5x}{3x^2-4x+1}$ c) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{3x^2-4x+1}$

d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+5x+1}{-x+3}$ e) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2+1}{3x^4+5x+2}$ f) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x+1}{-x^2+x}$

Ejemplo 1.15. Calcule: $\lim_{x\to\infty}(x^3 - x^2)$

Solución: $x^3 - x^2 = x^3\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ y $\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$, $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$

Por lo tanto $\lim_{x\to\infty}(x^3 - x^2) = \infty$

Veáse Clase 4, inciso e)

Ejercicio 1.16. Calcule.

a) $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - x^2)$ b) $\lim_{x\to\infty}(2x^3 - 3x^2)$ c) $\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x})$

Ejemplo 1.16. Encuentre el límite: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$

Solución: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty}\left\{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\right\}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = 0$$

Aplique la racionalización del denominador.

Ejercicio 1.17. Encuentre el límite:

a) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1})$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}$ c) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1} - x)$

Clase 7. Funciones exponenciales y logarítmicas en el infinito

La siguiente propiedad es fundamental:

a) Sea n número entero.
Si $a > 1$, entonces $\lim_{x\to\infty} x^n a^x = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} x^n a^x = 0$

Se puede demostrar a) utilizando el Teorema del binomio.

De a) se deduce las siguientes fórmulas:

Sea n número entero,

b) Si $0 < a < 1$, entonces $\lim_{x\to\infty} x^n a^x = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} x^n a^x = \begin{cases} \infty & n\text{: par} \\ -\infty & n\text{: impar} \end{cases}$

c) Si $1 < c$, entonces $\lim_{x\to\infty} x^n \log_c x = \begin{cases} \infty & (0 \le n) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$

d) Si $0 < c < 1$, entonces $\lim_{x\to\infty} x^n \log_c x = \begin{cases} -\infty & (0 \le n) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$

e) Si $1 < c$, entonces $\lim_{x\to 0^+} x^n \log_c x = \begin{cases} 0 & (0 < n) \\ -\infty & (n \le 0) \end{cases}$

f) Si $0 < c < 1$, entonces $\lim_{x\to 0^+} x^n \log_c x = \begin{cases} 0 & (0 < n) \\ \infty & (n \le 0) \end{cases}$

* **Ejercicio 1.18.** Deduce b) a f) de a).

Ejemplo 1.17. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3 - x^2)\, 3^x$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_3 x}{x^2 + 3x}$

Solución:

a) $(x^3 - x^2)\, 3^x = (1 - \frac{1}{x})(x^3\, 3^x)$. Como $\lim\limits_{x\to\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1$

y $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3\, 3^x) = \infty$, se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3 - x^2)\, 3^x = \infty$.

Veáse Clase 4 inciso e)

b) $\dfrac{\log_3 x}{x^2 + 3x} = \dfrac{1}{1 + \frac{3}{x}} \dfrac{\log_3 x}{x^2}$. Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{3}{x}} = 1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_3 x}{x^2} = 0$,

Veáse Clase 2 inciso d)

Se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_3 x}{x^2 + 3x} = 1 \cdot 0 = 0$.

Ejercicio 1.19. Calcule.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{x^4 - x + 1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{x + 3}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 + 2x)\, 2^x$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 + x)\log_2 x$

Clase 8. Límite de funciones trigonométricas

Propiedad del límite 2

a) Sean $f(x) \leq g(x)$ en la cercanía del número a, salvo en a. Si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

b) Sean $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en la cercanía del número a, salvo en a. Si existen $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Se omite la demostración.

*** Ejercicio 1.20.** Dé un ejemplo en que $f(x) < g(x)$ en la cercanía de a salvo en a y que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

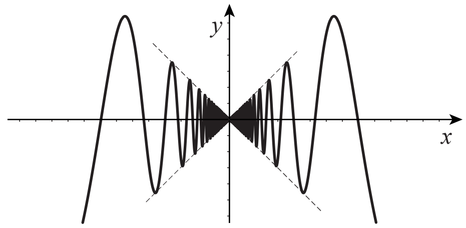
Ejemplo 1.18. Encuentre $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Solución: Como $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1$, se tiene que $-|x| \leq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq |x|$

Ahora $\lim\limits_{x\to 0} |x| = \lim\limits_{x\to 0} (-|x|) = 0$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$

[Por la propiedad b)]



$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1,\ 0 < |x|$

$\Rightarrow -|x| \leq |x| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq |x|$.

Si $x > 0$

$-|x| \leq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq |x|$.

Si $x < 0$

$-|x| \leq -x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq |x|$.

Luego $|x| \geq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \geq -|x|$.

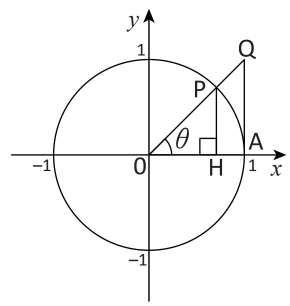
Ejercicio 1.21. Calcule.

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\dfrac{1}{2x}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x}$

Teorema 1.1. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta} = 1$

Este Teorema es el fundamento del cálculo infinitisimal de las funciones trigonometricas. Es esencial que la unidad de medida del ángulo es radián.

Demostración: En la figura $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, PH = sen θ y QA = tan θ. Por lo tanto, se tiene que:



El área S1 del ΔOPA = $\dfrac{1}{2}$ sen θ.

El área S2 de la forma abanico OPA es $\dfrac{1}{2}\,\theta$.

El área S3 del ΔOAQ = $\dfrac{1}{2}$ tan θ.

Como S1 < S2, se tiene que sen $\theta < \theta$ … (1)

Como S2 < S3, se tiene que $\theta < \dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ … (2)

Ahora, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, por lo tanto $0 < \cos\theta$.

Luego de (1) y (2) se tiene que,

$$\cos\theta < \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta} < 1 \qquad \dots (3)$$

Cuando $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < 0$, se tiene que $0 < -\theta < \dfrac{\pi}{2}$ y

sustituyendo $-\theta$ en (3), se tiene que;

$$\cos(-\theta) < \frac{\mathrm{sen}(-\theta)}{-\theta} < 1, \text{ es decir } \cos\theta < \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta} < 1.$$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$

Es decir, se verifica (3) para $\theta \in (-\dfrac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \dfrac{\pi}{2})$.

Ahora $\lim\limits_{x\to 0}\cos\theta = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$. Luego por la propiedad b)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta} = 1.$$

Clase 9. Aplicando el Teorema 1.1

Ejemplo 1.19. Calcule: $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta}$

Solución: $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos\theta} \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Veáse Clase 2 inciso d)

Ejercicio 1.22. Calcule.

a) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ b) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\tan\theta}$

De ahora en adelante se utilizará el resultado de a) y el Teorema 1.1 indistintamente.
La variable puede ser cualquier letra.

Ejemplo 1.20. Calcule $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$

Solución: Sea $\frac{\pi}{2} - x = t$. Entonces $t \to 0 \Leftrightarrow x \to \frac{\pi}{2}$ y

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t,$$

Por lo tanto, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$

Ejercicio 1.23. Calcule. a) $\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\pi - x}$ b) $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{\cos x}$

Ejemplo 1.21. Calcule. a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

Solución: a) Sea $2x = \theta$. Entonces $x \to 0 \Leftrightarrow \theta \to 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \cdot 2 = 2 \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 2 \cdot 1 = 2$$

b) Sea $2x = \alpha$ y $3x = \beta$. Entonces $x \to 0 \Leftrightarrow \alpha \to 0 \Leftrightarrow \beta \to 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\operatorname{sen} 3x} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \lim_{\beta \to 0} \frac{\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Si se puede, calcule sin utilizar α y β: $\frac{2}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \lim_{x \to 0} \frac{3x}{\operatorname{sen} 3x} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}$

Ejercicio 1.24. Calcule.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan 2x}$ c) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\tan 4x}$ e) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4} - x}{\cos 2x}$

Ejercicios de la lección

1. Encuentre el límite. Clase 2

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^3+2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} 3^{\sqrt{x-1}}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\log_3\dfrac{x^3-x+2}{x^2+1}$

2. Calcule. Clase 3

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+1}}$

3. Encuentre el valor de a y b que satisfacen la igualdad. Clase 3

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=4$ b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2+ax+b}=-\dfrac{1}{5}$

*c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x^2+ax+b}=\dfrac{3}{10\sqrt{5}}$

4. Calcule. Clase 4

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{|\cos x|}$

5. Calcule. Clase 5

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x(x-1)}$ c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{x^2-x-2}$

6. Calcule. Clasde 6

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-x}{2x^3-2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x}{x^3-x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2x^2+x}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2+2x}\right)$

7. Calcule. Clase 7

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2^x}{x^5}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^4\, 3^x$ c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\log_2 x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log_2 x$

e) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3^x}{\log_2 x}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty}(2^x-x^3)$ g) $\lim\limits_{x\to \infty}(x-\log_{\frac{1}{3}} x)$

8. Calcule. Clase 8

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\cos x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\log_2 x}$

9. Calcule. Clase 9

a) $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}$ b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\tan x}{x-\pi}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen} 4x}$

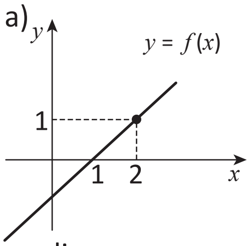
d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 3x}$ e) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$

Lección 2. Continuidad de funciones

Clase 1. Continuidad en el punto

Ejemplo 2.1. Encuentre lo que se pide.

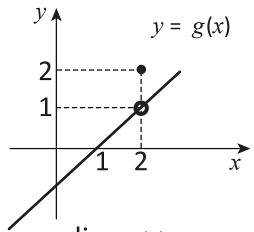
a)



$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$f(2)$

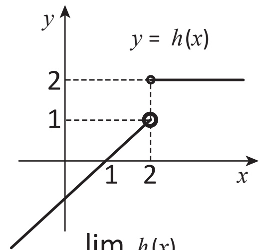
b)



$\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

$g(2)$

c)



$\lim\limits_{x \to 2} h(x)$

$h(2)$

Solución: a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$, $f(2) = 1$ b) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 1$, $g(2) = 2$ c) $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ no existe, $h(2) = 2$

El signo "∘" significa que el punto no pertenece a la gráfica. El signo "•" significa que sí pertenece a la gráfica.

$\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = 2$

En el Ejemplo 2.1 solo $f(x)$ es continua en 2.

$f(x)$ debe ser definida en a y su alrededor.

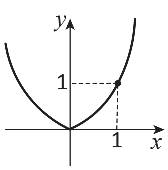
Definición. Continuidad en el punto

Sea $y = f(x)$ una función, $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ cuando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

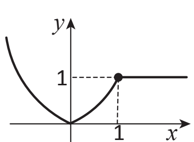
Nota: Aplicando la Explicación 2 de la Clase 1.1 de la Lección 1, la definición tiene la forma siguiente: $f(x)$ es continua en el punto a, cuando se verifica lo siguiente: Para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe número $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Ejercicio 2.1. Elija las gráficas de funciones que son continuas en $x = 1$

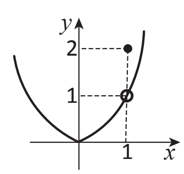
a)



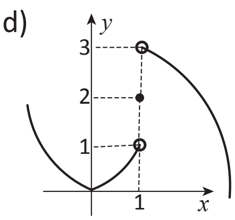
b)



c)



d)



Propiedad de la continuidad

Si $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son continuas en $x = a$, entonces las siguientes son continuas en $x = a$:

a) $y = f(x) + g(x)$

b) $y = f(x) - g(x)$

c) $y = kf(x)$, (k:número real)

d) $y = f(x)g(x)$

e) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad (g(a) \neq 0)$

Demostración de que $y = f(x) + g(x)$ es continua.
De hipótesis $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$.
De a) de la Clase 1.2, se tiene que:

$$\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = f(a) + g(a).$$

Ejercicio 2.2. Demuestre la continuidad de los demás casos de la propiedad.

Clase 2. Continuidad en el intervalo

Definición de continuidad en el intervalo

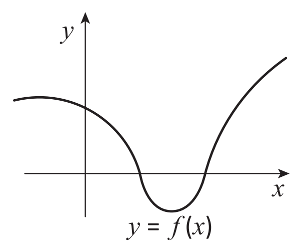
$f(x)$ es continua en $x = a$ del intervalo $[a, b)$ cuando $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

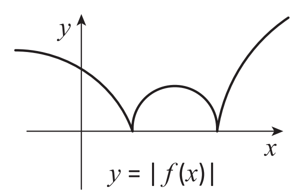
$f(x)$ es continua en $x = b$ del intervalo $(a, b]$ cuando $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo, cuando es continua en todos los puntos del intervalo

[A]

Intuitivamente la continuidad significa que la gráfica no está cortada.





Propiedad de las funciones continuas.
Funciones continuas tienen la misma propiedad que se explicó en la clase 1. Además:

f) Si $f(x)$ es continua, entonces $|f(x)|$ lo es.

g) Si $f(x)$ es continua, entonces $\sqrt{f(x)}$ lo es donde $f(x) \geq 0$.

h) Si $f(x)$ es continua y tiene su inversa f^{-1}, entonces f^{-1} lo es.

Ejemplos de funciones continuas:

1. Funciones polinómicas
2. Funciones racionales
3. Funciones trigonométricas y sus inversas
4. Funciones exponenciales y logarítmicas

Definición Valor máximo y mínimo

El valor M (respectivamente m) es el máximo (respectivamente mínimo) de la función $y = f(x)$ cuando:

$f(x) \leq M$ [respectivamente $m \leq f(x)$] en su dominio.

Existe un valor $x = a$ en su dominio tal que $f(a) = M$ (respectivamente $f(a) = m$).

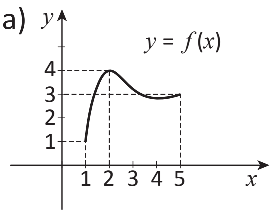
[B]

La condición "cerrado" es crucial como se ve en el Ejemplo 2.2.
Se omite demostración.

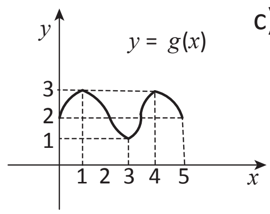
Teorema Valor máximo y mínimo de la función continua.

Si una función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado, entonces esta función tiene valor máximo y mínimo en este intervalo.

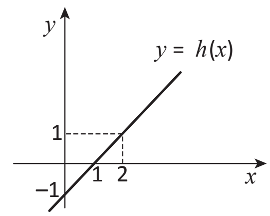
Ejemplo 2.2. Encuentre el valor máximo y/o mínimo en el intervalo indicado si existen.

a)


En [1, 5]

b)


En [0, 5]

c)


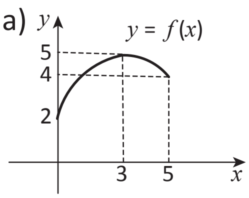
En [0, 2], (0, 2], (0, 2)

Solución: a) máximo $f(2) = 4$, mínimo $f(1) = 1$
b) máximo $g(1) = g(4) = 3$, mínimo $g(3) = 1$
c) En [0, 2] máximo $h(2) = 1$, mínimo $h(0) = -1$
En (0, 2] máximo $h(2) = 1$, mínimo no existe.
En (0, 2) máximo no existe, mínimo no existe.

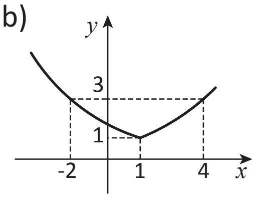
Cuando se trata de máximo y mínimo se indica el valor de x donde la función toma estos valores.

El mínimo no existe porque $h(x)$ toma valores mayores que -1 y que están en cualquier cercanía de -1.

