República de Honduras
Secretaría de Educación

11

MATEMÁTICA III

Libro del Estudiante

Undécimo grado

Bachillerato Técnico Profesional

Educación Media

Índice

Matemáticas III

Unidad
I

Geometría elemental

- Lección 1: Congruencia de triángulos
- Lección 2: Semejanza de triángulos

Algo de historia

Euclides
(330 a.c. – 275 a.c.)

Euclides fue un matemático griego, se conoce muy poco de su vida, sin embargo por su legado es considerado como uno de los matemáticos más famosos de su época junto a Apolonio y Arquímedes. Euclides fundó una escuela de matemática en Alejandría la cual durante varios años se consideró una de las más célebres del mundo.

El nombre de Euclides está ligado a la geometría, al escribir su famosa obra llamada Elementos, está compuesta por 13 libros en las cuales se explican las bases de la geometría.

La influencia de los Elementos de Euclides fue muy fuerte, convirtiéndolo en texto ejemplar en la enseñanza inicial de la matemática, conservando la vigencia en nuestro tiempo.

Los primeros seis libros tratan sobre lo que hoy se conoce como geometría plana o elemental, en los libros séptimo al décimo se estudian temas relacionados con la teoría de números y los tres restantes tratan los temas de los sólidos, culminando con la construcción de los cinco poliedros regulares y sus esferas circunscritas. Esta obra generó muchas discusiones posteriores por diferentes matemáticos los cuales llegaron a confirmar la veracidad de la misma, de igual forma ha sido de mucha ayuda en diferentes campos de la ciencia como ser física, química, astronomía, ingeniería entre otros.

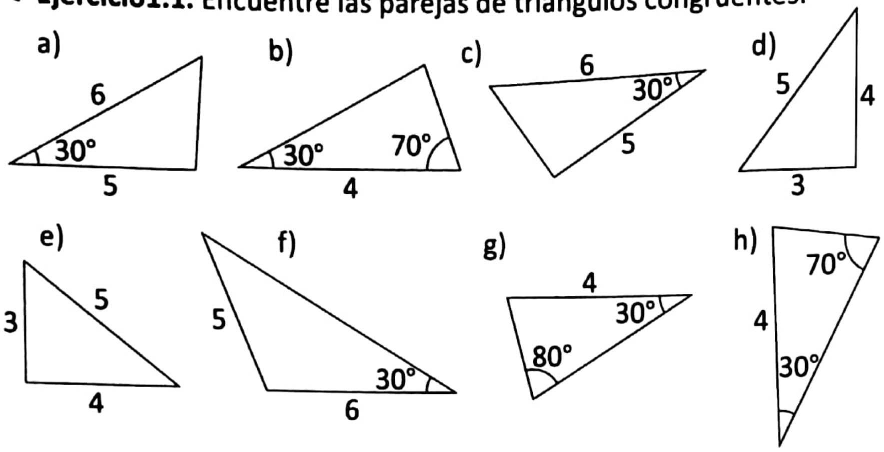
Fuente: http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euclides.htm

Lección 1. Congruencia de Triángulos

Clase 1. Criterios de congruencia de triángulos

Congruencia de triángulo

Ejercicio1.1. Encuentre las parejas de triángulos congruentes.



Pareja 1: __________ Pareja 2: __________ Pareja 3: __________

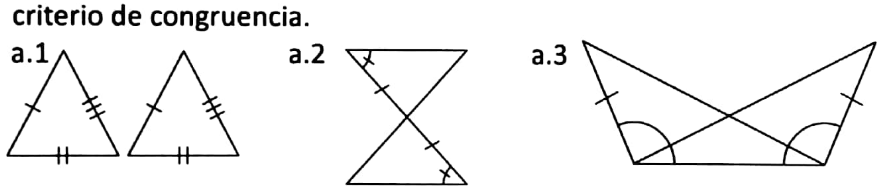
Criterio: __________ Criterio: __________ Criterio: __________

Dos triángulos son congruentes si satisfacen uno de los siguientes criterios:

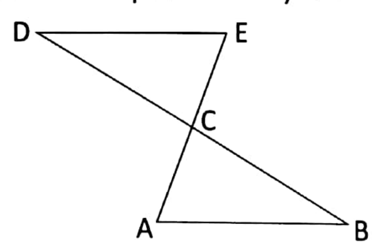
a) Los tres lados son respectivamente congruentes (LLL).
b) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes (LAL).
c) Un lado y los dos ángulos adyacentes a él son respectivamente congruentes (ALA).

Ejercicio 1.2.

a) Para cada par de triángulos dibujados a continuación diga cuál es el criterio de congruencia.



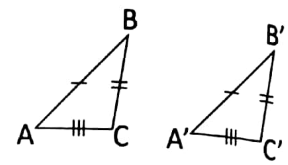
b) En la figura $\overline{AE}$ interseca a $\overline{BD}$ en C tal que $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$. Demuestre que el $\angle A \cong \angle E$.



[A]

En una congruencia de triángulos se da una correspondencia entre vértices, lados y ángulos.

En la congruencia



$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ Se da:

*Correspondencia entre vértices

$A \leftrightarrow A'$; $B \leftrightarrow B'$; $C \leftrightarrow C'$

*Lados correspondientes de triángulos congruentes son congruentes

$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

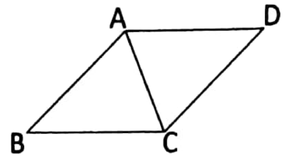
*Los ángulos correspondientes son congruentes

$\angle A \cong \angle A'$

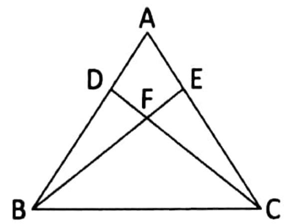
$\angle B \cong \angle B'$

$\angle C \cong \angle C'$

c) La figura ABCD es un cuadrilátero donde $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.
Demuestre que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

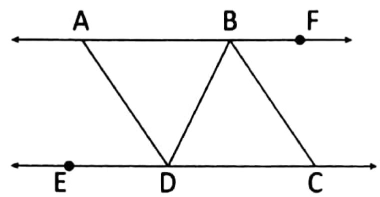


d) En el triángulo isósceles ΔABC, hay dos puntos D y E en los lados congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente y $\overline{BD} \cong \overline{CE}$.
Demuestre que:
d1. $\overline{BE} \cong \overline{CD}$.
d2. Si F es el punto donde se cortan $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ entonces $\overline{BF} \cong \overline{CF}$



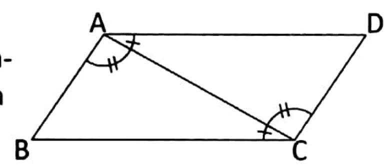
En triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes y viceversa.

e) En la figura las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ son paralelas, $\overline{DA}$ biseca el $\angle BDE$ y $\overline{BC}$ biseca el $\angle DBF$. Demuestre:
e1. $\Delta DAB \cong \Delta BCD$
e2. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



Aplicación de congruencia a los cuadriláteros

Ejercicio 1.3. Demuestre que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. Llene las casillas en blanco.



[B]

La relación de los ángulos que se forman cuando se tiene dos rectas paralelas y una transversal.

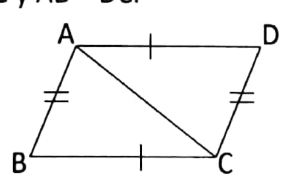
Proposición	Justificación
1. En el ΔABC y ΔCDA, el $\angle BAC \cong \angle DCA$ y $\angle BCA \cong \angle DAC$	$\boxed{\quad}$
2. $\overline{CA} \cong \overline{AC}$	$\boxed{\quad}$
3. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	Criterio $\boxed{\quad}$ de congruencia de triángulos
4. $\overline{AB} \cong \boxed{\quad}$ $\overline{BC} \cong \boxed{\quad}$	Congruencia de triángulos

Teorema 1.1
Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Ejercicio 1.4. En el cuadrilátero ABCD, AD = BC y AB = DC.
Demuestre lo siguiente:

a) Los triángulos ΔABC y ΔCDA son congruentes

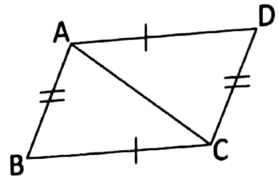
b) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$



Clase 2. Características de los cuadriláteros

[A]

Condiciones suficientes para ser paralelogramo



Ejemplo 1.1. Demuestre que un cuadrilátero cuyos lados opuestos son congruentes es un paralelogramo.

Proposición	Justificación
1. En el ΔABC y ΔCDA $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{DA} \cong \overline{BC}$	Hipótesis
2. $\overline{CA} \cong \overline{AC}$	Congruencia de un mismo segmento
3. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	Por criterio LLL
4. $\angle CAB \cong \angle ACD$ $\angle BCA \cong \angle DAC$	Por 3, Congruencia de triángulos
5. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$	Ángulos alternos internos y 4
6. ABCD es un paralelogramo.	Por 5

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos.

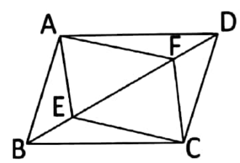
Teorema 1.2
Condiciones suficientes para ser un paralelogramo
Un cuadrilátero es un paralelogramo si cumple una de las siguientes condiciones:

a) Dos pares de lados opuestos son paralelos.
b) Dos pares de lados opuestos son congruentes.
c) Dos pares de ángulos opuestos son congruentes.
d) Las diagonales se cortan en el punto medio.
e) Los ángulos consecutivos son suplementarios.

Ejercicio 1.5.

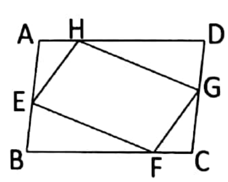
a) Demuestre las condiciones c, d y e para que un cuadrilátero sea un paralelogramo.

b) En el dibujo los puntos E y F están en la diagonal $\overline{BD}$ del paralelogramo ABCD y distan lo mismo de los vértices B y D respectivamente. Demuestre que el cuadrilátero AECF es un paralelogramo.



Tenga en cuenta las condiciones de suficiencia para ser un paralelogramo para demostrar b y c.

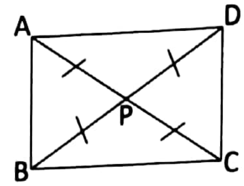
c) Se toman 4 puntos E, F, G y H en los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ del paralelogramo ABCD de modo que AE = CG y BF = DH. Demuestre que EFGH es un paralelogramo.



[B]

Rectángulos rombos y cuadrados

Ejercicio 1.6. Demuestre que un cuadrilátero cuyas diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio es un rectángulo. Llene las casillas en blanco.



Proposición	Justificación
1. PA = PB = PC = PD	Hipótesis
2. ΔPAB, ΔPBC, ΔPCD, ΔPDA son triángulos $\square$	
3. ΔPAD ≅ ΔPBC ΔPAB ≅ ΔPCD	
4. m∠PAD = $\square$ = $\square$ = $\square$ y m∠PAB = $\square$ = $\square$ = $\square$	
5. m∠DAB = m∠ABC = m∠BCD m∠CDA = 90°	Por 3 y suma de ángulos
6. ABCD es un rectángulo.	

Teorema 1.3
Las diagonales de los:
Rectángulos son congruentes y se cortan en el punto medio.
Rombos son perpendiculares y se cortan en el punto medio.
Cuadrados son congruentes y perpendiculares y se cortan en el punto medio.

Ejercicio 1.7.

a) Demostrar que, si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares, congruentes y se cortan en el punto medio entonces este es un cuadrado.

b) Demuestre que el cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio es un rombo.

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos.

Es importante saber que:
Todo cuadrado es un rectángulo.
Todo cuadrado es un rombo.
La inversa no se cumple.

Clase 3. Teorema de los dos puntos

Ejercicio 1.8.

Construya:

- Dibuje un ΔABC
- Marque los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, nombrándolos como D y E respectivamente
- Trace $\overline{DE}$

Verifique:

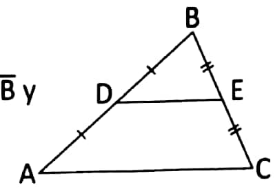
- $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$
- Compare DE con respecto a AC.

El resultado anterior se cumple por el siguiente teorema.

Teorema 1.4

Teorema de los dos puntos

En el ΔABC, D y E son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ y $DE = \frac{1}{2} AC$.



Ejemplo 1.2. Demostración de Teorema 1.4. Utilice la siguiente construcción auxiliar: Sea F el punto que pertenece a la prolongación de $\overline{DE}$ tal que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, tal como se muestra en la figura.

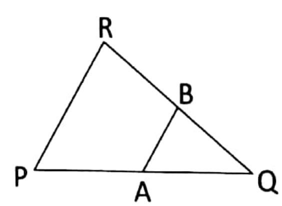
1) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

Proposición	Justificación
1. $\overline{BD} \cong \overline{DA}$	Hipótesis
2. $\overline{BE} \cong \overline{EC}$	Hipótesis
3. $\overline{DE} \cong \overline{EF}$	Hipótesis
4. E es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$	Por 2 y 3
5. BDCF es un paralelogramo	Por 4 y condición de suficiencia de paralelogramos
6. $\overline{BD} \cong \overline{FC}$	Por 5
7. $\overline{DA} \cong \overline{FC}$	Por 1 y 6
8. ADFC es un paralelogramo	Por 5, 7 y condición de suficiencia de paralelogramos
9. $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$	Por 8 y definición de paralelogramo

2) $DE = \frac{1}{2} AC$

Proposición	Justificación
1. DF = 2DE	E es punto medio
2. DF = AC	ADFC es un paralelogramo
3. 2DE = AC	Por 1 y 2
4. $DE = \frac{1}{2} AC$	Por 3

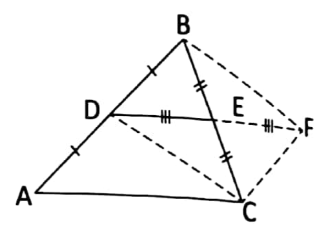
Ejercicio 1.9. En el ΔPQR, A y B son los puntos medios de $\overline{PQ}$ y $\overline{RQ}$ respectivamente. Si RP = 16, $m\angle P = 58°$ y $m\angle Q = 38°$, obtenga AB y $m\angle BAQ$.



[A]

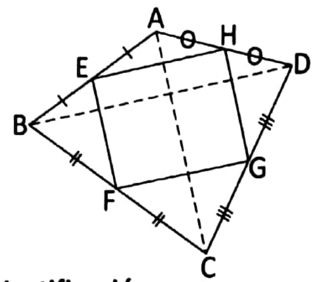
En el Ejercicio 1.8, utilice regla para las mediciones y escuadras para verificar el paralelismo.

[B]



Para realizar las demostraciones, debe analizar los teoremas de la lección anterior sobre congruencia de triángulos y sobre cuadriláteros.

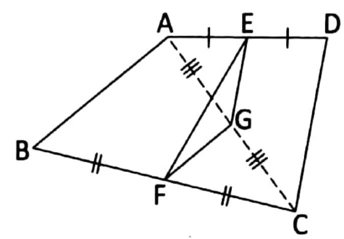
Ejercicio 1.10. Demuestre que el cuadrilátero que se obtiene uniendo los puntos medios de cada lado de cualquier cuadrilátero es un paralelogramo. Llene las casillas en blanco.



Proposición	Justificación
1. E, F, G y H son puntos medios	Hipótesis
2. En el $\triangle ABD$, $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$	
3. En el $\triangle BCD$,	Teorema 1.4
4. $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$	Igualando paso 2 y 3
5. En $\triangle ACD$, $\overline{HG} \parallel \overline{AC}$	
6.	Teorema 1.4
7. $\overline{HG} \parallel \overline{EF}$	Igualando paso 5 y 6
8. EFGH es un paralelogramo.	

Para los ejercicios 1.10 y 1.11: Aplique el teorema de los dos puntos a los triángulos que se forman con las diagonales.

Ejercicio 1.11.
En el dibujo $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y los puntos E y F son los puntos medios de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. El punto G es el punto medio de la diagonal $\overline{AC}$, ¿Qué tipo de triángulo es $\triangle EFG$?



Clase 4, 5 y 6. Propiedad de la mediatriz

Propiedad de la mediatriz

[A]

Ejercicio 1.12.
Construya:
- Trace un segmento, $\overline{AB}$
- Trace la mediatriz de $\overline{AB}$
- Coloque un punto P sobre la mediatriz, no colineal con A y B

Verifique:
- Compare $\overline{PA}$ con $\overline{PB}$

Construcción

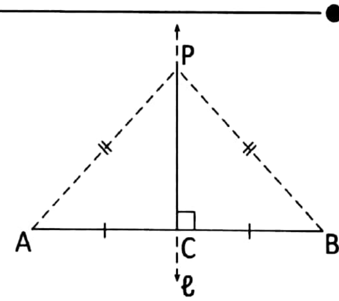
Lo anterior es una propiedad.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

Teorema 1.5 Propiedad de la mediatriz
La recta ℓ es la mediatriz de $\overline{AB}$.

1) Si P está en ℓ, entonces PA = PB

2) Si PA = PB, entonces P está en ℓ.



Demostración:

1) Si P está en ℓ, PA = PB

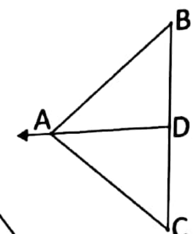
Proposición	Justificación
1. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	Por ser C punto medio
2. $\angle ACP \cong \angle BCP$	Perpendicularidad (ángulos rectos).
3. $\overline{PC} \cong \overline{PC}$	Congruencia del mismo segmento
4. $\Delta PAC \cong \Delta PBC$	Por 1, 2, 3 y LAL
5. $PA \cong PB$	Por 4 y ser lados correspondientes.

2) Demuestre que sí PA = PB, entonces P está ℓ.

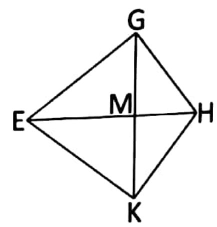
Para la parte 2), debe llegar a demostrar que C es punto medio y que $m\angle ACP = \angle BCP = 90°$

Ejercicio 1.13.

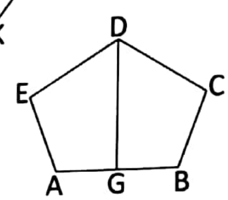
a) Si D es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$, demuestre que el ΔABC es isósceles.



b) En la figura, GE = KE, GM = KM y H está en $\overleftrightarrow{EM}$. Demostrar que GH = KH.



c) En la figura, AE = BC, ED = CD, G es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\angle E \cong \angle C$. Demostrar que $\overline{DG} \perp \overline{AB}$.



En los ejercicios a y b, no utilice congruencia de triángulos en la demostración, emplee la propiedad de la mediatriz.

[B]

Construcción

Circuncentro de un triángulo

Ejercicio 1.14.

a) Construya el ΔABC

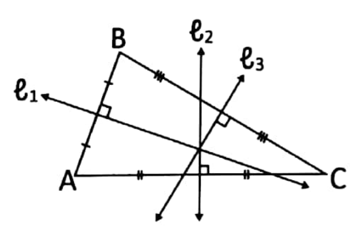
b) Trace las mediatrices de los lados del ΔABC.

c) ¿Qué observa respecto a las mediatrices? ¿Coinciden en un punto?

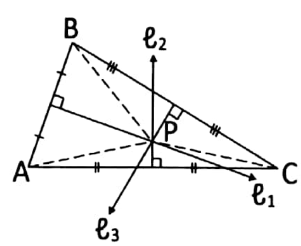
Dos o más rectas son **concurrentes** si hay un solo punto que está en todas ellas.

Teorema 1.6. Concurrencia de las mediatrices.

Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes. Su punto de concurrencia equidista de los vértices del triángulo.



Ejercicio 1.15. Demuestre el teorema anterior considerando a P como punto de intersección de ℓ_1 y ℓ_2, aplicando la propiedad de la mediatriz debe concluir que P también está en ℓ_3 y que PA = PB = PC.



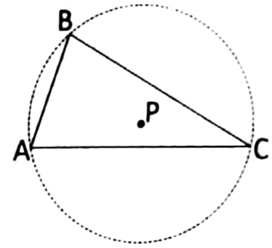
Ejercicio 1.16.

Utilice la construcción del Ejercicio 1.14 y nombre con P el punto de intersección de las mediatrices y trace una circunferencia con centro en P y con radio PA.

1) ¿Qué observa con respecto a la circunferencia y los vértices del triángulo?
2) ¿Cómo se llama este tipo de circunferencia?

Al punto P se le llama Circuncentro.

Circunferencia circunscrita.



Es la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo

Definición 1.1
El punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo se llama **circuncentro** del triángulo.

Ejercicio 1.17.

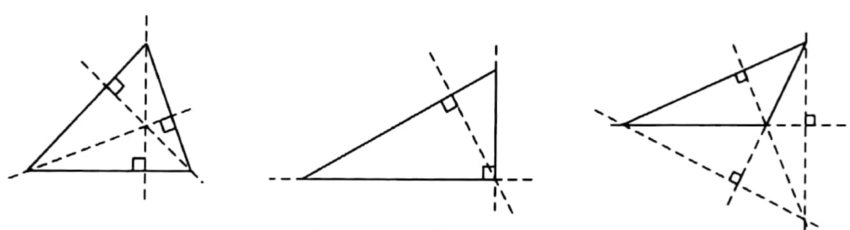
a) Construya un triángulo acutángulo, obtusángulo y rectángulo; y la circunferencia circunscrita a cada uno. Compare la ubicación del circuncentro en cada caso.
b) ¿Cómo ha de ser el triángulo para que el circuncentro se sitúe en uno de sus lados? Cuando eso sucede, ¿con qué punto coincide el circuncentro? ¿Por qué?

Ortocentro

[C]

Una altura de un triángulo es el segmento perpendicular desde un vértice a la recta que contiene el lado opuesto.

Ejercicio 1.18. Para cada uno de los siguientes triángulos se han trazado sus tres alturas.

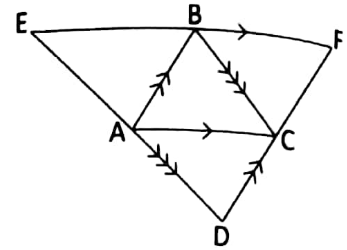


a) ¿Qué tienen en común los tres triángulos?
b) ¿En qué tipo de triángulos las alturas se intersecan en un vértice?
c) ¿En qué tipo de triángulos las alturas se intersecan en el interior del triángulo? ¿En cuál se intersecan en el exterior?

Ese punto se llama **Ortocentro**.

Teorema 1.7. Concurrencia de las alturas.
Las tres alturas de un triángulo son concurentes en un punto llamado Ortocentro.

Ejercicio 1.19.
Demuestre el teorema anterior.
Considere la siguiente construcción auxiliar:
En el $\triangle ABC$, por cada vértice se trazó una paralela al lado opuesto, formando el $\triangle DEF$. Demuestre que las mediatrices de los lados del $\triangle DEF$ son las tres alturas del $\triangle ABC$.
Utilice las condiciones para ser paralelogramo.



Los Símbolos >, >> en los segmentos están indicando paralelismo.

Clase 7 y 8. Bisectriz

Ejercicio 1.20.

Construya:
a) Dibuje el $\angle ABC$ y trace su bisectriz.
b) Marque el punto P en la bisectriz.
c) Desde P, trace segmentos que sean perpendiculares a los lados $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$.
d) Nombre los puntos de intersección como K y L.

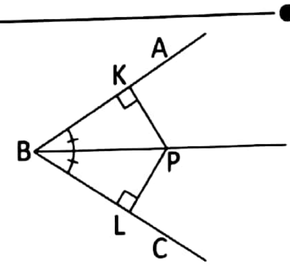
Verifique:
Compare la longitud de $\overline{KP}$ con respecto a la de $\overline{LP}$.

[A] Construcción

Puede trazar la bisectriz utilizando regla y compás, o haciendo uso del transportador.

El resultado anterior se cumple el siguiente teorema:

Teorema 1.8. Propiedad de bisectriz de un ángulo.
El punto P está en el interior de $\angle ABC$.
P equidista de $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ si y sólo si $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz del $\angle ABC$.



La bisectriz de un ángulo lo divide en dos ángulos congruentes.

Equidista:
P equidista de $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ entonces $\overrightarrow{PK} \perp \overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{PL} \perp \overrightarrow{BC}$,
Además, PK = PL.