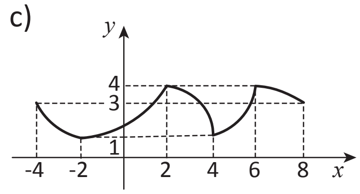
Ejercicio 2.3. Encuentre el valor mínimo y/o máximo en el intervalo indicado si existen.

a)


En [0, 5]

b)


En (-2, 4]

c)


En [-4, 8]

Clase 3. Teorema del valor intermedio

Teorema del valor intermedio
Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$. Sea $f(a) \neq f(b)$ y $f(a) < k < f(b)$ o $f(b) < k < f(a)$, entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = k$.

Se omite la demostración, para la cual hay que definir el conjunto de números reales de manera rigurosa.

Ejemplo 2.3. Demuestre que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo (1, 2).

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$. La función $y = f(x)$ es continua en [1, 2].
Por otra parte $f(1) = -1$ y $f(2) = 3$.
Como $f(1) < 0 < f(2)$, por el Teorema del valor medio existe c en (1, 2) tal que $f(c) = 0$.

Ejercicio 2.4. Demuestre que cada ecuación tiene solución en el intervalo indicado.

a) $2x^3 + x^2 - 4 = 0$ (1, 2)
b) $\log_2 x + x - 2 = 0$ (1, 2)
c) $2^x - 3x = 0$ (3,4)
d) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x + 1 = 0$ $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

Ejercicios de la lección

1. Demuestre que la ecuación tiene solución en el intervalo indicado.
   a) $x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0$ $(1, 2)$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x + 2x - 3 = 0$ $(1, 4)$
   c) $(\frac{1}{3})^x - 2x = 0$ $(0, 1)$ d) $\cos x - 2x = 0$ $(0, \frac{\pi}{4})$

Clase 3

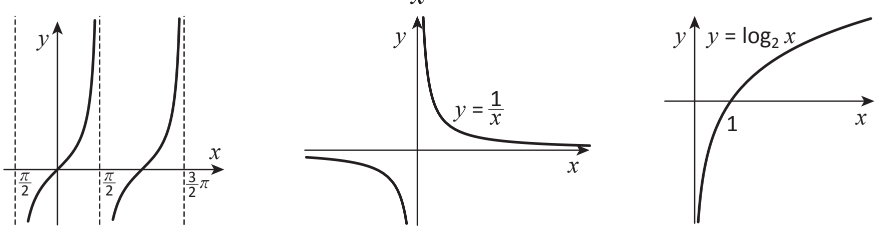
Lección 3. Asíntotas

Clase 1. Asíntotas

Se le denomina **asíntota** a una recta a la cual la gráfica se acerca sin límite y sin tocarla.

Ejemplos de asíntotas verticales:

a) $y = \tan x$ b) $y = \frac{1}{x}$ c) $y = \log_2 x$



Asíntotas verticales

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $x = 0$ $x = 0$

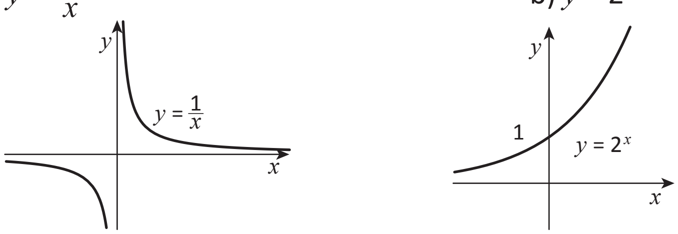
(n: número entero)

Este tipo de asíntotas aparece en el límite del dominio de la función.

En b) $y = 0$ es la asíntota horizontal.

Ejemplos de asíntotas horizontales.

a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = 2^x$



Asíntotas horizontales

$y = 0$ $y = 0$

En la Unidad IV, se aprenderán otro tipo de asíntotas.

Ejercicio 3.1. Dibuje la gráfica. Encuentre la ecuación de la asíntota.
a) $y = \frac{1}{x} + 1$ b) $y = \frac{1}{x+1}$ c) $y = \sec x$ d) $y = 3^x - 1$ e) $y = \log_3 (x + 1)$

Problemas de la unidad A

1. Calcule. Clase 1.7

   a) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \log_2 x$

   b) $\lim_{x \to \infty} x^2 2^{-\sqrt{x}}$

   c) $\lim_{x \to 0^+} \frac{3^{\sqrt{x}}}{x^2}$

2. Demuestre que la ecuación tiene solución en el intervalo indicado. Clase 2.3

   a) $\log_{\frac{1}{3}} x - 2x = 0 \qquad (0, 1)$

   b) $\tan x = 3x \operatorname{sen} x \qquad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

Problemas de la unidad B

1. Demuestre que para cada número negativo k, la ecuación $\log_2 x = kx$ tiene solución en el intervalo (0, 1).

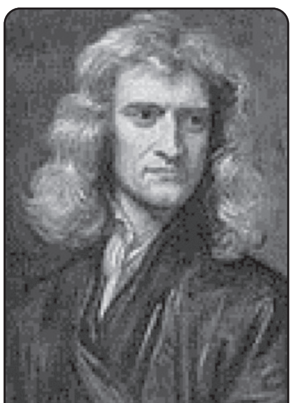
Matemáticas IV

Unidad III

Diferenciación e integrales de funciones polinómicas

- Lección 1: Derivadas de funciones polinómicas
- Lección 2: Aplicación de derivadas
- Lección 3: Integrales

Algo de historia



Isaac Newton
(1642 – 1727)

Newton fue un físico matemático inglés. Nació en Woolsthorpe el 25 de diciembre de 1642. Estudió en la Universidad de Cambridge, donde recibió la clase de Isaac Barrowa quien reconoció el talento de Newton. Durante los años 1664 y 1666, cuando estuvo en su casa natal para evitar peste, hizo tres descubrimientos magníficos, es decir el cálculo diferencial, la ley de la gravitación universal y la descomposición de la luz.   Sus obras principales fueron: Philisofiae naturalis principia mathematica (Principios matemáticos de la filosofía natural) y Opticks (Óptica).

Su mayor contribución a la matemática es el descubrimiento del cálculo infinitesimal, el cual comparte con su contemporáneo Leibniz. En los siguientes siglos los matemáticos desarrollaron este método y ha sido uno de las herramientas matemáticas más útiles.

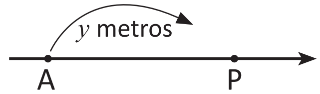
Newton falleció en Londres el 20 de marzo de 1727.

Fuente: E. T. Bell: Men of mathematics

Lección 1. Derivadas de funciones polinómicas

Clase 1. Velocidad en el instante

Ejemplo 1.1. En la recta numérica, un punto P sale del punto A y se mueve hacia la derecha. La distancia y metros, entre los puntos P y A después de x segundos está dada como $y = 2x$.

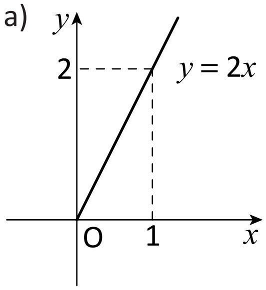


[A] Relación entre la distancia, el tiempo y la velocidad.

a) Haga la gráfica de la función $y = 2x$ ($x \geq 0$).
b) Encuentre la velocidad metros/segundo (m/s) del punto P.

Solución:

a)



b)

x	0	1
y	0	2
Δx	1	
Δy	2	
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	2	

Respuesta:
2 metros/segundo ó 2m/s

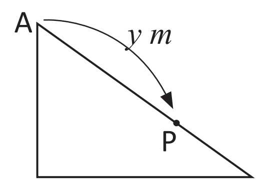
Δx, representa la diferencia (o cambio) de x. Se aplica lo mismo a Δy.

$\Delta x = 1 - 0 = 1$
$\Delta y = 2 - 0 = 2$

Nota: En este ejemplo, la velocidad no cambia y

velocidad = la pendiente de la gráfica.

Ejemplo 1.2. Una bolita P sale del punto A cae en la pendiente. La distancia y metros entre A y P después de x segundos está dada como $y = x^2$.



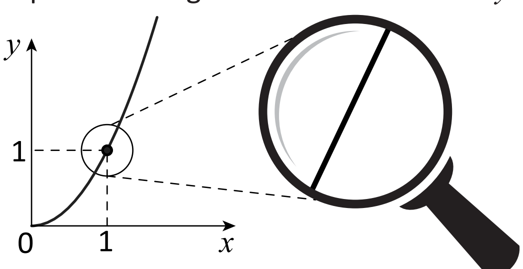


Figura 1.1

Ahora la gráfica de $y = x^2$ no es una recta, lo que quiere decir, la velocidad va cambiando. Sin embargo, si se agranda la parte alrededor del punto (1, 1) la gráfica parece casi una recta. Ahora se trata de encontrar su "pendiente".

Encuentre la pendiente completando la tabla.

x	1	2	1	1.1	1	1.01	1	1.001
y								
Δx								
Δy								
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$								

x	0	1	0.9	1	0.99	1	0.999	1
y								
Δx								
Δy								
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$								

Solución:

x	1	2	1	1.1	1	1.01	1	1.001	
y	1	4	1	1.21	1	1.0201	1	1.002001	
Δx	1		0.1		0.01		0.001		
Δy	3		0.21		0.0201		0.002001		
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	3		2.1		2.01		2.001		$\to 2$

x	0	1	0.9	1	0.99	1	0.999	1	
y	0	1	0.81	1	0.9801	1	0.998001	1	
Δx	1		0.1		0.01		0.001		
Δy	1		0.19		0.0199		0.001999		
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	1		1.9		1.99		1.999		$\to 2$

Respuesta: La “pendiente” es 2.

Este corresponde a la “velocidad en x = 1”.

Clase 2. Definición de derivada

La Figura 1.2 muestra la gráfica de una función. Se toman dos puntos P(a, $f(a)$) y Q($a + h$, $f(a + h)$) en la gráfica. La pendiente de la recta PQ es

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Ahora el punto Q se acerca al punto P. Entonces la pendiente de la recta se acerca a la pendiente de la recta l, es decir:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{la pendiente de } l$$

La función que corresponde el valor de x = a, a este límite se llama **derivada** de $f(x)$.

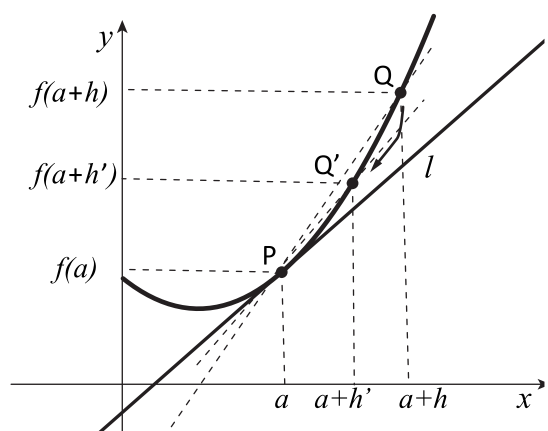


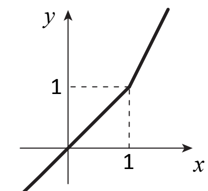
Figura 1.2

Definición de derivada

Sea $f(x)$ una función. Cuando existe el límite $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se le denomina derivada de $f(x)$.

Se denomina **diferenciación** al encontrar la derivada.

Nota: Hay funciones que no tienen derivada.



$a = 1$ $f(a) = 1$

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x & (x < 1) \\ 2x - 1 & (1 \leq x) \end{cases}$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1, \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$$

Por lo tanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \text{ no existe.}$$

Ejemplo 1.3. Sea $f(x) = x^2$. Encuentre $f'(x)$.

Solución: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x^2+2xh+h^2)-h^2}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2x+1)h}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Nota: Si se sustituye $x = 1$ en $f'(x)$, se obtiene $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, el valor que se ha obtenido en el Ejemplo 1.2.

Ejercicio 1.1. Encuentre $f'(x)$ y $f'(1)$.

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = 2$ d) $f(x) = x^2 + 3x$

Nota: Una función diferenciable es una función continúa.

* Demostración: $\lim_{x \to a} \{f(x) - f(a)\} = \lim_{h \to 0} \left\{ \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h \right\}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \lim_{h \to 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Luego $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Otras notaciones

$\dfrac{d}{dx} f(x)$.

Cuando se trata de la función $y = f(x)$

y', $\dfrac{dy}{dx}$ (derivada de y con respecto a x).

Cuando $f(x)$ tiene su derivada se dice que $f(x)$ es **diferenciable (derivable)**.

$f(1+h) = \begin{cases} 1 + h & (h < 0) \\ 2(1+h)-1 & (0 \leq h) \end{cases}$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1+h-1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h}$$

$$= 1$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\{2(1+h)-1\}-1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{2}+2\cancel{h}-\cancel{2}}{\cancel{h}} = 2$$

Para encontrar $f'(1)$ basta sustituir $x = 1$ en $f'(x)$.

Clase 3. Cálculo de la derivada

Propiedad de derivada

a) c es constante $\Rightarrow$ $(c)' = 0$

b) $\{kf(x)\}' = k\,f'(x)$ $\quad k$: constante

c) $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$

d) $\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$

$(c)'$ significa derivada de c como función de x.

Se verifica la inversa de a).

$f'(x) = 0$ en un intervalo $\Rightarrow f(x)$ es constante en este intervalo.

Se omite demostración.

Demostración: a) Sea $f(x) = c$. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

b) Sea $g(x) = kf(x)$; $g'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$

$$= k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = kf'(x)$$

c) y d) se demuestran utilizando Matemática IV, Unidad II, Lección 1, Clase 2.

IV, II, Clase 2.

De la propiedad anterior, se reduce el cálculo de la derivada de la función polinómica al de monomios. En cuanto a esto último, se tiene la siguiente:

Derivada de monomios

$(x^n)' = nx^{n-1}$ (n: número natural)

$(x)' = 1$
$(x^2)' = 2x$
$(x^3)' = 3x^2$

* Demostración. Primero se tiene la siguiente igualdad

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^{n-1-i}b^i + \cdots + b^{n-1})$$
(n: número natural)

Para la demostración desarrolle el lado derecho.

Luego, sean $x + h = a$ y $x = b$.

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(a-x)(a^{n-1} + a^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})$$

$$= \lim_{h\to 0}(a^{n-1} + a^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}) = n\,x^{n-1}$$

$a - x = h$

$\lim\limits_{h\to 0} a = x$

Ejemplo 1.4. Sea $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$. Encuentre $f'(x)$ y $f'(2)$.

Solución: $f'(x) = (2x^3 - 3x + 4)'$
$= (2x^3)' - (3x)' + (4)'$
$= 2(x^3)' - 3(x)'$
$= 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 3\,x^{1-1}$
$= 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 1$
$= 6x^2 - 3$

$f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 3$
$= 21$

No siempre es necesario escribir el proceso tan detalladamente.

Ejercicio 1.2. Encuentre $f'(x)$ y $f'(2)$.

a) $f(x) = 4x^3 - 2x + 5$ b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

c) $f(x) = -5x^4 - 3x^2 + 4x$ d) $f(x) = 2x^3 - 3$

Ejemplo 1.5. Sea $y = (2x - 1)(x + 3)$. Encuentre y'.

Solución: $y = (2x - 1)(x + 3) = 2x^2 + 5x - 3$

$y' = 4x + 5$

Ejercicio 1.3. Encuentre y' o $f'(x)$.

a) $y = (3x + 2)(x + 1)$ b) $y = (2x - 1)^2$

c) $f(x) = (x^2 + 2x)(x - 1)$ d) $f(x) = 4(x + 3)(x - 3)$

Ejemplo 1.6. Sea $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre $\frac{d}{dr}V(r)$.

Solución: $\frac{d}{dr}V(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$

$\frac{d}{dr}$ quiere decir "derivar con respecto a r".

Ejercicio 1.4. Encuentre la derivada:

a) $f(r) = \pi r^2$, $\frac{d}{dr}f(r)$ b) $g(s) = 3s^2 - s$, $\frac{d}{ds}g(s)$

c) $y = \pi r^2 h$, $\frac{dy}{dr}$ d) $z = -5y^3 + 3y^2$, $\frac{dz}{dy}$

Ejercicios de la lección

1. Calcule la derivada aplicando la definición. Clase 2
   a) $f(x) = -2x$ b) $f(x) = x^2 - x$

2. Encuentre lo que piden. Clase 3
   a) $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$, $f'(x)$, $f'(-1)$

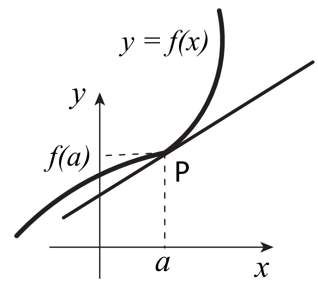
   b) $g(x) = (2x + 3)(3x - 1)$ $g'(x)$, $g'(-2)$

   c) $h(t) = \frac{1}{2}gt^2$ $\frac{d}{dt}h(t)$, $\frac{d}{dt}h(1)$

Lección 2. Aplicación de derivada

Clase 1. Tangente

Definición de tangente
Sea $y = f(x)$ una función diferenciable. Sea P(a, $f(a)$) un punto de su gráfica. La tangente de la gráfica en el punto P es la línea que pasa por P cuya pendiente es $f'(a)$.



Ecuación de tangente
La tangente de la gráfica $y = f(x)$ en el punto P(a, $f(a)$) es
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ ... (1)

Demostración: la pendiente de (1) es $f'(a)$.
(1) pasa por el punto (a, $f(a)$).

La línea que pasa por (a, b) y cuya pendiente es m es:
$$y - b = m(x - a)$$
[Matemática I. Unidad IV]

Ejemplo 2.1. Encuentre la tangente a la gráfica de $y = x^2 - x + 3$ en el punto (2, 5) de la gráfica.

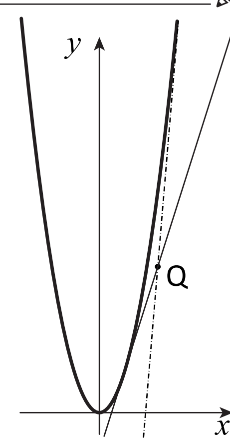
Solución: Sea $f(x) = x^2 - x + 3$.
$f'(x) = 2x - 1$. $f'(2) = 3$

La tangente es una línea que pasa por (2,5) y cuya pendiente es 3.
Por lo tanto,
$y - 5 = 3(x - 2)$, $y = 3x - 1$ (Respuesta)

Ejercicio 2.1. Encuentre la tangente de las siguientes gráficas en el punto dado.

a) $y = x^2 - 3x + 4$, (1, 2) b) $y = -3x^2 + 4x + 1$, (1,2)

c) $y = -x^3 + 2x^2 + 1$, (−1, 4) d) $y = x^3 - 3x$, (−1, 2)



*** Ejemplo 2.2.** Encuentre la tangente de la gráfica $y = x^2$ que pasa por el punto Q(3,8) fuera de la gráfica.

Solución: Sea $f(x) = x^2$. Sea (a, a^2) el punto de tangencia.
La pendiente de la tangente es $f'(a) = 2a$.
Como pasa por el punto (a, a^2), la tangente es:
$y = 2a\,(x - a) + a^2$, $y = 2ax - a^2$ ...(1)
Esta línea pasa por el punto (3, 8), por lo tanto, sustituyendo (3,8) en (1):
$8 = 2a \cdot 3 - a^2$, $a^2 - 6a + 8 = 0$, $(a - 2)(a - 4) = 0$
$a = 2$ y 4
Sustituyendo $a = 2$ en (1), se obtiene que: $y = 4x - 4$
Sustituyendo $a = 4$ en (1), se obtiene que: $y = 8x - 16$
Respuesta: $y = 4x - 4$ y $y = 8x - 16$

Los puntos de tangencia: sustituyendo,
$a = 2, 4$ en (a, a^2)
(2, 4) y (4, 16)

*** Ejercicio 2.2.** Encuentre la tangente que pasa por el punto dado.

a) $y = x^2$, $(2, 3)$ b) $y = -x^2 + 3x$, $(2, 3)$

c) $y = -x^2$, $(2, 5)$ d) $y = 3x^2 - 1$, $(1, -1)$

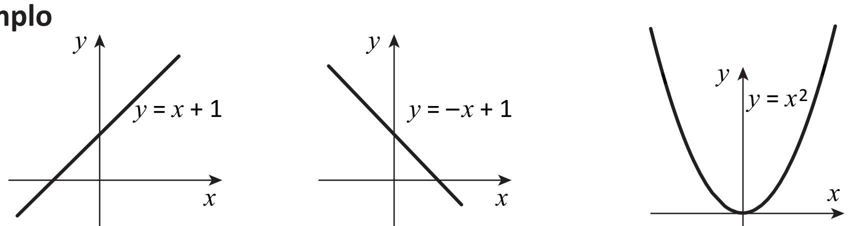
Clase 2. Tabla de variación

Definición: En un intervalo una función $f(x)$ es:

Creciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Decreciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Ejemplo



Creciente $y' = 1 > 0$ Decreciente $y' = -1 < 0$ Decreciente $y' = 2x < 0$ Creciente $y' = 2x > 0$

Como se ve en este ejemplo, hay una relación entre el cambio del valor de una función y el signo de su derivada.

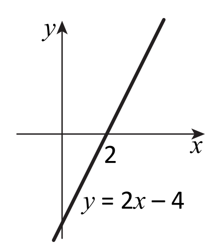
Teorema: Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b).

$f'(x) > 0$ en $(a, b) \Rightarrow f(x)$ es creciente en $[a, b]$

$f'(x) < 0$ en $(a, b) \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $[a, b]$

Para la demostración se utiliza el Teorema del valor medio que se aprenderá en la Unidad IV.

Ejemplo 2.3. Sea $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Investigue el signo de $f'(x)$ y el cambio de valor de $f(x)$.



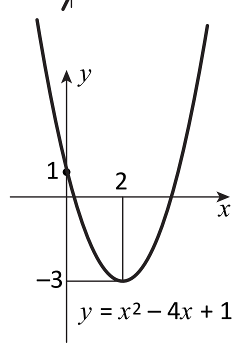
Solución: $f'(x) = 2x - 4$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Por lo tanto, se tiene que:

$x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente

$x = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$

$2 < x \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.



La siguiente tabla representa el resultado del Ejemplo 2.3.

x	$x < 2$	2	$2 < x$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	– 3	↗

En este libro se le llama a esta tabla: tabla de variación.

↘ significa decreciente.

↗ significa creciente.

Ejercicio 2.3. Haga la tabla de variación.

a) $f(x) = x^2 - 6x$ b) $f(x) = 3x^2 - 6x$

c) $f(x) = -x^2 + 2x$ d) $f(x) = -x^2 + 4$

Ejemplo 2.4. Haga la tabla de variación de $f(x) = x^3 - 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) = 0, \quad x = -1$ y 1

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	–2	↗

Los signos $x < -1$, $-1 < x < 1$ y $1 < x$ se pueden omitir.

Ejercicio 2.4. Haga la tabla de variación.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$

c) $f(x) = -x^3 + 3x$ d) $f(x) = -x^3 - 6x^2$

Clase 3. Extremos Relativos

Definición: Sea $f(x)$ una función definida en el punto x_0 de su dominio. Se le denomina a $f(x_0)$:

máximo relativo si $f(x) \leq f(x_0)$ para valores de x aproximados a x_0

mínimo relativo si $f(x) \geq f(x_0)$ para valores de x aproximados a x_0

Se llama también:
máximo local,
mínimo local.

Ambos se llaman extremo relativo (local).

Ejemplo 2.5. Haga la tabla de variación de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$ y encuentre los extremos relativos.

Solución: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3)$
$= -3(x-3)(x+1) = 0, \quad x = 3$ y -1

x		-1		3	
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	–5	↗	27	↘

máximo relativo $f(3) = 27$
mínimo relativo $f(-1) = -5$

En general

x		a	
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

↑
máximo relativo

x		a	
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗

↑
mínimo relativo

Dése cuenta del cambio de signo de la derivada.

Ejercicio 2.5. Haga la tabla de variación y encuentre los extremos relativos.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2$ b) $f(x) = 2x^3 + 9x^2$

c) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 24x$ d) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$

Clase 4. Gráfica de función de tercer grado (1)

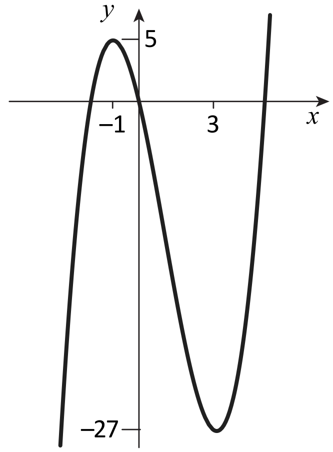
Ejemplo 2.6. Encuentre los extremos relativos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ y haga la gráfica.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$= 3(x-3)(x+1) = 0$

$x = 3$ y -1

x		-1		3	
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$
		Máximo relativo		Mínimo relativo	



Ejercicio 2.6. Encuentre los extremos relativos y haga la gráfica.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x + 10$

c) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x$

d) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x - 4$

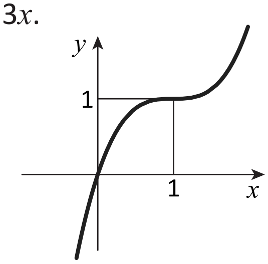
"La gráfica de $f(x)$" quiere decir la gráfica de $y = f(x)$.
Para dibujar la gráfica se necesitan los extremos relativos, si existen.
Para dibujar la gráfica hay que unir los puntos que corresponden a los extremos relativos, el intercepto en y y cuando se pueda los interceptos en x.
De igual forma se deben hacer los trazos siguiendo el comportamiento de $f(x)$ cuando crece o decrece.

Clase 5. Gráfica de función de tercer grado (2)

Ejemplo 2.7. Haga la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$

x		1	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$



Esta función no tiene extremos relativos.
En (1, 1) la tangente es horizontal.

Nota: $f'(a) = 0$, no siempre significa que $f(x)$ tiene su extremo relativo en $x = a$. Hay que investigar el signo del valor alrededor de $x = a$.

Hay cuatro casos:

x		a	
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

mínimo relativo

x		a	
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

máximo relativo

x		a	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\nearrow$

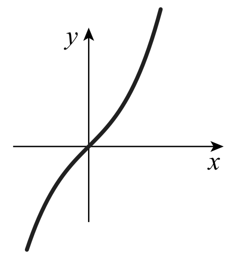
x		a	
$f'(x)$	–	0	–
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\searrow$

No son extremos relativos

Ejemplo 2.8. Haga la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 > 0$

x	
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗



Esta función no tiene extremos relativos.

Ejercicio 2.7. Haga la gráfica.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ b) $y = -x^3$ c) $y = x^3 + x$ d) $y = -x^3 - 3x$

Clase 6. Extremos de funciones

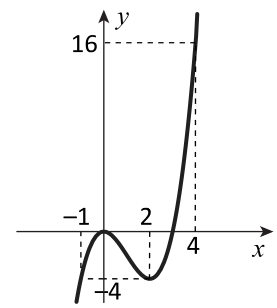
Ejemplo 2.9. Encuentre el máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ en el intervalo $[-1, 4]$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$, $x = 0, 2$

x	-1		0		2		4
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	-4	↗	0	↘	-4	↗	16

máximo 16 ($x = 4$)
mínimo -4 ($x = -1, 2$)

Comparar los extremos relativos con los valores en los extremos del intervalo.

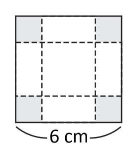


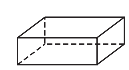
Ejercicio 2.8. Encuentre el máximo y el mínimo en el intervalo dado.

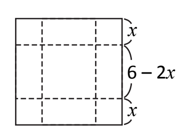
a) $f(x) = x^3 + 3x^2$, $[-2, 2]$ b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$, $[0, 4]$

Clase 7. Aplicación de los extremos

Ejemplo 2.10. Hay una chapa de zinc de forma cuadrada cuyo lado mide 6 cm. Cortando los cuadrados del mismo tamaño de las cuatro esquinas, se hace un recipiente sin tapa de la forma paralelepípedo rectangular. Para que la capacidad sea la mayor posible, ¿cuánto deben medir los lados de los cuadrados que se cortan?







Solución: Sea x cm la medida de los lados de los cuadrados, x debe pertenecer al intervalo $(0, 3)$. Sea y cm³ la capacidad del recipiente elaborado.
La base del recipiente tiene la forma de cuadrado cuyo lado mide: $(6 - 2x)$ cm. La altura mide x cm, por lo tanto: $y = (6-2x)^2 x = 4(x^3 - 6x^2 + 9x)$

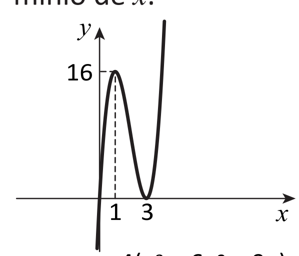
$$y' = 12(x^2 - 4x + 3) = 12(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1, 3$$

x	0		1		3
y'		+	0	–	
y		↗	16	↘	

Respuesta 1 cm.

Hay que aclarar el dominio de x.



$y = 4(x^3 - 6x^2 + 9x)$

Ejercicio 2.9. En el Ejemplo 2.10, si la chapa mide 5 cm de ancho y 8 cm de largo, ¿cuánto deben medir los lados de loa cuadrados que se cortan?

Clase 8. Aplicación a las ecuaciones (1)

Ejemplo 2.11. Encuentre el número de distintas soluciones reales de la siguiente ecuación:

$x^3 - 3x + 1 = 0$

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Para un número real a,

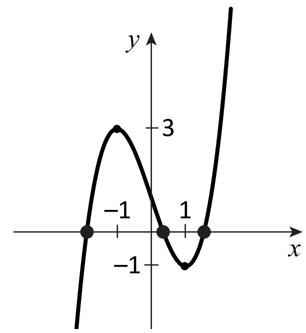
$x = a$ es una solución de $f(x) = a$

$\Leftrightarrow$ el punto $(a, 0)$ está en la gráfica de $y = f(x)$, por lo tanto:

(el número de distintas soluciones reales de $f(x) = 0$) =
(el número de distintos puntos que la gráfica de $y = f(x)$ tiene común con el eje x).

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1) = 0, \quad x = 1, -1$

x		-1		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗



Como la gráfica tiene tres puntos distintos comunes con el eje x, la ecuación tiene tres soluciones reales distintas.

Ejercicio 2.10. Encuentre el número de distintas soluciones reales.

a) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$ c) $x^3 + 9x^2 + 24x + 16 = 0$ d) $2x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 0$

Clase 9. Aplicación a las ecuaciones (2)

Ejemplo 2.12. Sea a un número real. Investigue la relación entre el valor de a y el número de distintas soluciones reales de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 - a = 0 \quad \dots (1)$$

Solución: (1) es equivalente a: $x^3 - 3x^2 = a$

Las soluciones reales de (1) corresponde a los puntos comunes entre $y = x^3 - 3x^2$ y $y = a$.