Demostración:
Si K y L equidistan de P, entonces $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz del $\angle ABC$.

Proposición	Justificación
1. PK = PL	Hipótesis
2. $\overline{PK} \perp \overrightarrow{BA}$; $\overline{PL} \perp \overrightarrow{BC}$	Hipótesis
3. $\triangle BKP \cong \triangle BLP$	Por 1) y 2) y criterio congruencia de Triángulos rectángulos.
4. $\angle KBP \cong \angle LBP$	Por 3) y por ser ángulos correspondientes.
5. $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz del $\angle ABC$	Por 4) y deficinición de bisectriz.

Para demostrar un teorema que involucre un "si y sólo si" deben demostrarse ambos sentidos.

Ejercicio 1.21. Demuestre el otro sentido del teorema.
Si $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz del $\angle ABC$ entonces K y L equidistan de P.

Considere:
$\overline{PK} \perp \overrightarrow{BA}$,
$\overline{PL} \perp \overrightarrow{BC}$ y los teoremas para triángulos rectángulos.

Ejercicio 1.22.

a) Dibuje el ΔABC y trace las bisectrices de sus ángulos.

a1. ¿Qué tipo de triángulo es el ΔABC?

a2. ¿Coinciden las bisectrices en un punto?, si es así ¿el punto está en el interior o exterior del triángulo?

b) Nombre el punto de intersección como I, y trace desde éste, segmentos perpendiculares a cada lado del triángulo, también nombre esos puntos de intersección como P, Q y R.

b1. Compare la medida de estos segmentos.

b2. ¿Qué se puede afirmar sobre I?

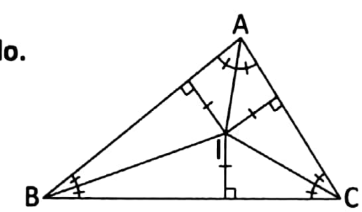
[B]

La construcción del Ejercicio 1.22 se utiliza posteriormente.

Esto nos lleva al siguiente teorema:

Teorema 1.9. Concurrencia de las bisectrices de un triángulo.

Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto que equidista de los tres lados.



Ejercicio 1.23. Complete la demostración del teorema 1.9.

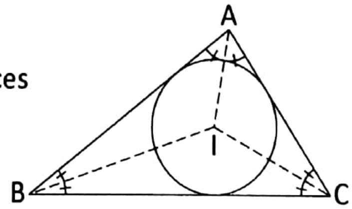
En el ΔABC, sea I el punto de intersección de las bisectrices de $\angle BAC$ y $\angle BCA$.

Proposición	Justificación
1. $\overline{AI}$ es la bisectriz del $\angle BAC$	Hipótesis
2. $\boxed{}$ es la bisectriz del $\angle BCA$	Hipótesis
3. I equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$	Por 1) y propiedad de bisectriz.
4. I equidista de $\overleftrightarrow{AC}$ y $\boxed{}$	Por 2) y $\boxed{}$
5. I equidista de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$	Por 3), 4) y propiedad transitiva.
6. $\boxed{}$ es la bisectriz de $\boxed{}$	Por 6) y propiedad de la bisectriz.

Ejercicio 1.24. Utilizando la construcción empleada en el Ejercicio 1.22, trace la circunferencia de centro I con radio PI. ¿Por qué la circunferencia es tangente a los tres lados?

Definición de Incentro

El punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos de un triángulo se llama Incentro.



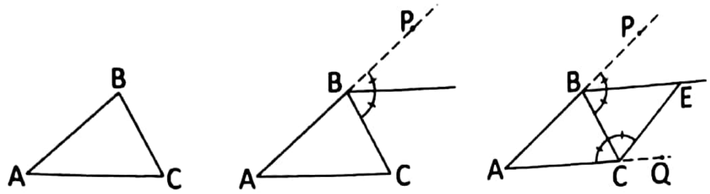
Circunferencia inscrita: Si una circunferencia es tangente a los tres lados de un triángulo entonces se dice que la circunferencia está inscrita en el triángulo y el triángulo está circunscrito en la circunferencia.

Ejercicio 1.25. Realice las siguientes construcciones:

a) Construya un triángulo equilátero y luego construya su circunferencia inscrita.

b) Dado un cateto y el radio de la circunferencia inscrita, construya un triángulo rectángulo.

Ejercicio 1.26. Explique las construcciones realizadas en cada paso.



Conteste:

a) ¿Cómo se llaman los ángulos $\angle PBC$ y $\angle QCB$?

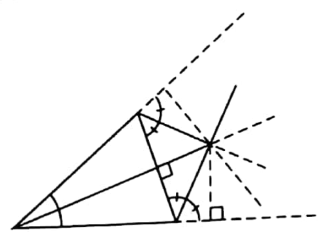
b) ¿Qué son $\overrightarrow{BE}$ y $\overrightarrow{CE}$?

c) Verifique si la bisectriz del ángulo interior $\angle BAC$ es también concurrente en el punto E.

El punto E se llama **Excentro**.

Teorema 1.10

El punto donde se intersecan dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior en un triángulo, se llama excentro y éste equidista de los lados del triángulo.



Ejercicio 1.27. Complete la demostración. Considere en el $\triangle ABC$ las bisectrices $\overrightarrow{BE}$ y $\overrightarrow{CE}$ de los ángulos exteriores $\angle PBC$ y $\angle QCB$ respectivamente y tome tres puntos P, Q y R tal que, $\overline{PE} \perp \overrightarrow{AP}$, $\overline{RE} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overline{QE} \perp \overrightarrow{AQ}$. Demuestre que $\overrightarrow{AE}$ es la bisectriz del $\angle BAC$.

Proposición	Justificación
1. $\overrightarrow{BE}$ es la bisectriz de $\angle PBC$	$\boxed{\quad}$
2. $\boxed{\quad}$ es la bisectriz de $\boxed{\quad}$	Hipótesis
3. $\overline{EP} \perp \overrightarrow{AP}$, $\overline{ER} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overline{EQ} \perp \overrightarrow{AQ}$	$\boxed{\quad}$
4. PE = RE	Por 1), 3) y propiedad de bisetriz.
5. $\boxed{\quad}$	Por 2), 3) y propiedad de bisetriz.
6. PE = QE	$\boxed{\quad}$
7. $\boxed{\quad}$ es la bisectriz de $\boxed{\quad}$	$\boxed{\quad}$

[C]

Puede calcar las figuras y hacer las verificaciones con regla, transportador y compás.

La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo, se le llama bisectriz exterior.

Está es también una aplicación de la propiedad de la bisectriz.

La circunferencia inscrita en un triángulo es tangente a uno de los lados y a las prolongaciones de los otros dos.

¿Cuántas de estas circunferencias se pueden construir en $\triangle ABC$?

Clase 9 y 10. Baricentro

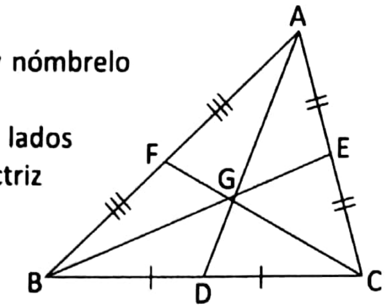
Trazar las medianas de un triángulo

Ejemplo 1.3.

a) Dibuje en el cuaderno un triángulo y nómbrelo ΔABC.

b) Encuentre los puntos medios de los lados utilizando la construcción de la bisectriz de un segmento.

c) Una los vértices con el punto medio del lado opuesto correspondiente.



Una **mediana** de un triángulo es el segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

Todo triángulo tiene 3 medianas.

Teorema 1.11 Las tres medianas de un triángulo se intersecan en un punto.

Ejemplo 1.4. Demuestre el Teorema 1.11.

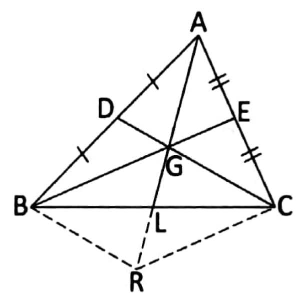
Solución:

Proposición	Justificación
1. En el ΔABC, $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ son medianas y se cortan en G.	Construcción e hipótesis
2. $\overline{AG}$ corta a $\overline{BC}$ en L y se extiende a R tal que $\overline{AG} \cong \overline{GR}$.	Construcción
3. D es el punto medio de $\overline{AB}$.	Por 1)
4. G es el punto medio de $\overline{AR}$.	Por 2)
5. En el ΔABR, $\overline{DG} \parallel \overline{BR}$	Por teorema de dos puntos
6. $\overline{GC} \parallel \overline{BR}$	Por 5).
7. E es punto medio de $\overline{AC}$.	Por paso 1)
8. En el ΔARC $\overline{GE} \parallel \overline{RC}$	Por teorema de dos puntos
9. $\overline{BG} \parallel \overline{RC}$	Por 8).
10. BGCR es paralelogramo.	Definición de paralelogramo y por 6) y 9)
11. $\overline{BL} \cong \overline{LC}$	Por 10) y la propiedad de la diagonal del paralelogramo.
12. L es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{AL}$ es una mediana del ΔABC.	Por 11

[A]

Los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{CF}$ y $\overline{BE}$ son medianas del ΔABC.
$\overline{AD}$, $\overline{CF}$ y $\overline{BE}$ se cortan en el punto G.

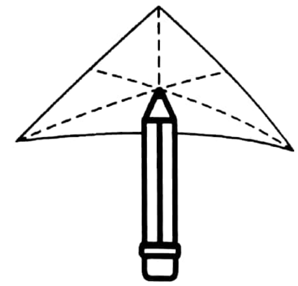
En esta demostración trazamos segmentos auxiliares como estrategia para su solución.



El punto donde se intersecan las medianas de un triángulo se llama baricentro.

Ejemplo 1.5.

a) Dibuje un triángulo escaleno grande en una cartulina y recórtelo.
b) Trace dos medianas y encuentre el Baricentro.
c) Ubique la punta del lápiz en el baricentro.
d) Comente con sus compañeros que sucedió.



Note que el triángulo se equilibró.

El Baricentro es el centro de masa o centro de gravedad de un triángulo.

Ejercicio 1.28.

a) Construya un triángulo escaleno, un equilátero y un isósceles y trace las medianas utilizando regla y compás.

b) Dado $\triangle ABC$ con mediana $\overline{AD}$ perpendicular al lado $\overline{BC}$. Demuestre que:
   b1. $\overline{AD}$ biseca a $\angle BAC$
   b2. $\triangle ABC$ es isósceles.

c) Demuestre que la mediana correspondiente al lado no congruente de un triángulo isósceles es perpendicular al lado y biseca al ángulo opuesto a la base.

d) Demuestre que las medianas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.

e) Dados dos triángulos congruentes, la mediana de uno de los triángulos es congruente con la mediana del lado correspondiente del otro.

Ejercicio 1.29.

Demuestre que si $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son medianas y G es el baricentro entonces G está ubicado a razón de $\frac{2}{3}$ de A, B y C.

[B]

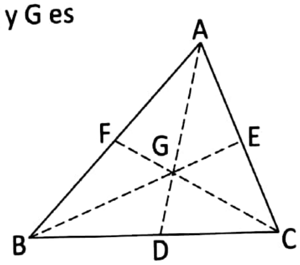
Puede utilizar como referencia la figura del Ejemplo 1.4.

En el $\triangle ABC$, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son medianas y G es el baricentro. Se cumple que:

$AG=\frac{2}{3}$ AD ó $AG = 2GD$

$BG=\frac{2}{3}$ BE ó $BG = 2GE$

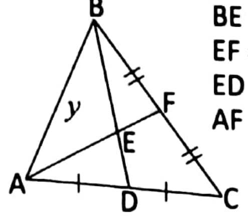
$CG=\frac{2}{3}$ CF ó $CG = 2GF$



Ejercicio 1.30.

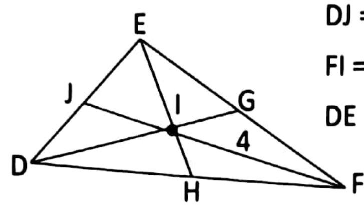
Calcule x, y en cada uno de los casos.

a)



BE = 16
EF = 7
ED = x
AF = y

b)



DJ = 3 JE = ☐

FI = 4, IJ = ☐

DE = EH, EI = ☐

Relación entre las medidas de un triángulo

Ejemplo 1.6.