Por lo tanto:

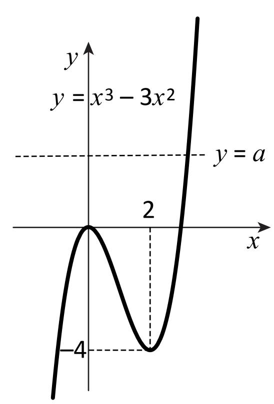
(el número de las distintas soluciones reales de $f(x) - a = 0$) =
(el número de los puntos comunes entre dos gráficas $y = f(x)$ y $y = a$)

Sea $f(x) = x^3 - 3x^2$

$y = x^3 - 3x^2$

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗



Valores de a	Número de distintas soluciones reales
$a < -4$	1
$a = -4$	2
$-4 < a < 0$	3
$a = 0$	2
$0 < a$	1

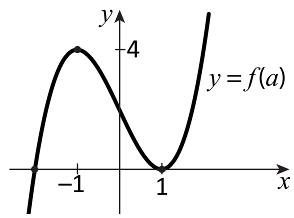
Ejercicio 2.11. Investigue la relación entre el valor de a y el número de distintas soluciones reales de la ecuación:
a) $x^3 + 6x^2 - a = 0$ b) $x^3 - 6x^2 - 15x - a = 0$ c) $x^3 - 9x^2 + 15x + a = 0$ d) $x^3 + 6x^2 + 9x + a = 0$

Clase 10. Aplicación a la demostración de inecuación

Ejemplo 2.13. Demuestre que $x^3 - 3x + 2 > 0$ en $(1, \infty)$.
Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$$

x		-1		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗



Se puede omitir la parte que corresponde a $(-\infty, 1)$.

De la gráfica se sabe que $x^3 - 3x + 2 > 0$ en $(1, \infty)$.

Ejercicio 2.12. Demuestre la inecuación en el intervalo dado.
a) $x^3 - 6x^2 + 32 > 0$ en $(4, \infty)$ b) $x^3 + 9x^2 + 15x > -7$ en $(-1, \infty)$
c) $2x^3 + 15x^2 + 36x < -27$ en $(-\infty, -3)$ d) $2x^3 - 3x^2 - 36x < 44$ en $(-\infty, -2)$

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la tangente de la gráfica en el punto P. Clase 1
   a) $y = 2x^2 - 4x + 1$, P(2,1) b) $y = -2x^2 + 5x - 2$, P(−1, −9)
   c) $y = 2x^3 - 4x$, P(1, −2) d) $y = -2x^3 - 4x + 5$, P(0, 5)
2. Encuentre la tangente de la gráfica que pasa por el punto Q, fuera de la gráfica.
   a) $y = 2x^2 + x$, Q(1, −5) b) $y = -2x^2 + x$, Q(2, −4)
   c) $y = -x^2 - 2x + 1$, Q(1, 2) d) $y = x^2 + 4x - 2$, Q(3, −6)
3. Haga la gráfica teniendo los extremos relativos en cuenta. Clase 4 y 5
   a) $y = -2x^3 + 3x^2 + 36x$ b) $y = -x^3 - 6x^2 + 15x + 50$
   c) $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x$ d) $y = -4x^3 + 9x^2 + 12x$
   e) $y = -x^3 - 2x + 1$ f) $y = -x^3 + 6x^2 - 12x - 3$
4. Encuentre el máximo y el mínimo en cada intervalo indicado. Clase 6
   a) $y = x^3 - 3x$, 1) $[-2, 2]$ 2) $[-2, 1]$ 3) $[-3, 0]$
   b) $y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 5$, 1) $[0, 8]$ 2) $(0,7)$ 3) $[-1, 5)$
5. Encuentre el número de distintas soluciones reales. Clase 8
   a) $2x^3 - 9x^2 - 10 = 0$ b) $x^3 - 12x - 16 = 0$
6. Investigue el número de distintas soluciones reales cuando el valor del número real a varía. Clase 9
   $4x^3 - 9x^2 + 6x - 3 + a = 0$
7. Demuestre la inecuación. Clase 10
   $2x^3 + 5 \geq 3x^2 + 36x$ si $x \geq 5$

Lección 3. Integrales

Clase 1. Integral indefinida

La Figura 3.1 muestra el conjunto de las funciones cuya derivada es $2x$.

Todas las funciones tienen la forma:

$$x^2 + C; \qquad C\text{: constante}$$

(Demostración: sea $F'(x) = 2x$.
Entonces $\{F(x) - 2x\}' = 0$.
De la nota en Clase 1.3, se sabe que $F(x) - x^2 = C$)

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \\ x^2 - 2 \\ x^2 - 1 \\ x^2 \\ x^2 + 1 \\ x^2 + \frac{3}{2} \\ x^2 + \pi \\ \vdots \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Diferenciar}} 2x$$

Figura 3.1

A la función $x^2 + C$ se le denomina **función primitiva** de $2x$ y se denota mediante $\int 2x\,dx$, es decir:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Generalmente si $F'(x) = f(x)$, se le llama a $F(x)$ función primitiva de $f(x)$.
A una función $f(x)$ corresponde varias funciones y todas tienen la forma:

$$F(x) + C \qquad (C\text{: constante}).$$

Para representar la función primitiva de $f(x)$ en general se utiliza la notación $\int f(x)\,dx$.

En resumen:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff F'(x) = f(x)$$

Función primitiva de potencia de x

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Demostración: $\left(\dfrac{1}{n+1}\,x^{n+1}\right)' = \dfrac{n+1}{n+1}x^{(n+1)-1} = x^n$

Ejercicios 3.1. Calcule.

a) $\int dx$ b) $\int x\,dx$ c) $\int x^2\,dx$ d) $\int x^3\,dx$

Se llama también antiderivada.
Encontrar la función primitiva es lo que se dice **integrar.**
A la constante C se le denomina **constante de integración**.

A $\int f(x)\,dx$ se le llama **integral indefinida**.
A $f(x)$ se le denomina integrando.

En a) en lugar de $\int 1dx$ se escribe $\int dx$.

Clase 2. Propiedad de la integral indefinida

Propiedad de integral indefinida

$\int 0dx = C$

$\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$ $\quad$ k: constate

$\int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$\int \{f(x) - g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Demostración: Al derivar ambos lados utilizando la propiedad de derivada (Clase 1.3) se obtiene las mismas funciones.

En la igualdad que contiene integral indefinida, se entiende que ambos lados coinciden cuando se toman valores de constante de integral adecuadamente.

No es necesario utilizar diferentes constantes para cada integral indefinida. Basta uno.

Ejemplo 3.1. Calcule: $\int (x^2 - 3x + 4)dx$.

Solución: $\int (x^2 - 3x + 4)dx$

$= \int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 4\int dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$ $\quad$ (C: constante de integración)

Ejercicio 3.2. Calcule.

a) $\int (x^2 - 5x + 3)dx$ $\quad$ b) $\int (3x^2 - 4x - 1)dx$

c) $\int (x^3 - 2x^2 + 5)dx$ $\quad$ d) $\int (-6x^2 + 8x - 5)dx$

Ejemplo 3.2. Calcule: $\int (x + 2)(2x - 1)dx$.

Solución: $\int (x + 2)(2x - 1)dx = \int (2x^2 + 3x - 2)dx$

$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$ $\quad$ (C: constante de integración)

Primero desarrolle el integrando.

Ejercicio 3.3. Calcule.

a) $\int (x - 3)(2x + 1)dx$ $\quad$ b) $\int (3x + 1)(3x - 1)dx$

c) $\int (2x + 3)(3x - 1)dx$ $\quad$ d) $\int (3x - 2)(3x + 4)dx$

Ejemplo 3.3. Calcule: $\int xt\,dt$.

Solución: $\int xt\,dt = x\int t\,dt = x\left(\frac{1}{2}t^2 + C\right)$

$= \frac{1}{2}x\,t^2 + C'$ $\quad$ (C': Constante de integración)

Nota: Como xC es un constante, es mejor utilizar signo más sencillo: C'.

dt significa integrar con respecto a la variable t. Se considera constante la variable x.

Ejercicio 3.4. Calcule.

a) $\int 3t^2\,dt$ $\quad$ b) $\int gt\,dt$ $\quad$ c) $\int 4\pi r^2\,dr$ $\quad$ d) $\int xy^2 z\,dy$

*** Ejemplo 3.4.** Encuentre la función $F(x)$ que satisface:

$F'(x) = 4x - 5, \quad F(1) = 2.$

Solución: $F(x) = \int (4x - 5)dx = 2x^2 - 5x + C$

Sustituyendo $x = 1$ en ambos lados, se tiene que: $2 = C - 3$, $C = 5$.

Luego $F(x) = 2x^2 - 5x + 5$ $\quad$ (Respuesta)

*** Ejercicio 3.5.** Encuentre la función $F(x)$ que satisface:

a) $F'(x) = 2x + 1 \quad F(0) = 3$ $\quad$ b) $F'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad F(1) = -2$

Clase 3. Integral definida

Sea $F'(x) = f(x)$. Sean a y b dos números.
Al valor $F(b) - F(a)$ se le denomina **integral definida** de $f(x)$ y se denota mediante $\int_a^b f(x)\,dx$.
Al mismo tiempo se representa la diferencia $F(b) - F(a)$ por $[F(x)]_a^b$.
Si $G(x)$ es otra función primitiva de $f(x)$, entonces existe una constante C tal que $G(x) = F(x) + C$.
Por lo tanto:

$$[G(x)]_a^b = [F(x) + C]_a^b = \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\} = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

y este valor no depende de la selección de la función primitiva.
En resumen se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{donde} \quad F'(x) = f(x)$$

Se supone que el dominio de $f(x)$ contiene el intervalo $[a, b]$ o $[b, a]$.

A la constante b se le denomina límite superior y la constate a límite inferior.

Ejemplo 3.5. Calcule: $\int_1^2 3x^2\,dx$.

Solución: $\int_1^2 3x^2\,dx = [x^3]_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7$

Ejercicio 3.6. Calcule.

a) $\int_1^3 2x\,dx$ b) $\int_0^1 4x^3\,dx$ c) $\int_2^5 dx$ d) $\int_1^{-2} 4x\,dx$

El límite superior no necesariamente mayor que el límite inferior.

Propiedades de la integral definida I

a) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

c) $\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Demostración: Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = G(x)$,
Entonces $k\,F(x)$, $F(x) + G(x)$ y $F(x) - G(x)$ son funciones primitivas de $k\,f(x)$, $f(x) + g(x)$ y $f(x) - g(x)$, respectivamente (Clase 1.3)
La conclusión sale de este hecho y la definición de la integral definida.

a) Por ejemplo

$$\int_a^b kf(x)\,dx = [kF(x)]_a^b$$
$$= kF(b) - kF(a)$$
$$= k\{F(b) - F(a)\}$$
$$= k[F(x)]_a^b$$
$$= k\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 3.6. Calcule $\int_1^3 (2x^3 - 4x + 6)\,dx$.

Solución: $\int_1^3 (2x^3 - 4x + 6)\,dx = 2\int_1^3 x^3\,dx - 4\int_1^3 x\,dx + 6\int_1^3 dx$

$= 2 \cdot \frac{1}{4}[x^4]_1^3 - 4 \cdot \frac{1}{2}[x^2]_1^3 + 6[x]_1^3$

$= \frac{1}{2}(3^4 - 1^4) - 2[3^2 - 1^2] + 6(3 - 1) = 40 - 16 + 12 = 36$

Aplicando la propiedad se calcula por termino.

Es mejor poner coeficientes fuera de corchetes.

Ejercicio 3.7. Calcule.

a) $\int_1^2 (3x^3 - 2x + 1)\,dx$ b) $\int_0^3 (x^2 + 4x - 1)\,dx$

c) $\int_{-1}^2 (x^2 - 6x - 2)\,dx$ d) $\int_{-2}^0 (-4x^2 - 3x - 2)\,dx$

Clase 4. Propiedad de integral definida

Propiedades de la integral definida 2

d) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

e) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

f) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

En f) los integrandos deben ser iguales.
En f) b no está necesariamente entre a y c.

Demostración: Sea que $F'(x) = f(x)$.

d) $\int_a^a f(x)\,dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$

e) $\int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -\{F(b) - F(a)\}$

$= -[F(x)]_a^b = -\int_a^b f(x)\,dx$

f) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c$

$= \{F(b) - F(a)\} + \{F(c) - F(b)\} = F(c) - F(a) = [F(x)]_c^a = \int_c^a f(x)\,dx$

Ejemplo 3.7. Calcule: $\int_1^3 (x^2 - 2x - 1)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 1)\,dx$

Aplique propiedad f).

Solución: $\int_1^3 (x^2 - 2x - 1)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 1)\,dx$

$= \int_1^4 (x^2 - 2x - 1)\,dx = \frac{1}{3}[x^3]_1^4 - [x^2]_1^4 - [x]_1^4$

$= \frac{1}{3}(4^3 - 1^3) - (4^2 - 1^2) - (4 - 1) = 21 - 15 - 3 = 3$

Ejercicio 3.8. Calcule.

a) $\int_0^2 (-x^2 + 4x + 2)\,dx + \int_2^3 (-x^2 + 4x + 2)\,dx$

b) $\int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 2)\,dx + \int_1^2 (x^2 - 2x + 2)\,dx$

Ejercicio 3.9. Demuestre.

Aplique e); luego f).

a) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

b) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$

Ejercicio 3.10. Calcule.

a) $\int_2^4 (3x^2 - 2x + 1)\,dx - \int_1^4 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$

b) $\int_{-1}^3 (x^2 + 4x - 1)\,dx - \int_{-1}^0 (x^2 + 4x - 1)\,dx$

Clase 5. Integral definida y derivación

Si $F'(x) = f(x)$ entonces $F'(t) = f(t)$.

Por lo tanto, para un número real a,

$$\int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$$

es una función de x.

Derivando ambos lados con respecto a x, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \{F(x) - F(a)\}' = F'(x) = f(x).$$

$F'(x)$ es una derivada con respecto a x.
$F'(t)$ es una derivada con respecto a t.

Relación entre integral definida y derivación

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Se le denomina a este resultado Teorema fundamental del cálculo infinitesimal, pero con diferente definición de la integral definida.

Ejemplo 3.8. Calcule: $\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(3t^2 - 2t + 1)\,dt$.

Solución: $\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(3t^2 - 2t + 1)\,dt = 3x^2 - 2x + 1$

Ejercicio 3.11. Calcule.

a) $\frac{d}{dx}\int_1^x (t^2 + 3t + 3)\,dt$ b) $\frac{d}{dx}\int_{-2}^x (t^2 + t - 3)\,dt$

c) $\frac{d}{ds}\int_1^s (x + 3)\,dt$ d) $\frac{d}{dx}\int_x^1 (t^2 - t)\,dt$

En d) aplique Clase 4 e).

Ejemplo 3.9. Encuentre la función $f(x)$ y el número real a, que satisfacen:

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^2 + 3x - 4.$$

Solución: Derivando ambos lados con respecto a x,
se tiene que $f(x) = 2x + 3$.

Sustituyendo $x = a$ en ambos lados, se tiene que:
$0 = a^2 + 3a - 4$, $(a + 4)(a - 1) = 0$, $a = -4, 1$
Respuesta: $f(x) = 2x + 3$, $a = -4, 1$

$\int_a^x f(t)\,dt = 0$ (Clase 4 d)

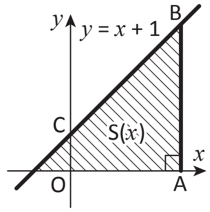
Ejercicio 3.12. Encuentre $f(x)$ y a.

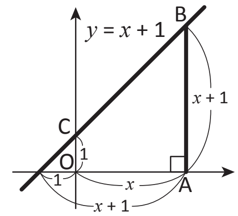
a) $\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - 3x + 2$ b) $\int_a^x f(t)\,dt = -x^2 + 2x + 3$

c) $\int_a^x f(t)\,dt = 2x^2 - 3x + 1$ d) $\int_a^x f(t)\,dt = -2x^2 + x + 6$

Clase 6. Integral definida y área

Ejemplo 3.10. En la figura, la ecuación de la recta BC es $y = x + 1$. Sea $(x, 0)$ las coordenadas del punto A donde $x > 0$.





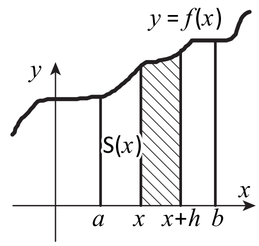
a) Exprese AB con x.
b) Sea $S(x)$ área del trapecio OABC. Exprese $S(x)$ con x.
c) Encuentre $S'(x)$.

Solución: a) AB = (la coordenada y del punto B) = $x + 1$

b) $S(x) = \dfrac{1}{2}$ (0C + AB) · 0A = $\dfrac{1}{2}\{1 + (x + 1)\}x = \dfrac{1}{2}x^2 + x$

c) $S'(x) = x + 1$

En este ejemplo $S'(x)$ = (la ecuación de la gráfica).
Esta relación se verifica con cualquier función continua como la siguiente:



Sea a y b dos números reales tal que $a < b$.
Sea $f(x)$ una función continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$.
Sea S(x) el área de la parte delimitada por $y = f(x)$, el eje x y las rectas paralelas al eje y y que pasan por $(a, 0)$ y $(x, 0)$ donde $a < x < b$.

Sea h un número positivo tal que $x + h < b$.
Sea M_h el máximo y m_h el mínimo de $f(x)$ en $[x, x + h]$. Entonces el área de la parte sombreada, se tiene que:

$$h \cdot m_h \leq S(x + h) - S(x) \leq h \cdot M_h.$$

Como $h > 0$, se tiene que: $m_h \leq \dfrac{S(x + h) - S(x)}{h} \leq M_h$.

Como $\lim\limits_{h \to 0^+} M_h = \lim\limits_{h \to 0^+} m_h = f(x)$, se tiene que: $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{S(x + h) - S(x)}{h} = f(x)$.

De la misma manera se verifica $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{S(x + h) - S(x)}{h} = f(x)$.

Luego $S'(x) = f(x)$.

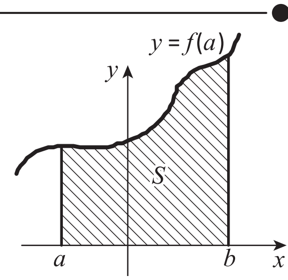
Por lo tanto, se tiene que $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt + C$.

Como $\lim\limits_{x \to a^+} S(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a^+} \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = 0$, se tiene que $C = 0$.
Sea S el área de la parte rodeada por $y = f(x)$, el eje x, las rectas $x = a$ y $x = b$.

Como $\lim\limits_{x \to b^-} S(x) = S$ y $\lim\limits_{x \to b^-} \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)$, se tiene lo siguiente:

Si $f(x)$ es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces el área S de la parte sombreada es:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

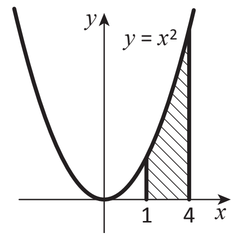


La función $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ es derivable, por lo tanto, continua (Clase 1.2).
Luego, $\lim\limits_{x \to a^+} \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

Es esencial que la parte sombreada este por encima del eje x.

Clase 7. Cálculo de área

Ejemplo 3.11. Encuentre el área de la parte sombreada.

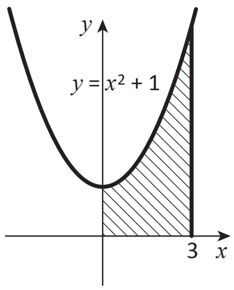


Solución: Como la parte está por encima del eje x,

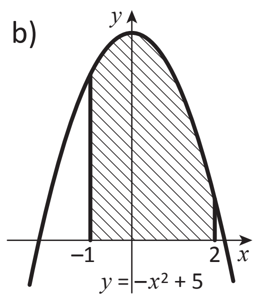
$$\int_1^4 x^2\, dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^4 = 21$$

Ejercicio 3.13. Encuentre el área S de la parte sombreada.

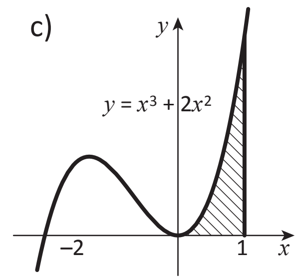
a)



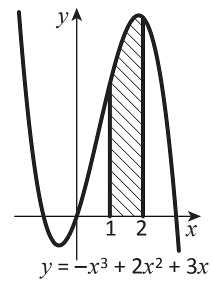
b)



c)



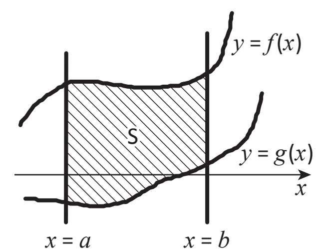
d)



Clase 8. Área de la parte comprendida entre dos gráficos

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a, b]$ tal que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$.
El área S de la parte delimitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$ es:

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx\,.$$

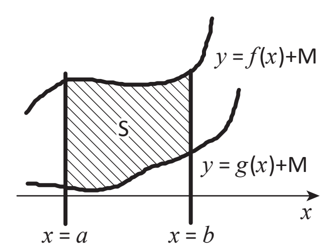


Es esencial que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$

Demostración: Sea M un número tal que $g(x) + M \geq 0$ en $[a, b]$.
Sea S_1 el área de la parte delimitada por $y = f(x) + M$, el eje x, $x = a$ y $x = b$.
Sea S_2 el área de la parte delimitada por $y = g(x) + M$, el eje x, $x = a$ y $x = b$.
Entonces, se tiene que:

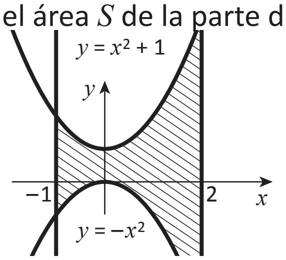
$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b \{f(x) + M\}dx - \int_a^b \{g(x) + M\}dx$$

$$= \int_a^b [\{f(x) + M\} - \{g(x) + M\}]dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$



Ejemplo 3.12.
a) Haga la gráfica de las siguientes cuatro líneas: $y = x^2 + 1$, $y = -x^2$, $x = -1$, $x = 2$
b) Encuentre el área S de la parte delimitada por las líneas dadas.

Solución: a)



b) Como $-x^2 \leq x^2 + 1$ en $[-1, 2]$,

$$S = \int_{-1}^{2} \{(x^2 + 1) - (-x^2)\}dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (2x^2 + 1)dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{2} + \left[x\right]_{-1}^{2} = 6 + 3 = 9$$

Lo importante es saber qué gráfica está por encima de la otra.

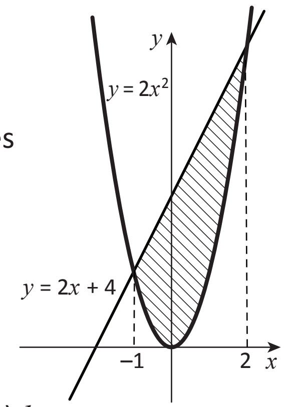
*** Ejercicio 3.14.** Haga la gráfica de las cuatro líneas y encuentre el área S de la parte delimitada por las líneas.

a) $y = x^2 + 1$, $y = 2x - 2$, $x = -2$, $x = 1$
b) $y = -x^2$, $y = -2x + 2$, $x = -1$, $x = 2$
c) $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 2$
d) $y = x^2 - 4$, $y = -x^2 + 4$, $x = -1$, $x = 1$

Clase 9. Área de la parte delimitada por dos líneas

Ejemplo 3.13. Encuentre el área S de la parte delimitada por dos líneas $y = 2x^2$ y $y = 2x + 4$.

Primero haga la gráfica.



Solución: Las coordenadas x de los puntos comunes de ambas líneas son las soluciones de la ecuación
$2x^2 = 2x + 4$;
$2x^2 - 2x - 4 = 0, \quad x^2 - x - 2 = 0$
$(x - 2)(x + 1) = 0, \; x = 2, -1$

Como $2x^2 \leq 2x + 4$ en $[-1, 2]$.

$$S = \int_{-1}^{2} \{(2x + 4) - 2x^2\}dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx$$
$$= -\frac{2}{3}[x^3]_{-1}^{2} + [x^2]_{-1}^{2} + 4[x]_{-1}^{2} = -6 + 3 + 12 = 9$$

La parte en cuestión está delimitada por
$y = 2x^2, \; y = 2x + 4,$
$x = -1$ y $x = 2.$
Por lo tanto, se aplica la fórmula de Clase 8.

Ejercicio 3.15. Encuentre el área S de la parte delimitada por las dos líneas.

a) $y = 2x^2 - 4, \; y = -2x$ b) $y = x^2 - 9, \; y = 0$

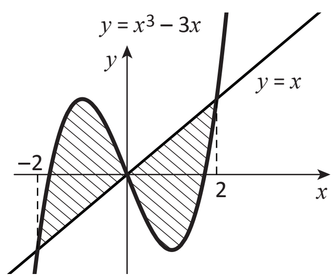
c) $y = -x^2 + 4, \; y = -2x - 4$ d) $y = -x^2, \; y = x - 6$

*** Ejemplo 3.14.** Encuentre el área S de la parte delimitada por $y = x^3 - 3x$ y $y = x$.

Lo importante es la relación entre las dos gráficas.

Solución: Las coordenadas x de los puntos comunes de las líneas:

$x^3 - 3x = x, \quad x^3 - 4x = 0.$
$x(x + 2)(x - 2) = 0,$
$x = -2, 0, 2$



En $[-2, 0]$ $x \leq x^3 - 3x$

En $[0, 2]$ $x^3 - 3x \leq x$

$$S = \int_{-2}^{0} \{(x^3 - 3x) - x\}\,dx + \int_{0}^{2} \{x - (x^3 - 3x)\}dx$$
$$= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2} (4x - x^3)dx$$
$$= \frac{1}{4}[x^4]_{-2}^{0} - 2[x^2]_{-2}^{0} + 2[x^2]_{0}^{2} - \frac{1}{4}[x^4]_{0}^{2}$$
$$= -4 + 8 + 8 - 4 = 8$$

*** Ejercicio 3.16.** Encuentre el área S de la parte delimitada.

a) $y = x^3 + 6x^2, \; y = 7x$ b) $y = x^3 - 6x^2, \; y = 0$

Ejercicios de la lección

1. Calcule. Sea C el constante de integración. Clase 2
   a) $\int (x^2 - 4x + 5)dx$
   b) $\int (-2x^3 + 5x + 4)dx$
   c) $\int (x-1)(x^2 + x + 1)dx$
   d) $\int (3t + 2)(t-1)dt$

2. Encuentre la función $F(x)$ que satisface: Clase 2
   $F'(x) = x^2 - x + 1, \quad F(-1) = 2.$

3. Calcule. Clase 3
   a) $\int_{-2}^{1} (x-3)(x+1)\,dx$
   b) $\int_{0}^{-3} (3x-1)(x+1)\,dx$
   c) $\int_{-1}^{3} (x-2)(x+2)\,dx$

4. Calcule. Clase 4
   a) $\int_{-1}^{3} (t-1)(t+2)\,dt - \int_{-1}^{2} (t-1)(t+2)\,dt$
   b) $\int_{4}^{2} (x^2 - x)\,dx - \int_{3}^{2} (x^2 - x)\,dx$

5. Encuentre $f(x)$ y constante a que satisfacen: Clase 5
   a) $\int_{a}^{x} f(t)\,dt = 3x^2 + 2x - 1$
   b) $\int_{x}^{a} f(t)\,dt = x^2 - 4x + 4$

   Encuentre el área S delimitada con las líneas.

6. a) $y = -x^2 + 4, \quad x = -1, \quad x = 2, \quad y = 0$ Clase 7
   b) $y = x^3, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0$

7. a) $y = x^2 - 4x$, $y = x^3$, $x = 1$, $x = 2$ Clase 8
   b) $y = x^2 - 4$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$
   c) $y = -x^2 + 2x$, $y = -2x + 3$, $x = 0$, $x = 2$

8. a) $y = x^2 + 2x$, $y = -x^2 - x + 2$ Clase 9
   b) $y = 2x^2$, $y = x^2 - 2x + 3$

Problemas de la Unidad A

1. Sea n un número entero no negativo. Demuestre:
   a) $\int_{-a}^{a} x^{2n}dx = 2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$
   b) $\int_{-a}^{a} x^{2n+1}dx = 0$

2. Demuestre que $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$.

3. Haga la gráfica de $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2$.

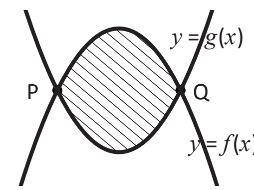
Problemas de la Unidad B

1. Si dos gráficas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ tienen puntos comunes P(α, $f(\alpha)$) y Q(β, $f(\beta)$), donde $\alpha < \beta$ y si:

$$f(x) - g(x) = ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{en } [\alpha, \beta],$$

   entonces el área S de la parte delimitada por las dos gráficas es:
   $S = -\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$.

   Demuéstrelo utilizando Problema de la Unidad A2



Con este resultado se calcula el área de la parte delimitada por parábola y la recta o por dos parábolas.

Aplique Problema de la Unidad B 1.

2. La recta $y = ax$ divide en dos partes de la misma área la parte delimitada por

$$y = x^2 - 2x \quad \text{y} \quad y = 0.$$

   Encuentre el valor de a.

3. a) Encuentre las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ que satisfacen lo siguiente:

$$|x^2 - 3x| = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < 0 \\ g(x) & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ h(x) & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

   b) Calcule $\int_{-2}^{4} |x^2 - 3x|\,dx$.

4. Encuentre la función $f(x)$ que satisface

$$f(x) = x + \int_{0}^{2} f(t)\,dt$$

$\int_{0}^{2} f(t)\,dt$ es una constante.

Matemáticas IV

Unidad IV

Derivadas de funciones trascendentales

- Lección 1: Derivación
- Lección 2: Derivada de funciones trascendentales
- Lección 3: Aplicación de la derivada

Algo de historia

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716)

Leibniz fue un filósofo matemático alemán. Nació el 1 de julio de 1646 en Leipzig, Alemania. Estudió en la Universidad de Leipzig, Yena y Altdorf. Su trabajo abarca una amplia gamas de ciencias y filosofía. Su Characteristica Universalis (Característica Universal) es un ejemplo típico. En 1675 descubrió el cálculo diferencial independientemente de Newton, no publicó su estudio hasta más tarde, las ideas y notaciones de Leibniz se difundieron durante 1677 y 1704 en Europa.

Leidniz también es conocido por el invento que hizo en 1672 de una máquina de calcular capaz de multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas.

Leibniz falleció el 14 de noviembre de 1716 en Hannover.

Fuente: E. T. Bell: Men of mathematics

Lección 1. Derivación

Clase 1. Función inversa

Definición 1.1 Función inversa
Sea $y = f(x)$ una función con el dominio D y el rango R. Se supone lo siguiente:

A cualquier $y \in$ R, existe un único $x \in$ D tal que $f(x) = y$.

Entonces se le denomina función inversa de f la correspondencia de y a x y se le denota mediante $x = f^{-1}(y)$.

Por la definición existe la relación

$$\boxed{b = f(a) \;\Leftrightarrow\; a = f^{-1}(b)}$$

Ejemplo 1.1. Sea $f(x) = x^2$. Si se toma el intervalo $[0, \infty)$ como el dominio de $f(x)$, encuentre los siguientes:

a) rango de $f(x)$ b) $f^{-1}(x)$.

Solución: a) $[0, \infty)$ b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Ejercicio 1.1. En el Ejemplo 1.1, si se toma el intervalo $(-\infty, 0]$ como el dominio de $f(x)$, encuentre los siguientes:

a) rango de $f(x)$ b) $f^{-1}(x)$.

[A] Definición.

Se aprendió funciones trigonométricas inversas en la Unidad I.

El dominio de f^{-1} es R y el rango es D.