Demuestre que las medianas de un triángulo se intersecan en un punto situado a dos tercios de la distancia de cada vértice al lado opuesto.

Demostraremos este teorema de dos formas:
a) Construcción de la Figura.
b) Demostración formal.

a) Construcción de la figura

1) Tome una hoja de papel y dibuje un triángulo grande y nombre sus vértices A,B y C dentro del triángulo, luego recórtelo.
2) Ubique los puntos medios de los lados haciendo un doblez de cada uno por la mitad y nómbrelos con D, E y F de tal manera que el punto D corresponda al vértice opuesto A, E con B y C con F.
3) Haga un doblez que pase por los puntos A y D, B y E , C y F, luego desdoble y remarque con lápiz de color cada doblez, de esta forma se encontró las medianas del ΔABC.
4) Ubique el baricentro y nómbrelo con la letra G.
5) Haga un doblez de tal manera que los puntos A y G coincidan y ubique el punto H (Fig. 1.1), continúe doblando haciendo coincidir los puntos H y D (Fig. 1.2).
6) Desdoble la figura y responda:
   a) ¿Qué pasó con la mediana $\overline{AD}$?
   b) ¿Cuánto mide cada una de las partes en que se dividió $\overline{AD}$?
   c) ¿Qué relación hay entre la medida de $\overline{AG}$ con respecto a la medida de $\overline{GD}$?
   d) ¿Qué relación hay entre la medida de $\overline{AG}$ con respecto a la medida de $\overline{AD}$?

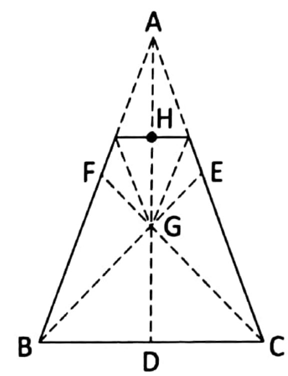


Fig 1.1

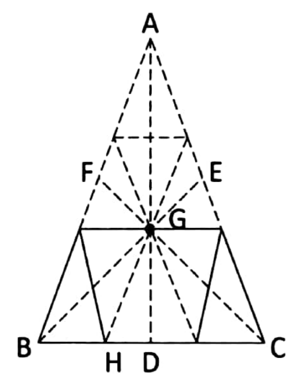
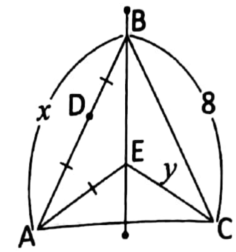


Fig 1.2

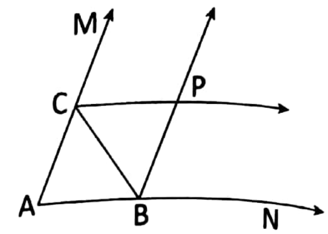
En b) utilice la Fig. 1.2

Ejercicios de la lección

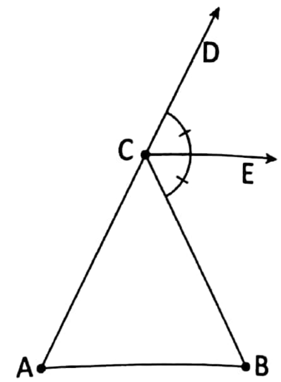
1) En la figura, $\overline{BE}$ es la mediatriz de $\overline{AC}$. Si los segmentos tienen las longitudes indicadas, halle x, y.



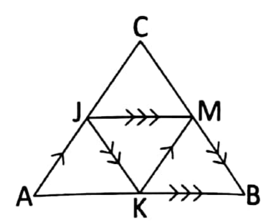
2) Las bisectrices de dos ángulos externos de un triángulo cualquiera ΔABC se encuentran en P. Demuestre que la suma del ángulo P y la mitad del ángulo A es igual a 90° (ángulo recto).



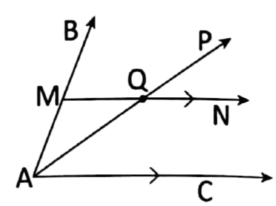
3) Demuestre que en todo triángulo isósceles la bisectriz del ángulo externo opuesto a los ángulos congruentes es paralela al lado desigual.



4) En la figura los cuadriláteros AKMJ y el BMJK son paralelogramos. Demuestre que si KJ = KM entonces, el ΔABC es isósceles.

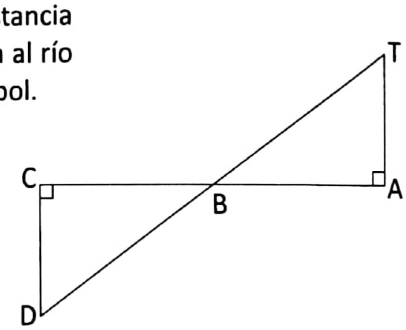


5) Demuestre que si por un punto cualquiera de la bisectriz de un ángulo se traza una paralela a uno de los lados del ángulo, el triángulo así formado es isósceles. Demuestre que el triángulo es isósceles.

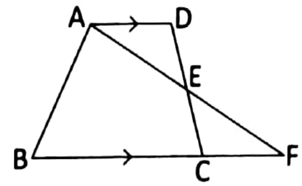


6) Dos exploradores Luis y María están parados a la orilla de un río en el punto A directamente enfrente de un árbol T que se encuentra al otro lado del rio. Ellos marcan cierta distancia a un punto B donde María permanece, sin embargo, Luis camina exactamente la misma distancia de A a B a un punto C, luego gira y camina en dirección opuesta al río hacia un punto D donde él puede ver a María alineada con el árbol.

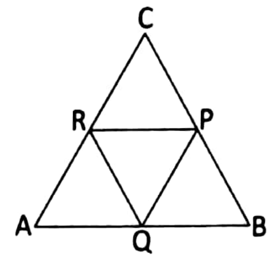
   a) Identifique la correspondencia de pares de lados y ángulos congruentes
   b) Demuestre que $\Delta ABT \cong \Delta CBD$
   c) ¿Cómo podrían ellos usar la información que se tiene para encontrar el ancho del río?



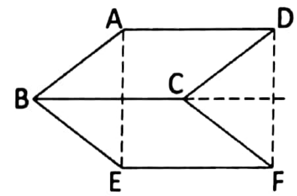
7) En la figura de la derecha $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y E es el punto medio de $\overline{CD}$. Demuestre que los triángulos ΔADE y ΔFCE son congruentes.



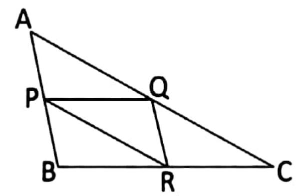
8) En la figura P, Q y R son puntos medios de los lados del triángulo equilátero ΔABC. Demuestre que el triángulo ΔPQR es equilátero.



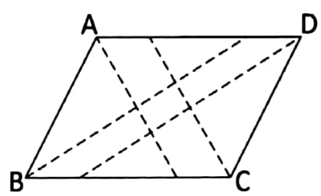
9) En la figura los cuadriláteros ABCD y BEFC son paralelogramos. Demuestre que el cuadrilátero AEFD también es paralelogramo.



10) Se da cualquier ΔABC y los puntos medios de los lados, P, Q y R. Demuestre que el perímetro del ΔPQR es la mitad del perímetro del ΔABC.

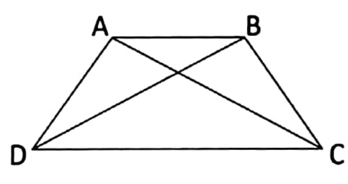


11) ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma con las bisectrices de los 4 ángulos de un paralelogramo? Demuéstrelo.

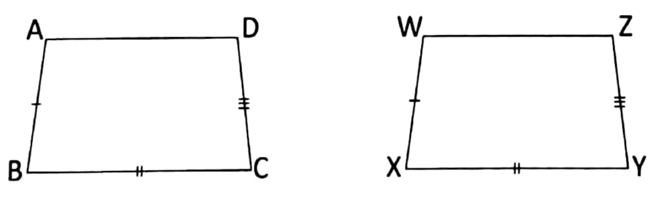


Primero demuestra que las bisectrices de ángulos opuestos del paralelogramo son paralelas entre sí.

12) Demuestre que las diagonales de un trapecio Isósceles son congruentes



13) Dados dos cuadriláteros donde $\overline{AB} \cong \overline{WX}$; $\overline{BC} \cong \overline{XY}$; $\overline{CD} \cong \overline{YZ}$; $\angle B \cong \angle X$, $\angle C \cong \angle Y$ demuestre que $ABCD \cong WXYZ$.



Trace la diagonal $\overline{BD}$ y $\overline{XZ}$ y demuestre la congruencia de los triángulos que se forman.

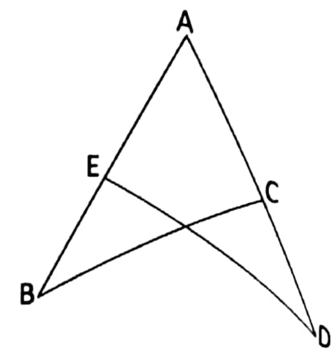
14) Para cada una de las siguientes opciones decide si la información dada es suficiente para concluir que $\Delta ABC \cong \Delta ADE$, si es así demuéstrelo.

a) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; $\angle B \cong \angle D$

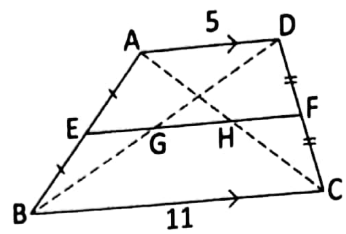
b) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DE}$

c) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{AE} \cong \overline{AC}$

d) $\overline{EB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DE}$



15) En la figura AD || BC, AE = EB y DF = FC. Encuentre la longitud de los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.



Considere la siguiente propiedad, la mediana de un trapecio es paralela a sus bases y su longitud es igual a la mitad de la suma de ellas.

Lección 2. Semejanza de Triángulos

Clase 1. Criterios de semejanza de triángulos

Definición de semejanza

Se dice que dos figuras son semejantes, cuando se pueden colocar en la posición como muestra la Fig. 2.1 donde

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}$$

A este valor se le denomina **razón de semejanza.**

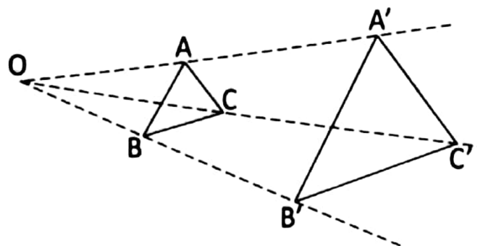


Fig. 2.1

[A]

Se puede dar la vuelta a una de estas figuras. Cada punto de las dos figuras se corresponde como los puntos A y A', etc.

En el caso de los triángulos se tiene la siguiente definición de semejanza:

> Los ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes cuando
> $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$, $m\angle A = m\angle A'$, $m\angle B = m\angle B'$, $m\angle C = m\angle C'$

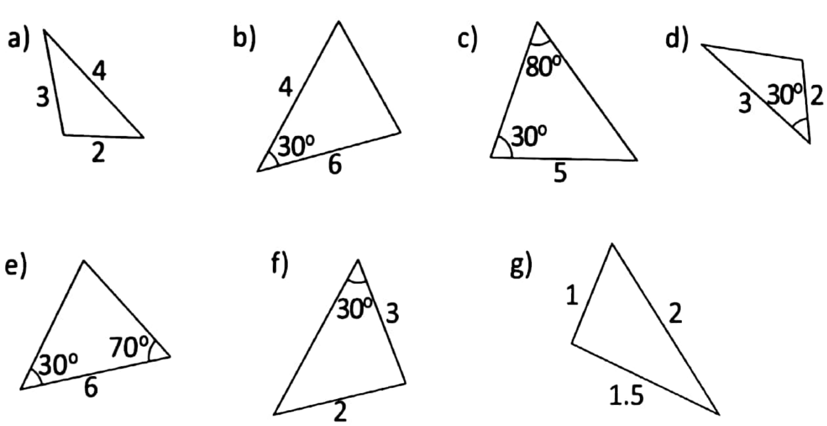
> El valor de $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$ coincide con la razón de semejanza.

Se denota la semejanza con el signo "$\sim$", $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Para confirmar la semejanza de triángulos, no es necesario verificar todas las condiciones

En 9no. grado se aprendió el criterio de semejanza de triángulos.

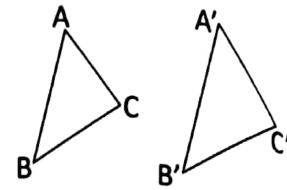
Ejemplo 2.1. Encuentre las parejas de triángulos que son semejantes y diga la condición de semejanza:



Criterio de semejanza de triángulos:

Dos triángulos son semejantes cuando cumplen una de las siguientes condiciones:

a) Dos pares de lados son proporcionales y los ángulos comprendidos entre estos lados tienen la misma medida (LAL).
b) Dos pares de ángulos tienen la misma medida (AA).
c) Los tres lados son proporcionales (LLL).



$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$

$m\angle B = m\angle B'$ (LAL)

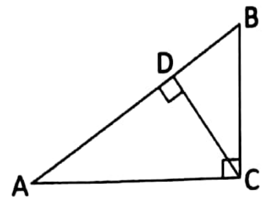
$m\angle A = m\angle A'$, $m\angle B = m\angle B'$ (AA)

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$

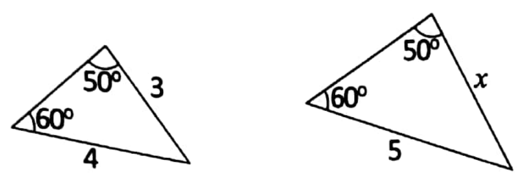
(LLL)

[B]

Ejercicio 2.1.
Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$



Ejemplo 2.2. Encuentre los valores de x

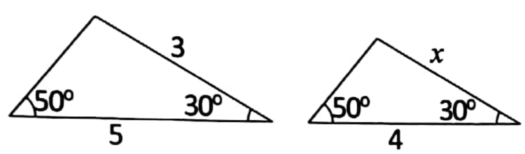


Solución: En los dos triángulos hay dos pares de ángulos iguales, por lo tanto son semejantes, así que se tiene que

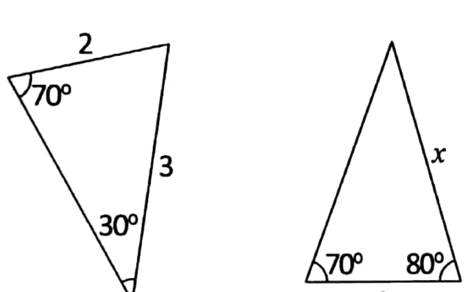
$$\frac{x}{3} = \frac{5}{4}\,;\quad x = \frac{5}{4}(3) = \frac{15}{4} \text{ (Respuesta)}$$

Ejercicio 2.2. Encuentre el valor de x.

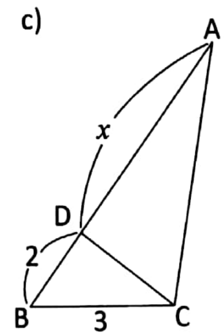
a)



b)



c)



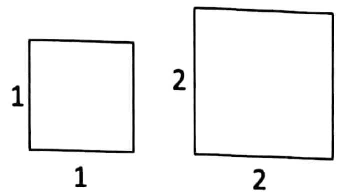
$\angle BAC \cong \angle BCD$

Clase 2. Semejanza y razón de área

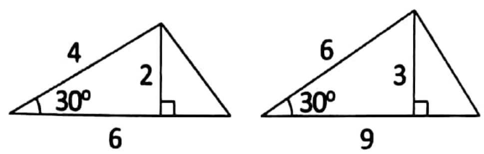
Ejemplo 2.3.

a) Encuentre la razón de semejanza en (1) y (2).
b) Encuentre la razón de área en (1) y (2).
c) ¿Qué observa?

(1)



(2)



Solución: a) (1) $\frac{2}{1} = 2$ (2) $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) (1) $\frac{2^2}{1^2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$ (2) $\dfrac{\frac{1}{2}(9)(3)}{\frac{1}{2}(6)(2)} = \left(\frac{9}{6}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

c) La razón de área = (La razón de semejanza)^2

La relación de arriba se aplica a cualquier figura.

En (2) si k es la razón de semejanza,

$k = \frac{9}{6} = \frac{6}{4}$

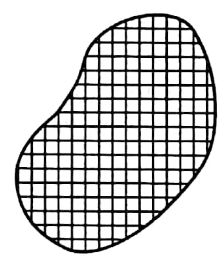
$9 = 6k$; $6 = 4k$; $3 = 2k$

El área del triángulo de derecho

$= \frac{1}{2}(9)(3) = \frac{1}{2}(6k)(2k)$

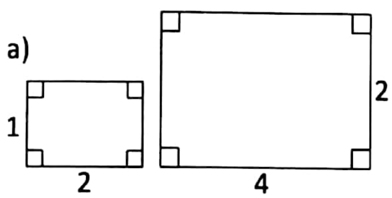
= (El de izquierdo) x (k^2)

Es porque se puede evaluar el área por conjunto de cuadrados con cualquier exactitud.

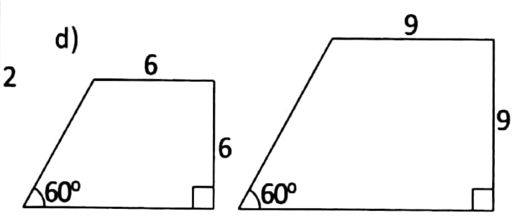


Ejercicio 2.3. Encuentre la razón de área. En cada caso las dos figuras son semejantes.

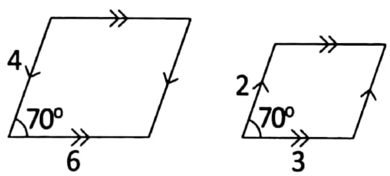
a)



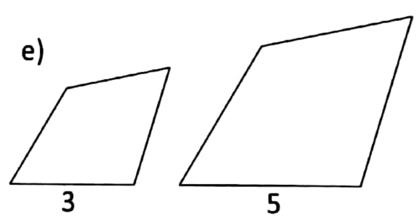
d)



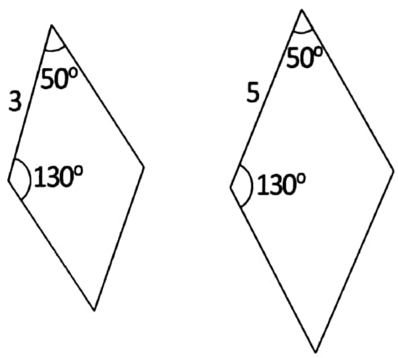
b)



e)



c)



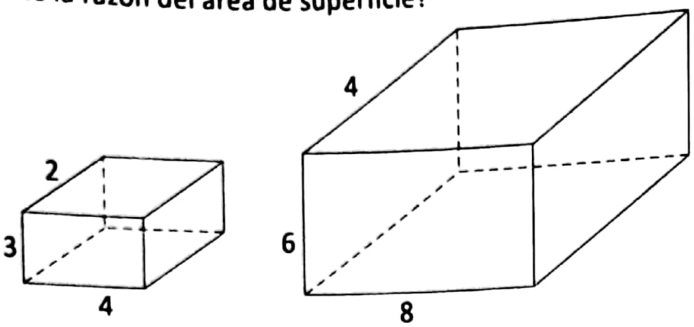
Clase 3. Semejanza y razón de volumen y área de superficie

Ejemplo 2.4.

a) ¿Cuál es la razón de semejanza de los paralelepípedos rectangulares?

b) ¿Cuál es la razón de volumen?

c) ¿Cuál es la razón del área de superficie?



El volumen del paralelepípedo rectangular es (largo) x (ancho) x (altura)

Solución: a) $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = 2$

b) $\frac{8(4)(6)}{4(2)(3)} = \frac{8}{4}\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{3}\right) = 2^3 = 8$

c) La razón de área de cada cara = (La razón de semejanza)^2 = 2^2 = 4
Por lo tanto, la razón de área de superficie es 4

La razón de arriba se aplica a todos los sólidos

> La razón de volumen = (la razón de semejanza)^3
> La razón de área de superficie = (La razón de semejanza)^2

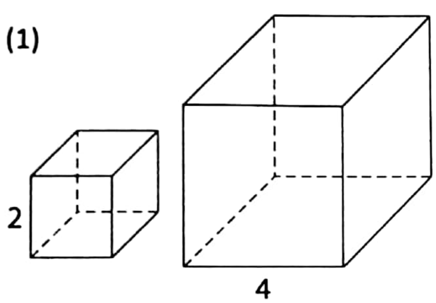
Ejercicio 2.4.

a) Encuentre la razón de volumen.

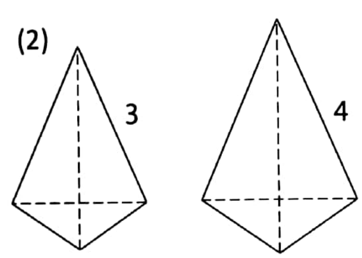
b) Encuentre la razón de área de superficie.

En cada caso los sólidos son semejantes

(1)



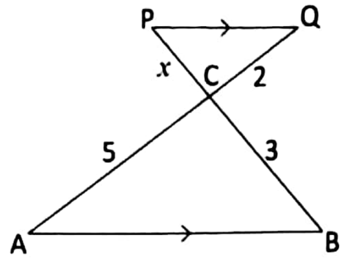
(2)



Ejercicios de la lección

1) En la figura $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$.

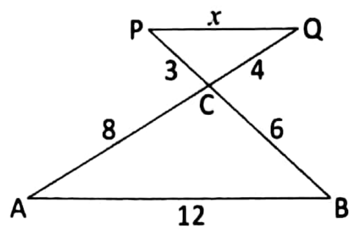
   a) Demuestre que $\Delta CAB \sim \Delta CQP$.
   b) Encuentre el valor de x.



Clase 1

2) En la figura

   a) Demuestre que $\Delta CAB \sim \Delta CQP$.
   b) Encuentre el valor de x.

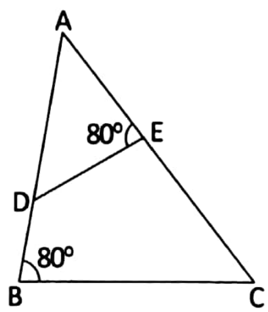


Clase 1

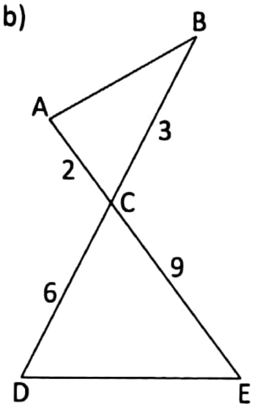
3) En cada uno de los dibujos, indique los triángulos semejantes y el criterio de semejanza utilizado.

Clase 1

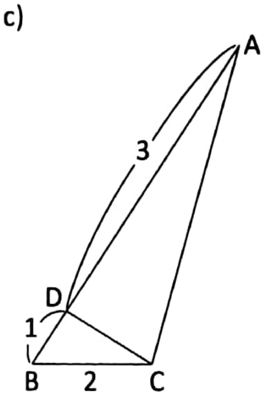
a)



b)



c)



Matemáticas III

Unidad II

Límites y continuidad

- Lección 1: Límite de funciones
- Lección 2: Continuidad de funciones
- Lección 3: Asíntotas

Algo de historia

Julius Wilhelm Richard Dedekind
(1831 – 1916)

Dedekind fue un matemático alemán. Nació y falleció en Brunswick. Su campo de especialización es álgebra y teoría de números. Con relación al tema de esta unidad, el definió rigurosamente el conjunto de los números reales y estableció la continuidad de los números reales así dando el fundamento de análisis que empezó con el descubrimiento del cálculo infinitesimal, pero venía careciendo de fundamento.

Para esta meta él utilizó los conjuntos llamados corte de los números racionales como lo siguiente: Se divide el conjunto de los números racionales en dos subconjuntos A y B no vacíos de modo que los números que pertenece a A son menor que los de B.

Entonces hay tres casos. a) En A existe un número que es mayor que cualquier otro número de A y en B no existe el mínimo número. b) En B existe el mínimo número y en A no existe el máximo número. c) En A no existe el máximo número y en B tampoco existe el mínimo número. En c) el par de subconjuntos define un número irracional. Después de añadir los números irracionales al conjunto de los números racionales, en el corte de estos números siempre ocurre sólo los casos a) y b), lo que es la continuidad de los números reales.