Como por lo general se utiliza la letra x para representar el elemento del dominio, se denota por

$y = f^{-1}(x)$

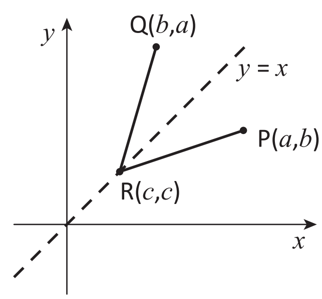
Puntos simétricos con respecto a la recta $y = x$.
Los puntos P(a, b) y Q(b, a) son simétricos con respecto a la recta $y = x$

* Demostración: Sea R(c, c) cualquier punto en la recta $y = x$.

$$\text{RP} = \sqrt{(c-a)^2 + (c-b)^2} \text{ y RQ} = \sqrt{(c-b)^2 + (c-a)^2}.$$

Por lo tanto, RP = RQ, lo que significa que R está en la mediatriz del segmento PQ, es decir, la recta $y = x$ es la mediatriz del segmento PQ.
Luego P y Q son simétricos con respecto a la recta $y = x$.

[B] Gráfica.

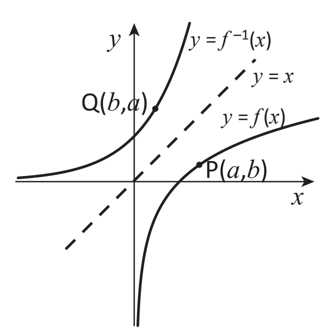


La gráfica de la función inversa.
Las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f^{-1}(x)$ son simétricas con respecto a $y = x$

Demostración: sean C y C' las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f^{-1}(x)$ respectivamente.
Se tiene que:

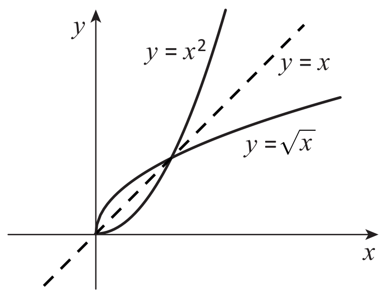
$$\text{P}(a, b) \in \text{C} \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow \text{Q}(b, a) \in \text{C'}$$

y que P(a, b) y Q(b, a) son simétricas con respecto a $y = x$.



Ejemplo 1.2. Haga la gráfica de la función $y = f^{-1}(x)$ del Ejemplo 1.1.

Solución:



Ejercicio 1.2. Haga la gráfica de la función $y = f^{-1}(x)$ del Ejercicio 1,1.

Primero dibuje la gráfica de $y = f(x)$.

Clase 2. Función compuesta

Ejemplo 1.3. Sustituye $u = x + 1$ en $y = u^2$ y exprese y con x.

Solución: $y = u^2 = (x + 1)^2$

Como en el Ejemplo 1.3, se puede componer dos funciones.

Definición 1.2 Función compuesta

Sea $u = f(x)$ una función con el dominio D y el rango S.

Sea $y = g(u)$ una función con el dominio T y el rango R. Se supone que $S \subset T$. Entonces se puede sustituir $u = f(x)$ en $y = g(u)$: $y = g(f(x))$.

A esta función se le denomina la función compuesta de $u = f(x)$ y $y = g(u)$ y se denota mediante $g \circ f$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & u \arrow[r, "g"] & y \end{tikzcd}$$

También se le llama **composición** de f y g.

No confunda $g \circ f$ con $g(x)\ f(x)$, que es el producto de dos funciones.

En resumen:

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

Ejercicio 1.3. Encuentre la composición $g \circ f$ de $u = f(x)$ y $y = g(u)$.

a) $f(x) = x - 2,\quad g(u) = 3u$ b) $f(x) = x + 3,\quad g(u) = \text{sen}\, 2u$

c) $f(x) = \cos x,\quad g(u) = 4u^3 - u^2$ d) $f(x) = 2^x,\quad g(u) = 3u^2$

Con la notación de la función compuesta, se tiene que:

$$\boxed{(f \circ f^{-1})(x) = x, \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x}$$

Clase 3. Derivada del producto de funciones

Derivada del producto

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables.

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Demostración

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Está transformación es a veces eficaz en el cálculo infinitesimal.

Ejemplo 1.4. Calcule: $\{(x^2+3)(3x-1)\}'$

Solución: $\{(x^2+3)(3x-1)\}' = (x^2+3)'\,(3x-1) + (x^2+3)\,(3x-1)'$

$= 2x(3x-1) + (x^2+3)\cdot 3 = 9x^2 - 2x + 9$

Por supuesto que también se puede calcular después del desarrollo.

Ejercicio 1.4. Calcule utilizando la fórmula anterior.

a) $\{(x^2-5x)(4x+1)\}'$ b) $\{(3x^2+1)(x^2-x\}'$

c) $\{(x^3-x+1)(x^2+3)\}'$ d) $\{(x^3-2x)(x^3+1)\}'$

*** Ejercicio 1.5.** Sean f,g y h derivables. Demuestre que

$$\{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)\,g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

Considere fgh como el producto de f y gh.

Clase 4. Derivada del cociente

Sean $f(x)$ y $g(x)$ derivables, donde $g(x) \neq 0$. Se tiene que:

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}. \qquad \text{En particular} \qquad \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

Demostración:

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right\} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{-1}{g(x+h)g(x)} = g'(x)\cdot\frac{-1}{\{g(x)\}^2} = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

Ejemplo 1.5. Calcule: $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'$.

Solución: $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \frac{(x^2+1)'x-(x^2+1)(x)'}{x^2} = \frac{2x\cdot x-(x^2+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

Nota: Otra forma es:

$$\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \left(x+\frac{1}{x}\right)' = (x)'+\left(\frac{1}{x}\right)' = 1-\frac{1}{x^2}\ \left(=\frac{x^2-1}{x^2}\right)$$

$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)'$

$= -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2}$

$= -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}$

$= (-n)\,x^{-n-1}$

Ejercicio 1.6. Calcule la derivada

a) $\frac{3x+1}{x^2}$ b) $\frac{x^2+1}{x+1}$ c) $\frac{x-3}{x^2+1}$ d) $\frac{1}{x^2+x+1}$

Clase 5. Derivada de la función compuesta

Sean $u=f(x)$ y $y=g(x)$ funciones derivables donde el dominio de g contiene el rango de f.
Entonces se tiene lo siguiente:

$$\boxed{g\circ f \text{ es derivable y } \{(g\circ f)(x)\}' = g'(f(x))f'(x)}$$

Otra notación:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

* Explicación: $\{(g\circ f)(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h)-f(x))}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \dots\ (1)$$

Sean $f(x)=u$ y $f(x+h)-f(x)=l$.

Una funcion derivable es continua (Véase Unidad III Clase 1.2).
Por lo tanto, $\lim_{h\to 0} l = 0$ y

$(1) = \lim_{l\to 0}\frac{g(u+l)-g(u)}{l}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g'(u)f'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Lo anterior no es una demostración, porque l puede ser 0, por lo tanto la expresión $\frac{g(u+l)-g(u)}{l}$ puede perder el sentido.

Se omite la demostración rigurosa.

Ejemplo 1.6. Calcule: $\{(2x^2+3)^4\}'$
Solución: Sean $u=f(x)=2x^2+3$ y $y=g(u)=u^4$.
Se tiene que $(2x^2+3)^4=(g\circ f)(x)$. Por lo tanto

$\{(2x^2+3)^4\}' = g'(f(x))f'(x) = (u^4)'(2x^2+3)'$

$= 4u^3\cdot 4x = 16x(2x^2+3)^3$.

Después de entender la fórmula, basta escribir así: $\{(2x^2+3)^4\}'$
$= 4(2x^2+3)^3\,(2x^2+3)'$
$= 4(2x^2+3)^3\cdot 4x$
$= 16x(2x^2+3)^3$

Ejercicio 1.7. Calcule la derivada:

a) $(3x+4)^5$ b) $(2x^2-x)^4$ c) $(x^2-x+1)^3$ d) $(5x^2-x+1)^6$

Ejercicio 1.8. Demuestre lo siguiente:

$$\frac{d}{dx} f(ax+b) = af'(ax+b) \qquad (a \text{ y } b \text{ son constantes})$$

$$\frac{d}{dx} \{f(x)\}^n = n\{f(x)\}^{n-1} f'(x) \qquad (n \text{ es un número entero})$$

Son muy útiles estas fórmulas.

Ejercicio 1.9. Demuestre lo siguiente.
Sean $u = f(x)$, $v = g(u)$, $y = h(v)$ derivables.
Si la composición $h \circ g \circ f$ está definida, entonces verifique lo siguiente:

$$\{(h \circ g \circ f)(x)\}' = h'(g(f(x))) \; g'(f(x)) \; f'(x)$$

Considere $h \circ (g(f(x)))$.

Otra forma:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Clase 6. Derivada de la función inversa

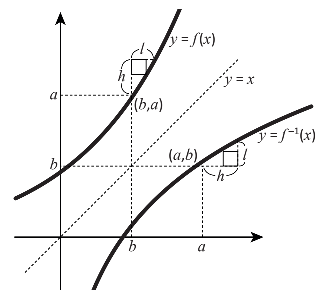
Sea $f(x)$ una función derivable que tiene su inversa.

Si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, entonces $f^{-1}(x)$ es derivable en x y $\{f^{-1}(x)\}' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Otra notación:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

*** Explicación:** Se omite la demostración de derivabilidad.
Si se conoce la derivabilidad, entonces derivando ambos lados de $f(f^{-1}(x)) = x$ por x, se tiene que $f'(f^{-1}(x))\,\{f^{-1}(x)\}' = 1$.

Luego $\{f^{-1}(x)\}' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.



$$\{f^{-1}(x)\}' = \lim_{h \to 0} \frac{l}{h}$$

$$\{f(f^{-1}(x)\}' = \lim_{l \to 0} \frac{h}{l}$$

Véase Ejemplo 1.1

Ejemplo 1.7. Sea $g(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$. Encuentre $g'(x)$ en $x > 0$.
Solución: Sea $f(x) = x^2$ $(x \geq 0)$. Entonces $g(x) = f^{-1}(x)$ y $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ cuando $x > 0$.
Por lo tanto, $g'(x) = \{f^{-1}(x)\}' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{2 \cdot f^{-1}(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

Ejercicio 1.10. Sea $h(x) = \sqrt[3]{x}$ en $(-\infty, \infty)$. Encuentre $h'(x)$ cuando $x \neq 0$.

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la función inversa $f^{-1}(x)$. — Clase 1
   a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = \log_2 x$ c) $f(x) = \text{sen}^{-1} x$
2. Encuentre la composición $g \circ f$ de $u = f(x)$ y $y = g(u)$. — Clase 2
   a) $f(x) = |x|$, $g(u) = \log_3 u$ b) $f(x) = x + 1$, $g(u) = \dfrac{1}{u}$
3. Calcule la derivada.
   a) $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$ b) $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ — Clase 3
   c) $\dfrac{x-1}{x^3+1}$ d) $(x^3+1)^5$ e) $\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ — Clase 4, Clase 5
4. Sea $g(x) = \sqrt{-x}$ $(x \leq 0)$. Encuentre $g'(x)$ en $x < 0$. — Clase 7

Lección 2. Derivadas de las funciones trascendentales

Clase 1. Derivada de funciones trigonométricas

$$\boxed{(\text{sen } x)' = \cos x}$$

Demostración: $(\text{sen } x)' = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\text{sen}(x+h)-\text{sen } x}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\{\text{sen } x\cos h + \cos x \text{ sen } h - \text{sen } x\}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\{\text{sen } x(\cos h - 1) + \cos x \text{ sen } h\}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\{-\text{sen } x\cdot\dfrac{\text{sen}^2 h}{\cos h+1} + \cos x \text{ sen } h\}$

$= \lim\limits_{h\to 0}(-\text{sen } x\cdot\dfrac{\text{sen } h}{\cos h+1}\cdot\dfrac{\text{sen } h}{h} + \cos x\cdot\dfrac{\text{sen } h}{h})$

$= -\text{sen } x\cdot 0\cdot 1 + \cos x\cdot 1 = \cos x.$

[A]

$\text{sen}(\alpha+\beta)$
$= \text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\text{ sen}\beta$
(Unidad I)

$\cos h - 1$
$= \dfrac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{\cos h+1}$
$= \dfrac{\cos^2 h-1}{\cos h+1} = -\dfrac{\text{sen}^2 h}{\cos h+1}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\text{sen} h}{h} = 1$
(Unidad II)

Ejemplo 2.1. Calcule: $(\text{sen } 2x)'$.

Solución: Sean $u = f(x) = 2x$ y $g(u) = \text{sen } u$. Se tiene que $\text{sen}2x = (g\circ f)(x)$.

Por lo tanto, $(\text{sen } 2x)' = g'(f(x))f'(x) = (\text{sen } u)'(2x)' = \cos u\cdot 2$

$= 2\cos 2x$.

Forma más abreviada:
$(\text{sen}2x)' = \cos 2x\cdot(2x)'$
$= 2\cos 2x$

Ejercicio 2.1. Calcule:

a) $(\text{sen } 3x)'$ b) $(\text{sen}^3 x)'$ c) $\left(\dfrac{1}{\text{sen } x}\right)'$ d) $(\text{sen}^4 3x)'$

$$\boxed{(\cos x)' = -\text{sen } x,\quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Demostración: Como $\cos x = \text{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, se tiene que:

$(\cos x)' = \left\{\text{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}' = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)' = -\text{sen } x$

$(\tan x)' = \left(\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\text{sen } x)'\cos x - \text{sen } x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\text{sen } x$

Ejemplo 2.2. Calcule. a) $(\cos 2x)'$ b) $(\tan^2 x)'$

Solución: a) $(\cos 2x)' = -\text{sen } 2x\cdot(2x)' = -2\text{ sen } 2x$

b) $(\tan^2 x)' = 2\tan x(\tan x)' = 2\tan x\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2\text{ sen } x}{\cos^3 x}$

Ejercicio 2.2. Calcule la derivada.

a) $\cos 3x$ b) $\tan 4x$ c) $\dfrac{1}{\cos x}$ d) $\dfrac{1}{\tan x}$

e) $\cos^2 3x$ f) $\tan^4 3x$

Clase 2. Derivada de funciones logarítmicas

La Tabla 1.1 muestra el valor de $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ en algunos valores de h. Como se parece, $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ existe.

Se omite demostración.

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$	h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
1	2		
0.1	2.593742…	– 0. 1	2.867971…
0.01	2.704813…	– 0. 01	2.731999…
0.001	2.716923…	– 0. 001	2,719642…

Tabla 1.1

[A] Base del logaritmo natural.

A este límite se le denomina **base de logaritmo natural** y se denota mediante e.

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

e = 2.718281…

Como 0 < $e \neq 1$, se puede usar e como base de logaritmo. Al $\log_e x$ se le llama **logaritmo natural** y a veces se denota madiante ln x.

[B] Derivada del logaritmo natural:
En la literatura más avanzada, se utiliza la notación log x.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Demostración: $(\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{h}{x}}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) \quad \text{…(1)}$$

$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$
$(a, b > 0)$

Ahora se pone $\frac{h}{x} = t$. Entonces $h \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$.

Por lo tanto (1) = $\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}$ … (2)

$t \ln a = \ln a^t \quad (a > 0)$

Como $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ y la función ln x es continua, (2) = $\frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$.

Ejemplo 2.3. Calcule: $\{\ln(x^2 + 1)\}'$.

Solución: $\{\ln(x^2+1)\}' = \frac{1}{(x^2+1)}\cdot(x^2+1)' = \frac{2x}{(x^2+1)}$

Ejercicio 2.3. Calcule la derivada.

a) $\ln(x^3 + x)$ b) $(\ln x)^3$ c) $\frac{1}{\ln x}$ d) $\ln\frac{1}{x}$

Clase 3. Derivada de funciones logarítmicas 2

Ejemplo 2.4. a) Exprese $\log_2 x$ con $\ln x$.
b) Calcule: $(\log_2 x)'$.