Fuente: E. T. Bell: Men of mathematics

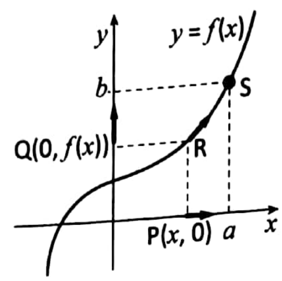
Nota: a partir de esta unidad se utiliza la unidad de medida radián para medir los ángulos.
Términos y notación: sean a y b números reales tal que $a < b$

Intervalo abierto	$(a, b) = \{x; a < x < b\}$
Intervalo cerrado	$[a, b] = \{x; a \leq x \leq b\}$
Intervalo semi abierto	$(a, b] = \{x; a < x \leq b\}$
	$[a, b) = \{x; a \leq x < b\}$

Lección 1. Límite de funciones

Clase 1. Definición de límite de funciones

Explicación 1. En la figura, en el eje x el punto P $(x, 0)$ tiende al punto $(a, 0)$, pero no alcanza a este punto. En la gráfica el punto R que corresponde al punto P tiende al punto S. En el eje y el punto Q $(0, f(x))$ que corresponde al punto R y representa el valor de $f(x)$ tiende al punto $(0, b)$.



En resumen, cuando x tiende sin límite a a tomando valores diferentes de a, $f(x)$ tiende sin límite a b.

No es necesario que $f(x)$ esté definida en $x = a$.

Se expresa esta situación como: "$f(x)$ converge a b" y se denota mediante:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

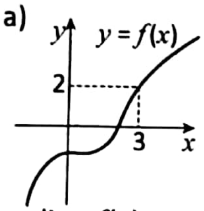
También se utiliza la siguiente notación:

$$\boxed{f(x) \to b \quad (a \to x)}$$

El valor de b se le llama **límite** de $f(x)$ cuando x tiende sin límite a a.

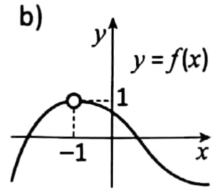
Ejercicio 1.1. Encuentre los límites:

a)



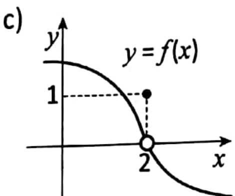
$\lim_{x \to 3} f(x)$

b)



$\lim_{x \to -1} f(x)$

c)

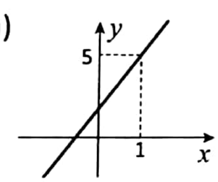


$\lim_{x \to 2} f(x)$

En b) $f(x)$ no está definida en $x = -1$; en c) $f(2) = 1$

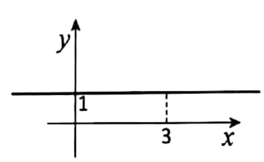
Ejemplo 1.1. Encuentre los límites: a) $\lim_{x \to 1} (2x + 3)$ b) $\lim_{x \to 3} 1$

Solución: a)



de gráfica se ve que
$\lim_{x \to 1} (2x + 3) = 5$

b)



$\lim_{x \to 3} 1 = 1$

De b) se ve que:

$$\boxed{\lim_{x \to a} c = c \quad (c\text{: constante})}$$

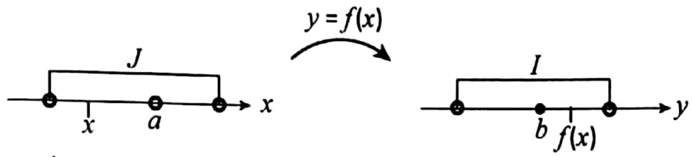
Ejercicio 1.2. Encuentre el límite:

a) $\lim_{x \to 2} (x-3)$ b) $\lim_{x \to 2} (-5)$ c) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x$ d) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \cos x$

e) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x$ f) $\lim_{x \to 2} 10^x$ g) $\lim_{x \to 1} \log_2 x$ h) $\lim_{x \to 4} \sqrt{x}$

*** Explicación 2.** $\lim_{x \to a} f(x) = b$ equivale lo siguiente:

Cuando está dado un intervalo abierto I que contiene el valor de b, existe un intervalo abierto J tal que: $x \in J, x \neq a \Rightarrow f(x) \in \mathrm{I}$



Para el tratamiento más riguroso, hay que definir el límite de tal manera que explica el sentido de "tender sin límite".

En la figura de arriba puede limitarse I y J en la forma:

$\mathrm{I} = (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \{y;\ |y-b| < \varepsilon\}$

$J = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = \{x;\ 0 < |x-a| < \delta\}$

con los números positivos ε y δ.

Entonces la definición tiene la siguiente forma:

Definición de límite de funciones.

Sea $f(x)$ una función definida alrededor de $x = a$ salvo en a. Se denota $\lim_{x \to a} f(x) = b$ cuando se verifica lo siguiente:

Para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

Esta forma es uno de los resultados de la actitud crítica del siglo XIX, hacia la base del cálculo infinitesimal que data del siglo XVII.

Clase 2. Propiedades del límite

Propiedades del límite:

Sean α, β y k números reales, $f(x)$ y $g(x)$ funciones. Se supone que existen $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ y $\lim_{x \to a} f(x) = \beta$.

a) $\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$

b) $\lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$

c) $\lim_{x \to a} \{kf(x)\} = k\alpha$

d) $\lim_{x \to a} \{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$

e) Si $\beta \neq 0$, entonces $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Para la demostración se utiliza la definición de la Explicación 2 de la Clase 1.

Nota: Uttilizando d) y e) repetidamente se tiene que:

f) $\lim_{x \to a} \{f(x)\}^n = \alpha^n$ (n: número entero)

*** Explicación.** sobre la demostración: se utilizan las siguientes relaciones:

a) $|\{f(x) + g(x)\} - (\alpha + \beta)| \le |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta|$

b) $|\{f(x) - g(x)\} - (\alpha - \beta)| \le |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta|$

c) $|kf(x) - k\alpha| \le |k|\ |f(x) - \alpha|$

d) $|f(x)g(x) - \alpha\beta| \le |f(x) - \alpha|\{|g(x) - \beta| + \beta\} + |\alpha|\,|g(x) - \beta|$

e) $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{\alpha}{\beta}\right| \le \dfrac{|f(x) - \alpha||\beta| + |\alpha||g(x) - \beta|}{|\beta|\{|\beta| - |g(x) - \beta|\}}$

Donde $|g(x) - \beta| < |\beta|$

Tenga en cuenta las siguientes relaciones:
$|s + t| \le |s| + |t|$
$|s\,t| = |s|\,|t|$
$|g(x)| = |g(x) - \beta + \beta|$
$\le |g(x) - \beta| + |\beta|$
$|g(x)| = |g(x) - \beta + \beta|$
$\ge |\beta| - |g(x) - \beta|$
Cuando
$|\beta| \ge |g(x) - \beta|$

Ejemplo 1.2. Encuentre los límites: a) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x + 4)$ b) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 1}{x}$

Solución: a) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x + 4)$

$= \lim_{x \to 2} x^2 - \lim_{x \to 2} 3x + \lim_{x \to 2} 4$ por a) y b)

$= (\lim_{x \to 2} x)^2 - 3 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 4$ por f) y d)

$= 2^2 \quad - 3\,(2) \quad + 4$

$= 2$

Este valor equivale a $f(2)$, donde $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

b) $\lim_{x \to 3} x = 3 \ne 0$, por lo tanto $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \to 3} (x^2 - 1) \div \lim_{x \to 3} x = \dfrac{8}{3}$

Nota: de a) se ve los siguientes:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ donde $f(x)$ es un polinomio de x

Ejercicio 1.3. Encuentre el límite:

a) $\lim_{x \to 1} 2x^3$ b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{2x - 1}$ c) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x + 1}{x^2}$ d) $\lim_{x \to -1} x^3\, 2^x$

Clase 3. Cálculo del límite donde el denominador converge a 0

Ejemplo 1.3. Encuentre el límite: $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

Solución. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x + 3)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 3) = 4$

Transforme la función en la forma donde el denominador no converge a 0.

Ejercicio 1.4. Encuentre el límite.

a) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ c) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 + x - 1}{2x - 1}$ d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x}{x}$

*e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ *f) $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 27}{x + 3}$ *g) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 2}$

Ejemplo 1.4. Encuentre el límite: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Solución 1: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = 2$

Solución 2: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = 2$

En el Ejemplo 1.4 solución 1 aplique la racionalización del denominador.

En el Ejemplo 1.4 solución 2 aplique la factorización al numerador.
$x-1 = (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$

Ejercicio 1.5. Encuentre el límite:

a) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ b) $\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ c) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

d) $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$ *e) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+\sqrt{x}-2}$

Ejemplo 1.5. Encuentre el valor de a y b que satisfacen $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-b}{x-1} = 3$

Solución: $\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b) = \lim_{x\to 1}\left\{\frac{x^2+ax+b}{x-1}\cdot(x-1)\right\}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-b}{x-1} \quad \lim_{x\to 1}(x-1)$ por d) de la Clase 2.

$= 3\cdot 0 = 0.$

Por lo tanto, como x tiende a 1 (se sustituye convenientemente en x^2+ax+b)

$a+b+1=0.$

Luego, $x^2+ax+b = x^2+ax+(-a-1)$ Sustituyendo $b=-a-1$
$= (x-1)(x+a+1)$. Entonces,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-b}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+a+1) = a+2,$$

Por lo tanto, $a+2=3$, $a=1$. Respuesta: $a=1$, $b=-2$

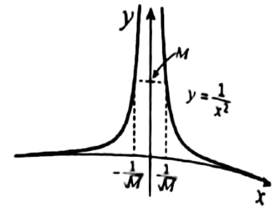
Si el denominador converge a 0 y existe el límite, entonces el numerador converge en 0.

Ejercicio 1.6. Encuentre el valor de a y b que satisfacen la igualdad:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2} = 3$ b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+ax+b}{x+1} = -4$

c) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax+b}{x+2} = 2$

Clase 4. Divergencia



Ejemplo 1.6. Describa el cambio del valor de $\frac{1}{x^2}$ cuando x tiende al 0.

Solución: si $x \to 0$, entonces $x^2 > 0$ y tiende al 0. Por lo tanto, el valor de $\frac{1}{x^2}$ aumenta sin límte.

En efecto, a cualquier número positivo M, si se toma x en $(-\frac{1}{\sqrt{M}}, 0)$ o $(0, \frac{1}{\sqrt{M}})$, entonces se tiene que $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2} = M.$

Cuando se escribe $x \to a$, x no toma el valor de a.

Si el valor de $f(x)$ aumenta sin límite cuando $x \to a$, entonces se expresa que $f(x)$ **diverge al infinito positivo** y se denota mediante

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty}$$

El símbolo ∞ no es un número, tampoco se llama límite.

De la misma manera si el valor de $f(x)$ disminuye sin límite cuando $x \to a$, entonces se expresa que $f(x)$ **diverge al infinito negativo** y se denota mediante.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty}$$

Ejercicio 1.7. Investigue si converge o diverge.

a) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ b) $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ c) $\lim_{x\to 1}(x-1)^2$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan^2 x$

Propiedades de divergencia

a) $f(x) > 0$ y $\lim_{x\to a} f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \infty$

$f(x) < 0$ y $\lim_{x\to a} f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = -\infty$

b) $f(x) \leq g(x)$, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

$g(x) \leq f(x)$, $\lim_{x\to a} f(a) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \{-f(x)\} = -\infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \{-f(x)\} = \infty$

d) $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ o ∞, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = \infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ o $-\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = -\infty$

e) $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha > 0$ o ∞, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \{f(x)\, g(x)\} = \infty$

f) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ o $-\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = 0$

Se omite la demostración.

Ejemplo 1.7. Encuentre $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} x \tan^2 x$.

Se utiliza la propiedad e).

Solución: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{2} > 0$ y $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan^2 x = \infty$. Por lo tanto

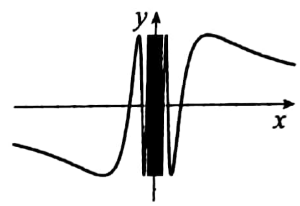
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} x \tan^2 x = \infty$$

Ejercicio 1.8. Calcule:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x^2}$ b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x-2}{\cos^2 x}$ c) $\lim_{x \to 0} \frac{x+1}{\operatorname{sen}^2 x}$ d) $\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{(x-3)^2}$

Ejemplo 1.8. Investigue los valores de $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ cuando $x \to 0$.

Solución: $|\operatorname{sen} \frac{1}{x}| \leq 1$. Por otra parte, para cada número $b \in [-1, 1]$, hay valores de x en cualquier cercanía del 0 que satisface $\operatorname{sen} \frac{1}{x} = b$



$y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Del Ejemplo 1.8 se sabe que $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no converge cunado $x \to 0$.

En este caso se dice que $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ **diverge** cuando $x \to 0$.

Ejercicio 1.9. Investigue si $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ converge o no.

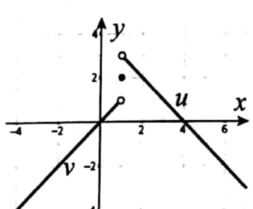
Clase 5. Límites laterales

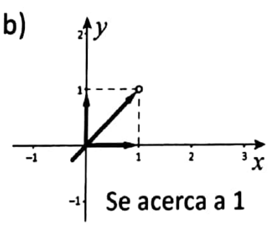
Ejemplo 1.9. La función $f(x)$ está definida como lo siguiente:

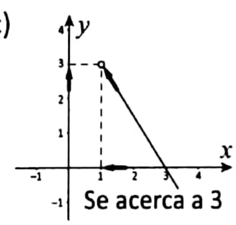
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{cuando } x < 1 \\ 2 & \text{cuando } x = 1 \\ -x + 4 & \text{cuando } 1 < x \end{cases}$$

a) Dibuje la gráfica de $y = f(x)$.
b) Investigue el valor de $f(x)$ cuando x < 1 y se acerca a 1.
c) Investigue el valor de $f(x)$ cuando $1 < x$ y se acerca a 1.

Solución:

a)


b)


c)


En b) del Ejemplo 1.9, al número 1 se le llama **límite por la izquierda** y se denota mediante $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$.

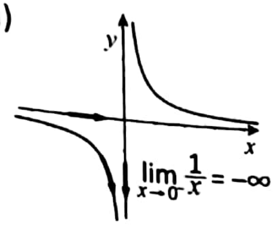
En c) al número 3 se le llama **límite por la derecha** y se denota mediante $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$.

Se aplica la notación similar cuando la función diverge. Se verifican las mismas propiedades que el límite anterior.

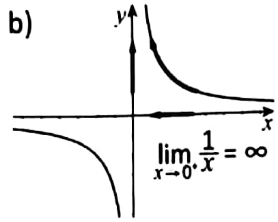
Ambas se les llama **límite lateral**.

Ejemplo 1.10. Calcule. a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$

Solución: a)



b)



Ejercicio 1.10. Encuentre los límites.

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x$ b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ c) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3}$ d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3}$

Ejemplo 1.11. Se define una función que se denota mediante $[\![x]\!]$ como lo siguiente:

$$[\![x]\!] = n \quad \text{si} \quad n \in \boldsymbol{Z} \text{ y } n \leq x < n + 1$$

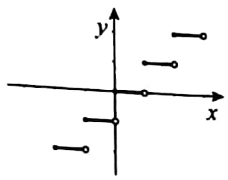
Es decir $[\![x]\!]$ representa el número entero máximo que no sobrepasa x.

a) Dibuje la gráfica de $y = [\![x]\!]$.

b) Encuentre $\lim\limits_{x \to 1^-} [\![x]\!]$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} [\![x]\!]$.

Se le llama esta función "función de parte entera".
Ejemplo: $[\![2]\!] = 2$, $[\![2.9]\!] = 2$, $[\![-1.3]\!] = -2$

Solución: a)



b) $\lim\limits_{x \to 1^-} [\![x]\!] = 0$ c) $\lim\limits_{x \to 1^+} [\![x]\!] = 1$

Ejercicio 1.11. Encuentre el límite lateral.

a) $\lim\limits_{x \to 3^-} [\![x]\!]$ b) $\lim\limits_{x \to 3^+} [\![x]\!]$ c) $\lim\limits_{x \to -2^-} [\![x]\!]$ d) $\lim\limits_{x \to -2^+} [\![x]\!]$

e) $\lim\limits_{x \to 0^-} [\![x]\!]$ f) $\lim\limits_{x \to 0^+} [\![x]\!]$ *g) $\lim\limits_{x \to -1^-} [\![x^2]\!]$ *h) $\lim\limits_{x \to -1^+} [\![x^2]\!]$

Para g) y h) contruya la gráfica de $f(x) = [\![x^2]\!]$.

Entre el límite y el límite lateral existe la siguiente relación:

> $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existen y coinciden.
>
> En este caso $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Ejemplo 1.12. Se define la función $f(x)$ como lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 3x - 6 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Investigue si $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe.

Solución: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^3 - x^2) = 4$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + 3x - 6) = 4$

Concuerdan, luego $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe.

Ejercicio 1.12. La función $f(x)$ está definida como lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 4x & \text{si } -2 \leq x \end{cases}$$

Investigue si $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ existe.

Clase 6. Límites en el infinito

Ejemplo 1.13. Investigue el cambio de valor de $\frac{1}{x}$ cuando:
a) x aumenta sin límite.
b) $x < 0$ y $|x|$ aumenta sin límite.

Solución: a) $\frac{1}{x} \to 0$ b) $\frac{1}{x} \to 0$

Se denota el fenómeno de a) mediante $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ y el b) mediante $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Se le llama a $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ límite en el infinito positivo y al $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ límite en el infinito negativo.

Ejercicio 1.13. Encuentre el límite:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$ b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$ c) $\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x}$

Los límites en el infinito tienen las mismas propiedades que las de la Clase 2 y 4.

Ejemplo 1.14. Sean $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$ y $g(x) = b_0 x^m + bx^{m-1} + \cdots + b_m \quad (b_0 \neq 0)$ polinomios.

Encuentre $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ en los siguientes casos:

a) $n > m$ b) $n = m$ c) $n < m$

Solución: $\frac{f(x)}{g(x)} = x^{n-m}\,\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}}$ y $\lim_{x\to\infty}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$

a) $\lim_{x\to\infty} x^{n-m} = \infty$, por lo tanto $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & \text{si } \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty & \text{si } \frac{a_0}{b_0} < 0 \end{cases}$

b) $\lim_{x\to\infty} x^{n-m} = 1$, por lo tanto $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0}$

c) $\lim_{x\to\infty} x^{n-m} = 0$, por lo tanto $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Ejercicio 1.14. En el Ejemplo 1.14, encuentre $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ en los siguientes casos:

a) $n > m$ b) $n = m$ c) $n < m$

Ejercicio 1.15. Encuentre el límite.

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + 5x + 2}{x^2 - x + 1}$ b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2 + 5x}{3x^2 - 4x + 1}$ c) $\lim_{x\to\infty}\frac{x - 5}{3x^2 - 4x + 1}$

d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3 + 5x + 1}{-x + 3}$ e) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2 + 1}{3x^4 + 5x + 2}$ f) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2 - 2x + 1}{-x^2 + x}$

Ejemplo 1.15. Calcule: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x^2)$

Veáse Clase 4, inciso e)

Solución: $x^3-x^2=x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^3=\infty$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x^2)=\infty$

Ejercicio 1.16. Calcule

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x^2)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-3x^2)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x})$

Ejemplo 1.16. Encuentre el límite: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$

Aplique la racionalización del denominador

Solución: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\right\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=0$$

Ejercicio 1.17. Encuentre el límite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

Clase 7. Funciones exponenciales y logarítmicas en el infinito

La siguiente propiedad es fundamental:

a) Sea n número entero.
Si $a>1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}x^n a^x=\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n a^x=0$

Se puede demostrar a) utilizando el Teorema del binomio.

De a) se deduce las siguientes fórmulas:

Sea n número entero,

b) Si $0<a<1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}x^n a^x=0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n a^x=\begin{cases}\infty & n\text{: par}\\ -\infty & n\text{: impar}\end{cases}$

c) Si $1<c$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}x^n\log_c x=\begin{cases}\infty & (0\le n)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$

d) Si $0<c<1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}x^n\log_c x=\begin{cases}-\infty & (0\le n)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$

e) Si $1<c$, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+}x^n\log_c x=\begin{cases}0 & (0<n)\\ -\infty & (n\le 0)\end{cases}$

f) Si $0<c<1$, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+}x^n\log_c x=\begin{cases}0 & (0<n)\\ \infty & (n\le 0)\end{cases}$

* **Ejercicio 1.18.** Deduce b) a f) de a)

Ejemplo 1.17. Calcule:

a) $\lim_{x\to\infty} (x^3 - x^2)\, 3^x$ b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log_3 x}{x^2+3x}$

Solución:

a) $(x^3 - x^2)\, 3^x = (1 - \frac{1}{x})(x^3\, 3^x)$. Como $\lim_{x\to\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1$

y $\lim_{x\to\infty} (x^3\, 3^x) = \infty$, se tiene que $\lim_{x\to\infty} (x^3 - x^2)\, 3^x = \infty$

Veáse Clase 4 inciso e)

b) $\dfrac{\log_3 x}{x^2+3x} = \dfrac{1}{1+\frac{3}{x}}\, \dfrac{\log_3 x}{x^2}$. Como $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{3}{x}} = 1$ y $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log_3 x}{x^2} = 0$

Veáse Clase 2 inciso d)

Se tiene que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log_3 x}{x^2+3x} = 1 \cdot 0 = 0$

Ejercicio 1.19. Calcule.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{x^4 - x + 1}$ b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{x+3}$ c) $\lim_{x\to-\infty} (x^4 + 2x)\, 2^x$

d) $\lim_{x\to 0^+} (x^2 + x)\log_2 x$

Clase 8. Límite de funciones trigonométricas

Propiedad del límite 2

a) Sean $f(x) \le g(x)$ en la cercanía del número a, salvo en a. Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$.

b) Sean $g(x) \le f(x) \le h(x)$ en la cercanía del número a, salvo en a. Si existen $\lim_{x\to a} g(x)$ y $\lim_{x\to a} h(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x)$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.

Se omite la demostración.

*** Ejercicio 1.20.** Dé un ejemplo en que $f(x) < g(x)$ en la cercanía de a salvo en a y que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.

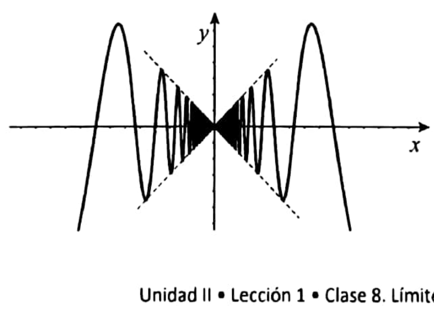
Ejemplo 1.18. Encuentre $\lim_{x\to 0} x \text{ sen } \frac{1}{x}$.

Solución: Como $-1 \le \text{sen } \frac{1}{x} \le 1$, se tiene que $-|x| \le x \text{ sen } \frac{1}{x} \le |x|$

Ahora $\lim_{x\to 0} |x| = \lim_{x\to 0} (-|x|) = 0$

Por lo tanto $\lim_{x\to 0} x \text{ sen } \frac{1}{x} = 0$

[Por la propiedad b)]



$-1 \le \text{sen } \frac{1}{x} \le 1,\ 0 < |x|$

$\Rightarrow -|x| \le |x| \text{ sen } \frac{1}{x} \le |x|$.

Si $x > 0$

$-|x| \le x \text{ sen } \frac{1}{x} \le |x|$.

Si $x < 0$

$-|x| \le -x \text{ sen } \frac{1}{x} \le |x|$.

Luego $|x| \ge x \text{ sen } \frac{1}{x} \ge -|x|$.

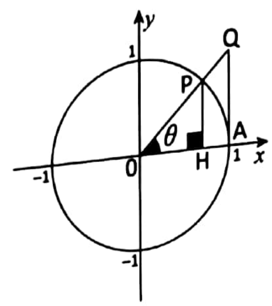
Ejercicio 1.21. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos \frac{1}{2x}$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Teorema 1.1. $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

Este Teorema es el fundamento del cálculo infinitisimal de las funciones trigonometricas. Es esencial que la unidad de medida del ángulo es radián.