Solución: a) $\log_2 x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$

b) $(\log_2 x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right)' = \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln 2}$

En general se tiene que

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Demostración: $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Ejercicio 2.4. Calcule la derivada.

a) $\log_3 x$ b) $\log_5 (x^2 + 1)$ c) $(\log_{\frac{1}{2}} x)^3$ d) $(\log_{\frac{1}{3}} (x^4 + 1))^2$

$$\boxed{(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad \text{donde } x \neq 0}$$

Demostración: $|x| = \begin{cases} x & \text{cuando } x > 0 \\ -x & \text{cuando } x < 0. \end{cases}$

Caso 1: $x > 0$. Entonces la fórmula es idéntica a la de la Clase 2.

Caso 2: $x < 0$. $(\ln |x|)' = \{\ln (-x)\}' = \dfrac{1}{-x}(-x)'$

$= \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$

Ejemplo 2.5. Calcule; $(\ln |x - 1|)'$.

Solución: $(\ln |x - 1|)' = \dfrac{1}{x - 1} \cdot (x - 1)' = \dfrac{1}{x - 1}$

Ejercicio 2.5. Calcule.

a) $\ln |x + 3|$ b) $\ln |3x - 1|$ c) $\ln |\text{sen}\, x|$ d) $\ln |\tan x|$

Nota: De la misma manera se tiene en general lo siguiente:

Si $f(x)$ es derivable, entonces $\ln |f(x)|$ lo es también y

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

[A]

Utilice la fórmula del cambio de base.

Se pone ln2 después de x para no confundir con $\ln (2x)$.

Esta fórmula no es para memorizar.

Cuando se trata de estas funciones, se entiende que x no toma los valores que hacen el argumento 0 o negativo.

[B]

Clase 4. Derivada de funciones exponenciales

$$(e^x)' = e^x$$

Demostración: Sea $f(x) = \ln x$. Entonces $e^x = f^{-1}(x)$.
Como $f(x)$ es derivable, $f^{-1}(x)$ lo es también y se tiene que:

$$(e^x)' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{f^{-1}(x)}} = e^x$$

Ejemplo 2.6. Calcule: $(e^{3x})'$.

Solución: $(e^{3x})' = e^{3x}\,(3x)' = 3e^{3x}$

Ejercicio 2.6. Calcule la derivada.
a) e^{2x} b) e^{-4x} c) e^{x^2-x} d) $e^{\cos x}$

Nota: De la misma manera se tiene lo siguiente:

Si $f(x)$ es derivable, entonces $e^{f(x)}$ lo es y
$(e^{f(x)})' = f'(x)\,e^{f(x)}$.

Ejemplo 2.7. Calcule: $(3^x)'$.

Solución: Como $3 = e^{\ln 3}$ y $3^x = e^{x \ln 3}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}(3^x)' &= (e^{x\ln 3})' = e^{x \ln 3} \cdot (x \ln 3)' \\ &= 3^x \ln 3.\end{aligned}$$

Nota: De la misma manera se tiene que:

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (0 < a \neq 1)$$

Ejercicio 2.7. Calcule la derivada.
a) 2^x b) 5^x c) 3^{x^2} d) $7^{\operatorname{sen} x}$

Clase 5. Aplicación de la derivada de funciones exponenciales

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ donde $x > 0$, α es un número real.

Es la generalización de la fórmula $(x^n)' = nx^{n-1}$ donde $n \geq 0$ es entero.

Demostración: Como $x = e^{\ln x}$ y $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$, se tiene que:

$$(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Ejemplo 2.8. Calcule: $(x^{\sqrt{2}})'$, $(x > 0)$.

Solución: $(x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

Ejercicio 2.8. Calcule la derivada, $(x > 0)$.

a) $x^{\frac{1}{3}}$ b) $x^{-\frac{3}{4}}$ c) $x^{-\sqrt{2}}$ d) $(x^2+1)^{\sqrt{5}}$

Ejemplo 2.9. Encuentre la derivada aplicando la fórmula anterior en lugar de la derivada del cociente en:

$$\frac{1}{(x^2+1)^3}$$

Solución: $\left\{\frac{1}{(x^2+1)^3}\right\}' = \{(x^2+1)^{-3}\}' = -3(x^2+1)^{-4}(x^2+1)'$

$$= -6x(x^2+1)^{-4} \left(= -\frac{6x}{(x^2+1)^4}\right).$$

Compare:

$$-\frac{\{(x^2+1)^3\}'}{\{(x^2+1)^3\}^2}$$

$$= -\frac{3(x^2+1)^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^6}$$

$$= -\frac{6x}{(x^2+1)^4}$$

Ejercicio 2.9. Encuentre la derivada.

a) $\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$ b) $\frac{1}{x^{10}}$ c) $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

*** Ejemplo 2.10.** Calcule: $(x^{\operatorname{sen} x})'$ donde $x > 0$.

Solución: Si $x > 0$, entoces $x = e^{\ln x}$ y

$x^{\operatorname{sen} x} = e^{\ln x \cdot \operatorname{sen} x}$. Por lo tanto

$$(x^{\operatorname{sen} x})' = (e^{\ln x \cdot \operatorname{sen} x})' = e^{\ln x \cdot \operatorname{sen} x} (\ln x \cdot \operatorname{sen} x)'$$

$$= x^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \ln x \cos x\right)$$

*** Ejercicio 2.10.** Calcule la derivada.

a) $x^{\cos x}$ $(x > 0)$ b) $(x^2+1)^{\tan x}$ c) x^x $(x > 0)$ d) $x^{\ln x}$ $(x > 0)$

Clase 6. Derivadas de orden superior

Sea $f(x)$ una función derivable. Si $f'(x)$ es derivable, su derivada $(f'(x))'$ se le denomina la **segunda derivada** de $f(x)$ y se denota mediante $f''(x)$.

Es decir $f''(x) = (f'(x))'$. De igual manera se define la **tercera derivada** $f'''(x)$ y así sucesivamente.

Otras notaciones: $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$. Si $y = f(x)$, y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Ejemplo 2.11. Sea $f(x) = x^4$. Encuentre $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$.
Solución: $f'(x) = (x^4)' = 4x^3$; $f''(x) = (4x^3)' = 12x^2$;
$f'''(x) = (12x^2)' = 24x$

Ejercicio 2.11. Encuentre $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$
a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = e^x$ d) $f(x) = \ln x$

Generalmente a la función obtenida después de derivar n veces la función $f(x)$, se le denomina ***n*-ésima** derivada de $f(x)$ y se denota mediante $f^{(n)}(x)$.

$f^{(1)}(x) = f'(x)$
$f^{(2)}(x) = f''(x)$
$f^{(3)}(x) = f'''(x)$

Otras notaciones: $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$. Si $y = f(x)$, entonces $y^{(n)}$ y $\frac{d^ny}{dx^n}$ representan lo mismo.

Ejemplo 2.12. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Encuentre $f^{(4)}(x)$.
Solución: $f'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $f''(x) = (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$,
$f'''(x) = (-\operatorname{sen} x)' = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = \operatorname{sen} x$ (Respuesta).

Ejercicio 2.12. Encuentre la derivada del orden superior que se pide.
a) $f(x) = \cos x$, $f^{(4)}(x)$ b) $f(x) = xe^x$, $f^{(5)}(x)$
c) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$, $f^{(4)}(x)$

Ejercicios de la lección

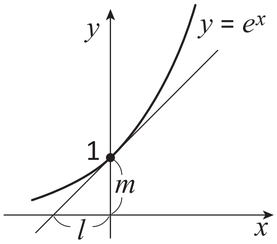
1. Calcule la derivada.
 a) $\cos^{-2} x$ b) $\operatorname{sen} x \cos 2x$ c) $\operatorname{sen}(\cos x)$ — Clase 1
 d) $\ln(\operatorname{sen} x)$ e) $\cos(\ln x)$ f) $\ln\left|\frac{x}{x^2+1}\right|$ — Clase 2, Clase 3
 g) $e^{\operatorname{sen}^2 x}$ h) $3^{\ln x}$ i) $(\operatorname{sen} x)^{\sqrt{3}}$ — Clase 4, Clase 5
 j) $\operatorname{sen} x \cdot \ln x$

*2. Encuentre la derivada de orden superior indicada. — Clase 6
 $f(x) = x(x-1)\ldots(x-n+1)$, $f^{(n)}(x)$
 (n es un número natural)

Lección 3. Aplicación de derivada

Clase 1. Tangente

Ejemplo 3.1. Encuentre la tangente a la gráfica de $y = e^x$ en el punto (0, 1).



La recta cuya pendiente es m y que pasa por (a, b):

$y - b = m(x - a)$

(Mat. I Unidad IV).

Solución: Sea $f(x) = e^x$. Entonces

$f'(x) = e^x$ y $f'(0) = e^0 = 1$ (pendiente de la tangente).

Le ecuación de la tangente es:

$y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$, $y = x + 1$ (Respuesta)

Ejercicio 3.1. Encuentre la tangente en el punto indicado.

a) $y = \ln x$, $(1, 0)$ b) $y = \text{sen } x$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$

c) $y = \tan 2x$, $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$ d) $y = \frac{1}{x+1}$, $(0,1)$

*** Ejemplo 3.2.** Encuentre la tangente a la gráfica de $y = e^x$ que pasa por el origen.

Véase Ejemplo 2.2 (Unidad III)

Solución: Sea (a, e^a) el punto de tangencia.

Como $y' = e^x$, la pendiente de la tangente es e^a.

Como la pendiente pasa por el punto (a, e^a), la ecuación es

$$y - e^a = e^a (x - a),$$

Esta recta para por el origen (0, 0).

Luego $0 - e^a = e^a (0 - a)$, $(a - 1)\, e^a = 0$,

Como $e^a > 0$, $a = 1$. La tangente es:

$y - e = e(x - 1)$, $y = ex$ (Respuesta).

*** Ejercicio 3.2.** Encuentre la tangente que pasa por el punto indicado.

a) $y = e^x$, $(-1, 0)$ b) $y = \frac{1}{x}$, $(3, -1)$

*** Ejemplo 3.3.** Encuentre la tangente a la gráfica $y = \ln x$ cuya pendiente es 2.

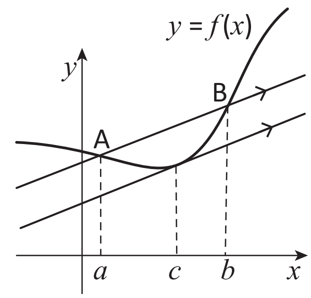
Solución: La pendiente es $y' = \frac{1}{x} = 2$, por lo tanto, el punto de tangencia es $\left(\frac{1}{2}, -\ln 2\right)$.

Luego la tangente es: $y - (-\ln 2) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $y = 2x - 1 - \ln 2$ (Respuesta)

*** Ejercicio 3.3.** Encuentre la tangente que tiene la pendiente indicada.

a) $y = \frac{1}{x-1}$, pendiente -1 b) $y = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$, pendiente 4.

Clase 2. Teorema del valor medio



Teorema del valor medio

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Se omite demostración.

Explicación: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ representa la pendiente de la recta AB.

$f'(c)$ representa la pendiente de la tangente en $(c, f(c))$. Dos rectas son paralelas.

Aplicando este teorema, se tiene que:

Teorema 3.1

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $f'(x) > 0$ (respectivamente $f'(x) < 0$) en (a, b), entonces $f(x)$ es creciente (respectivamente decreciente) en $[a, b]$.

Ya se utilizó este Teorema en la Unidad III.

Demostración: Sean $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Aplicando el Teorema del valor medio en $[\alpha, \beta]$, se tiene que $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(c)$ donde $\alpha < c < \beta$.

Si $f'(c) > 0$ (respectivamente $f'(c) < 0$), entonces $f(\alpha) < f(\beta)$ (respectivamente $f(\alpha) > f(\beta)$).

Clase 3. Convexidad de la gráfica

Definición 3.1 Convexidad

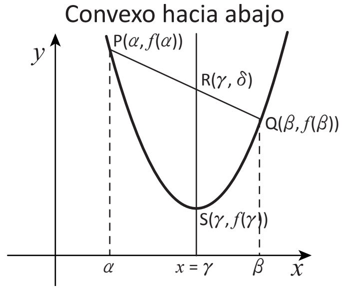
Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Se dice que la gráfica C de $y = f(x)$ es convexa hacia abajo (convexa hacia arriba) cuando C cumple la siguiente condición:

Para cualquier $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, se toman $P(\alpha, f(\alpha))$ y $Q(\beta, f(\beta))$ en C. La parte de C comprendida entre $x = \alpha$ y $x = \beta$ excluidos P y Q está abajo (respectivamente arriba) de la recta PQ, es decir para cualquier $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $f(\gamma) < \delta$ (respectivamente $f(\gamma) > \delta$),

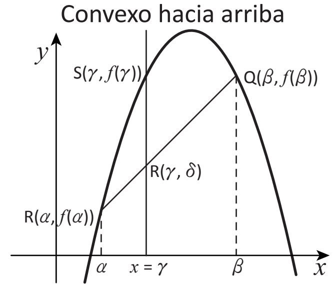
($\delta = f(\alpha) + \dfrac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha}\,(f(\beta) - f(\alpha))$ es la coordenada y del punto R).

También se dice que $f(x)$ es cóncava hacia arriba o abajo.

Convexo hacia abajo



Convexo hacia arriba

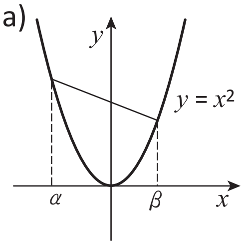


Ejemplo 3.4. Investigue la convexividad.

a) $y = x^2$ b) $y = -x^2$ c) $y = \text{sen}\, x$ $(0 \le x \le 2\pi)$

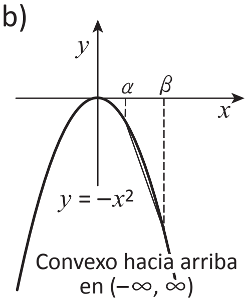
Solución:

a)



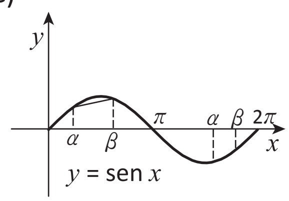
Convexo hacia abajo en $(-\infty, \infty)$

b)



Convexo hacia arriba en $(-\infty, \infty)$

c)



Convexo hacia abajo en $[\pi, 2\pi]$

Convexo hacia arriba en $[0, \pi]$

Teorema 3.2

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

$f(x)$ es convexa hacia abajo (respectivamente arriba) en $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ es creciente (respectivamente decreciente) en (a, b)

Ejemplo 3.5. Confirme el Teorema con las funciones del Ejemplo 3.4.

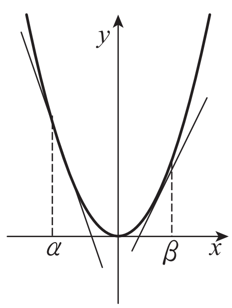
y' representa la pendiente de la tangente.

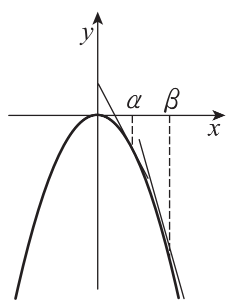
Solución:

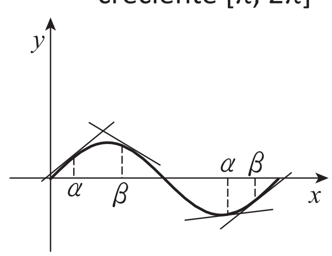
a) $y' = 2x$ es creciente en $(-\infty, \infty)$

b) $y' = -2x$ es decreciente en $(-\infty, \infty)$

c) $y' = \cos x$ decreciente $[0, \pi]$ creciente $[\pi, 2\pi]$







Teorema 3.3

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable hasta dos veces en (a, b). Entonces

$$f''(x) > 0 \text{ en } (a, b) \Rightarrow f(x) \text{ es convexa hacia abajo.}$$

$$f'' < 0 \text{ en } (a, b) \Rightarrow f(x) \text{ es convexa hacia arriba.}$$

Demostración:

$f''(x) > 0$ en (a, b) $\Rightarrow$ $f'(x)$ es creciente en (a, b)

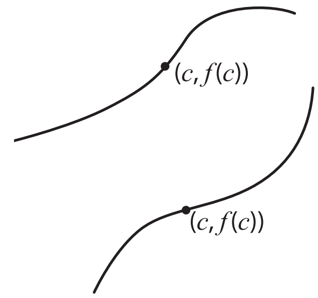
$\Leftrightarrow$ $f(x)$ es convexo hacia abajo

$f''(x) < 0$ en (a, b) $\Rightarrow$ $f'(x)$ es decreciente en (a, b)

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ es convexo hacia arriba.

Clase 4. Punto de inflexión

Definición 3.2 PUNTOS DE INFLEXIÓN
Sea $f(x)$ una función continua. Al punto P($c, f(c)$) de la gráfica de $y = f(x)$ se le denomina punto de inflexión, si existen intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ tales que
$f(x)$ es convexa hacia abajo (respectivamente arriba) en $[a, c]$ y
$f(x)$ es convexa hacia arriba (respectivamente abajo) en $[c, b]$.



Del último Teorema de la Clase 3 se sabe que: $f''(x)$ cambia de signo en $x = c \Rightarrow (c, f(c))$ es punto de inflexión.

Crece y convexa hacia arriba.

Decrece y convexa hacia arriba.

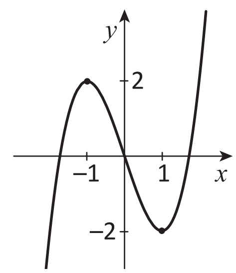
Decrece y convexa hacia abajo.

Crece y convexa hacia abajo.

Ejemplo 3.6. Investigue los extremos relativos y convexidad de $y = x^3 - 3x$ y haga la gráfica.

Solución: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$
$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$ $y'' = 6x.$ $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x		-1		0		1	
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗	2	↘	0	↘	−2	↗
		Máx. rel.		Punto infl.		Mín. rel.	



Ejercicio 3.4. Investigue los extremos relativos y convexidad y haga la gráfica.

a) $y = x^3 - 3x^2$ b) $y = -x^3 - 3x^2$

c) $y = x^3$ d) $y = \tan x$, $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

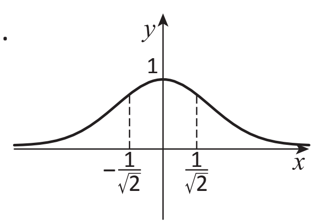
Clase 5. Gráfica 1 (Funciones exponenciales)

Ejemplo 3.7. Investigue los extremos relativos, la convexidad y las asíntotas de $y = e^{-x^2}$ y haga la gráfica.

Solución: $y' = -2xe^{-x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−	−	0	+
y	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘
		Punto infl.		Máx. rel.		Punto infl.	



$\lim\limits_{h\to\infty} y = \lim\limits_{h\to-\infty} y = 0,$

por lo tanto la recta $y = 0$ es la asíntota.

Unidad II Clase 1.7

Ejercicio 3.5. Haga la gráfica investigando los extremos relativos, la convexidad y las asíntotas.

a) $y = xe^{x}$ b) $y = xe^{-x^2}$

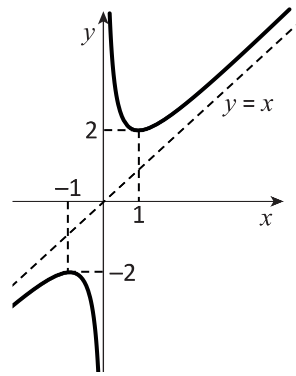
Clase 6. Gráfica 2 (Funciones racionales)

Ejemplo 3.8. Investigue los extremos relativos, la convexidad y las asíntotas de $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ y haga la gráfica.

Solución: $y = x + \dfrac{1}{x}$, $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$y'' = \dfrac{2}{x^3}$

x		-1		0		1	
y'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	/	$+$	$+$	$+$
y	↗	-2	↘	/	↘	2	↗
		Máx rel.				Mín. rel.	



Cuando $f(x) = g(x) + \dfrac{h(x)}{l(x)}$ donde $g(x)$, $h(x)$ y $l(x)$ son polinomios tal que deg $h(x)$ < deg $l(x)$, entonces

$\lim\limits_{h\to\infty} \{f(x) - g(x)\} = \lim\limits_{h\to-\infty} \{f(x) - g(x)\} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} (y - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (y - x) = 0$, por lo tanto la recta $y = x$ es una asíntota.

La otra es $x = 0$, y $\lim\limits_{x\to 0^+} y = \infty$, y $\lim\limits_{x\to 0^-} y = -\infty$.

Ejercicio 3.6. Haga la gráfica investigando los extremos relativos, convexidad y las asíntotas.

a) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ b) $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$

Clase 7. Aplicación a la ecuación

Ejemplo 3.9. Sea $2x^3 - ax^2 + 1 = 0$ …(1) una ecuación en x donde a es un número real. Investigue el número de distintas soluciones reales en (1).

Véase Unidad III Clase 2.9

Solución: $x = 0$ no es una solución de (1).

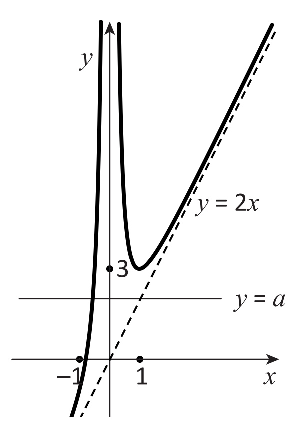
Por lo tanto (1) equivale a $\dfrac{2x^3+1}{x^2} = a$ …. (2).

Sea $y = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$, $y = 2x + \dfrac{1}{x^2}$, $y' = 2 - \dfrac{2}{x^3}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ cuando x toma el valor real.

x		0		1	
y'	$+$	/	$-$	0	$+$
y	↗	/	↘	3	↗

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} y = \lim\limits_{x\to 0^+} y = \infty$



$y = 2x$ y $x = 0$ son las asíntotas.

(El número de distintas soluciones reales de (1)) = (El de (2)) = (El número de distintos puntos comunes de dos gráficas $y = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$ y $y = a$)
Luego,

a	$a < 3$	$a = 3$	$3 < a$
Número sol.	1	2	3

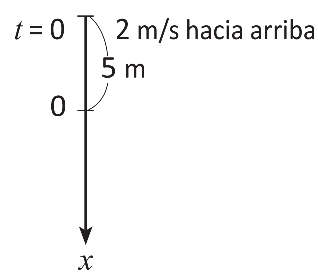
Ejercicio 3.7. Investige el número de las distintas soluciones reales de la ecuación, donde a es es un número real.
a) $4x^3 - ax^2 - 1 = 0$ b) $ae^{x} - x = 0$

Clase 8. Velocidad y aceleración en la recta

Definición 3. 3
Sea P un punto que se mueve en una recta numérica. Se supone que la coordenada x de P está dada como una función derivable del tiempo $t : x = f(t)$.
Entonces la velocidad de P es $\dfrac{dx}{dt}$ y si $f(x)$ posee f'', entonces la aceleración de P es $\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Cuando no hay cambio de velocidad, velocidad = (diferencia de coode- nadas) / (diferencia del tiempo).
Cuando hay cambio se toma límite.

Ejemplo 3.10. Cuando un objeto cae por la gravedad, su aceleración es alrededor de 9.8 m/s², si se ignora la resistencia del aire.
a) Si la velocidad en el tiempo $t = 0$ fue 2 m/s hacia arriba, ¿cuánto es la velocidad hacia abajo en el tiempo t (segundos)?
b) Si la posición en el tiempo $t = 0$ fue 5 m del punto 0 hacia arriba, ¿cuál es la posición en el tiempo t (segundos) midiendo desde 0 hacia abajo?



Solución: Sea $x(t)$ m la coordenada del punto en el tiempo t (el origen es 0 y la orientacion es hacia abajo). Sea υ m/s la velocidad.

a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 9.8$, por lo tanto

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \int_0^t 9.8\, dt - 2 = 9.8\, t - 2 \text{ (Respuesta)}$$

b) $x = \int_0^t \upsilon\, dt - 5 = 4.9\, t^2 - 2t - 5$ (Respuesta)

Que la velocidad hacia arriba es 2 m/s es que la velocidad hacia el eje x (hacia abajo) es –2 m/s.

Ejercicio 3.8
a) Si se cae un objeto del techo del edificio de 19.6 m de altura, ¿cuántos segundos tarda en llegar a la tierra?
b) Un coche está acelerando la velocidad con 2 m/s² de aceleración. Ahora la velocidad es 5 m/s.
¿Cuántos metros va a correr en 4 segundos a partir de ahora. Se supone que el coche corre en línea.

Clase 9. Movimiento circular uniforme

Definición 3.4 Velocidad y aceleración en el plano
Sea P un punto que se mueve en el plano y sean $(x(t), y(t))$ las coordenadas de P en el tiempo t.

La velocidad de P es el vector $\boldsymbol{\upsilon} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$.

La aceleración de P es el vector $\alpha = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$.

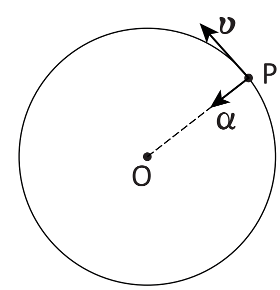
Se supone que son derivables.

$\alpha = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\upsilon}$

Ejemplo 3.11. Un punto P está rotando en la circunferencia con el centro (0, 0) y el radio r. Sus coordenadas están dadas por ($r \cos \omega t$, r sen ωt), donde ω es un número real y t representa el tiempo.

Encuentre la velocidad $\boldsymbol{\upsilon}$ de P.
Encuentre la aceleración α de P.

A ω se le llama **velocidad angular**.



Solución:

a) $\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d}{dt}(r \cos \omega t, r \text{ sen } \omega t)$
$= (-r\omega \text{ sen } \omega t, r\omega \cos \omega t)$

b) $\alpha = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\upsilon} = (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \text{ sen } \omega t) = -r\omega^2(\cos \omega t, \text{sen } \omega t)$.

Ejercicio 3.9. En el Ejemplo 3.11, sea $\boldsymbol{p}$ el vector $\overrightarrow{OP}$. Demuestre los siguientes:

a) $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{\upsilon}$ y $|\boldsymbol{\upsilon}| = |\omega||\boldsymbol{p}|$ b) $\alpha = -\omega^2 \boldsymbol{p}$ y $|\alpha| = r\omega^2$.

Ejercicio 3.10. Un objeto gira en la circunferencia del radio 5 m, tardando 10 segundos en dar una vuelta. Encuentre las magnitdes de su velocidad en m/s y su aceleración en m/s^2.

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la tangente en el punto indicado. — Clase 1

   a) $y = \cos x, \left(\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right)$ b) $y = e^{3x}$, (0, 1)

   c) $y = \text{sen}^{-1} x, \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \quad \left(-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$

2. Haga la grafica investigando los extremos relativos, la convexidad y las asíntotas. — Clase 5, Clase 6

   a) $y = x^2 e^x$ b) $y = 4x + \frac{1}{x-1}$

3. Investigue el número de distintas soluciones reales con respecto al número real a. — Clase 7

   En b) utilice $\lim_{h \to 0^+} x^2 \ln x = 0$

   (véase Unidad II Clase 1.7)

   a) $x^3 - ax^2 - x + 1 = 0$ b) $\ln x - \frac{a}{x^2} = 0 \quad (x > 0)$

4. La coordenada del punto P, que se mueve en la recta numérica, está dada por $x(t) = t^3 - 9t^2 + 4t - 5$ (t: tiempo). — Clase 8

   a) Encuentre la velocidad (υ) y la aceleración (α) en el tiempo $t = 1$.

   b) Encuentre la velocidad mínima ($t \in (-\infty, \infty)$)

Problemas de la Unidad A

1. Sea $f(x) = \text{sen } x$. Encuentre $f^{(4n)}(x)$, $f^{(4n+1)}(x)$, $f^{(4n+2)}(x)$ y $f^{(4n+2)}(x)$ donde n es un número entero no negativo.

   $f^{(0)}(x)$ significa $f(x)$.

2. a) Calcule $\{(ax+b)^n\}'$ donde $a \neq 0$ y n es un número natural.

   b) Encuentre $\int (ax+b)^n \, dx$ donde n es un número entero no negativo y $a \neq 0$.

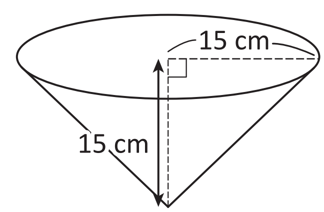
* Problemas de la Unidad B

Clase 9

1. Hay un satélite que rota alrededor de la tierra en una órbita circular. La propulsión viene de la fuerza de gravedad, es decir, la aceleración del movimiento circular uniforme es igual a la aceleración de gravedad, que está en razón inversa al cuadrado de la distancia desde el centro de la tierra.

   a. Exprese el radio r (metros) de la órbita con los datos siguientes:
      R (metros): el radio de la tierra.
      ω(radianes/segundo): la velocidad angular del satélite.
      g(metros/segundo^2): la aceleración de gravedad en la superficie terrestre.

   b. Suponga que esto es un satélite geoestacionario, es decir, su velocidad angular es igual a la de la tierra.
      Exprese r con R, g y π.
      Luego sustituye las siguientes valores y calcule r con la calculadora:
      $R = 6.378 \times 10^6$ (m), $g = 9.8$ (m/s^2), $\pi = 3.14$

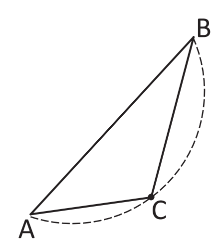


2. Hay un recipiente de forma de cono cuyo radio y profundidad miden 15 cm. Se vierte 100 cm^3 de agua por segundo en éste. Cuando la profundidad del agua es 10 cm, encuentre la velocidad (cm/s) del aumento del radio de la superficie del agua.

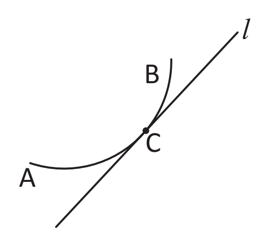
3. Sean a, b y c números reales tales que $0 < a < b < c$. Demuestre la siguiente inecuación:
$$a^c b^a c^b < a^b b^c c^a.$$

Tome el logarítmo y aplique el Teorema del valor medio.

4. Sea $f(x)$ convexo hacia abajo en $[a, b]$. Sean A($a, f(a)$) y B($b, f(b)$) dos puntos en la gráfica. Tome cualquier $c \in (a, b)$ y ponga C($c, f(c)$). Demuestre lo siguiente:



   a) pen (A, C) < pen (A, B) < pen (C, B), donde pen (A, B) etc. representan la pendiente de la recta AB, etc. respectivamente.



   b) Sea $f(x)$ derivable en (a, b). Sea $c \in (a, b)$. Sea l: $y = f'(c)\,x + n$ la tangente a la gráfica $y = f(x)$ en C($c, f(c)$).
      Entonces en $[a, b]$ excepto c, l queda debajo de $y = f(x)$, es decir, $f'(c)d + n < f(d)$ para cualquier $d \in [a, b]$, $d \neq c$.