Demostración: En la figura $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, PH = sen θ y QA = tan θ. Por lo tanto, se tiene que:



El área S1 del ΔOPA = $\frac{1}{2}$ sen θ.

El área S2 de la forma abanico OPA es $\frac{1}{2}\,\theta$.

El área S3 del ΔOAQ = $\frac{1}{2}$ tan θ.

Como S1 < S2, se tiene que $\operatorname{sen}\theta < \theta$ ... (1)

Como S2 < S3, se tiene que $\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ ... (2)

Ahora, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, por lo tanto $0 < \cos\theta$.

Luego de (1) y (2) se tiene que,

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1 \qquad \text{... (3)}$$

Cuando $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, se tiene que $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$ y

sustituyendo $-\theta$ en (3), se tiene que;

$$\cos(-\theta) < \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} < 1\text{, es decir } \cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1.$$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

Es decir, se verifica (3) para $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$.

Ahora $\lim\limits_{x \to 0} \cos\theta = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$. Luego por la propiedad b)

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$$

Clase 9. Aplicando el teorema 1.1

Ejemplo 1.19. Calcule: $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\tan\theta}{\theta}$

Solución: $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\tan\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos\theta} \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 \cdot 1 = 1$$

Veáse Clase 2 inciso d)

Ejercicio 1.22. Calcule.

a) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ b) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\theta}{\tan\theta}$

De ahora en adelante se utilizará el resultado de a) y el Teorema 1.1 indistintamente.
La variable puede ser cualquier letra.

Ejemplo 1.20. Calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$

Solución: Sea $\frac{\pi}{2} - x = t$. Entonces $t \to 0 \Leftrightarrow x \to \frac{\pi}{2}$ y

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t,$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$

Ejercicio 1.23. Calcule. a) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\pi - x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \dfrac{x + \frac{\pi}{2}}{\cos x}$

Ejemplo 1.21. Calcule. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

Solución: a) Sea $2x = \theta$. Entonces $x \to 0 \Leftrightarrow \theta \to 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \cdot 2 = 2 \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 2 \cdot 1 = 2$$

b) Sea $2x = \alpha$ y $3x = \beta$. Entonces $x \to 0 \Leftrightarrow \alpha \to 0 \Leftrightarrow \beta \to 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\operatorname{sen} 3x} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \lim_{\beta \to 0} \frac{\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Si se puede, calcule sin utilizar α y β: $\frac{2}{3} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{\operatorname{sen} 3x} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}$

Ejercicio 1.24. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan 2x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\tan 4x}$ e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{\pi}{4} - x}{\cos 2x}$

Ejercicios de la lección

1. Encuentre el límite. Clase 2

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^3+2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}3^{\sqrt{x-1}}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\log_3\dfrac{x^3-x+2}{x^2+1}$

2. Calcule. Clase 3

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+1}}$

3. Encuentre el valor de a y b que satisfacen la igualdad. Clase 3

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=4$ b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2+ax+b}=-\dfrac{1}{5}$

*c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x^2+ax+b}=\dfrac{3}{10\sqrt{5}}$

4. Calcule. Clase 4

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{|\cos x|}$

5. Calcule. Clase 5

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x(x-1)}$ c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{x^2-x-2}$

6. Calcule. Clasde 6

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-x}{2x^3-2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x}{x^3-x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2x^2+x}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2+2x}\right)$

7. Calcule. Clase 7

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2^x}{x^5}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}x^4\,3^x$ c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\log_2 x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\log_2 x$

e) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3^x}{\log_2 x}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty}(2^x-x^3)$ g) $\lim\limits_{x\to \infty}(x-\log_{\frac{1}{3}}x)$

8. Calcule. Clase 8

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\cos x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\log_2 x}$

9. Calcule. Clase 9

a) $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}$ b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\tan x}{x-\pi}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen} 4x}$

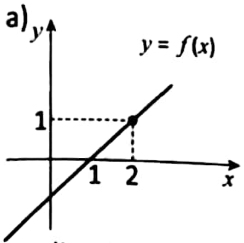
d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 3x}$ e) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$

Lección 2. Continuidad de funciones

Clase 1. Continuidad en el punto

Ejemplo 2.1. Encuentre lo que se pide.

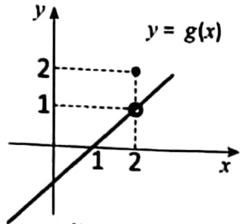
a)



$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$f(2)$

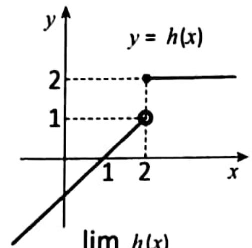
b)



$\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

$g(2)$

c)



$\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

$h(2)$

El signo "∘" significa que el punto no pertenece a la gráfica. El signo "•" significa que sí pertenece a la gráfica.

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$ b) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 1$ c) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ no existe

$f(2) = 1$ $g(2) = 2$ $h(2) = 2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = 2$

En el Ejemplo 2.1 solo $f(x)$ es continua en 2.

$f(x)$ debe ser definida en a y su alrededor.

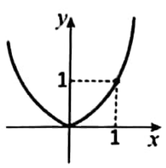
Definición. Continuidad en el punto

Sea $y = f(x)$ una función, $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

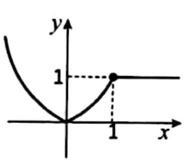
Nota: Aplicando la Explicación 2 de la Clase 1.1 de la Lección 1, la definición tiene la forma siguiente: $f(x)$ es continua en el punto a, cuando se verifica lo siguiente: Para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe número $\delta > 0$ tal que $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon$.

Ejercicio 2.1. Elija las gráficas de funciones que son continuas en $x = 1$

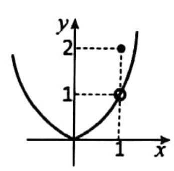
a)



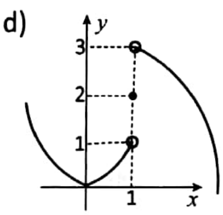
b)



c)



d)



Propiedad de la continuidad

Si $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son continuas en $x = a$, entonces las siguientes son continuas en $x = a$:

a) $y = f(x) + g(x)$

b) $y = f(x) - g(x)$

c) $y = kf(x)$, (k:número real)

d) $y = f(x)g(x)$

e) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a) \neq 0)$

Demostración de que $y = f(x) + g(x)$ es continua.
De hipótesis $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$.
De a) de la Clase 1.2, se tiene que:

$$\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = f(a) + g(a).$$

Ejercicio 2.2. Demuestre la continuidad de los demás casos de la propiedad.

Clase 2. Continuidad en el intervalo

Definición de continuidad en el intervalo

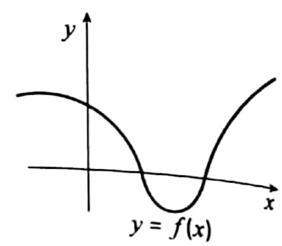
$f(x)$ es continua en $x = a$ del intervalo $[a, b)$ cuando $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

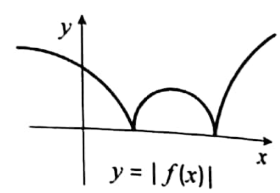
$f(x)$ es continua en $x = b$ del intervalo $(a, b]$ cuando $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo, cuando es continua en todos los puntos del intervalo

[A]

Intuitivamente la continuidad significa que la gráfica no está cortada.





Propiedad de las funciones continuas.
Funciones continuas tienen la misma propiedad que se explicó en la clase 1.
Además:

f) Si $f(x)$ es continua, entonces $|f(x)|$ lo es.
g) Si $f(x)$ es continua, entonces $\sqrt{f(x)}$ lo es donde $f(x) \geq 0$
h) Si $f(x)$ es continua y tiene su inversa f^{-1}, entonces f^{-1} lo es

Ejemplos de funciones continuas:
1. Funciones polinómicas.
2. Funciones racionales.
3. Funciones trigonométricas y sus inversas.
4. Funciones exponenciales y logarítmicas

Definición Valor máximo y mínimo
El valor M (respectivamente m) es el máximo (respectivamente mínimo) de la función $y = f(x)$ cuando:

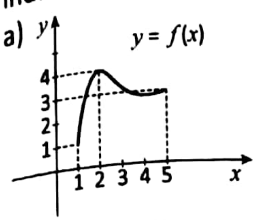
$f(x) \leq M$ [respectivamente $m \leq f(x)$] en su dominio.
Existe un valor $x = a$ en su dominio tal que $f(a) = M$ (respectivamente $f(a) = m$).

Teorema Valor máximo y mínimo de la función continua.
Si una función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado, entonces esta función tiene valor máximo y mínimo en este intervalo.

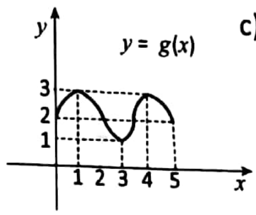
[B]

La condición "cerrado" es crucial como se ve en el Ejemplo 2.2.
Se omite demostración.

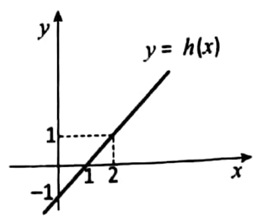
Ejemplo 2.2. Encuentre el valor máximo y/o mínimo en el intervalo indicado si existen.

a)


En [1, 5]

b)


En [0, 5]

c)


En [0, 2], (0, 2], (0, 2)

Solución: a) máximo $f(2) = 4$, mínimo $f(1) = 1$

b) máximo $g(1) = g(4) = 3$, mínimo $g(3) = 1$

c) En [0, 2] máximo $h(2) = 1$, mínimo $h(0) = -1$

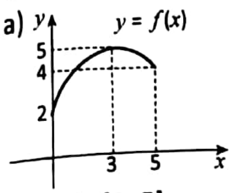
En (0, 2] máximo $h(2) = 1$, mínimo no existe.

En (0, 2) máximo no existe, mínimo no existe.

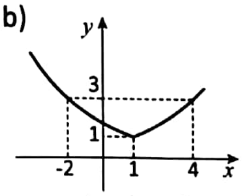
Cuando se trata de máximo y mínimo se indica el valor de x donde la función toma estos valores.

El mínimo no existe porque $h(x)$ toma valores mayores que -1 y que están en cualquier cercanía de -1.

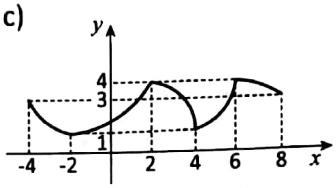
Ejercicio 2.3. Encuentre el valor mínimo y/o máximo en el intervalo indicado si existen.

a)


En [0, 5]

b)


En (-2, 4]

c)


En [-4, 8]

Clase 3. Teorema del valor intermedio

Teorema del valor intermedio
Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$. Sea $f(a) \neq f(b)$ y $f(a) < k < f(b)$ o $f(b) < k < f(a)$, entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = k$.

Se omite la demostración, para la cual hay que definir el conjunto de números reales de manera rigurosa.

Ejemplo 2.3. Demuestre que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo (1, 2).

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$. La función $y = f(x)$ es continua en [1, 2].
Por otra parte $f(1) = -1$ y $f(2) = 3$.
Como $f(1) < 0 < f(2)$, por el Teorema del valor medio existe c en (1, 2) tal que $f(c) = 0$.

Ejercicio 2.4. Demuestre que cada ecuación tiene solución en el intervalo indicado.

a) $2x^3 + x^2 - 4 = 0$ (1, 2)

b) $\log_2 x + x - 2 = 0$ (1, 2)

c) $2^x - 3x = 0$ (3,4)

d) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x + 1 = 0$ $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

Clase 3

Ejercicios de la lección

1. Demuestre que la ecuación tiene solución en el intervalo indicado.
   a) $x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0 \quad (1, 2)$
   b) $\log_{\frac{1}{2}} x + 2x - 3 = 0 \quad (1, 4)$
   c) $(\frac{1}{3})^x - 2x = 0 \quad (0, 1)$
   d) $\cos x - 2x = 0 \quad (0, \frac{\pi}{4})$

Lección 3. Asíntotas

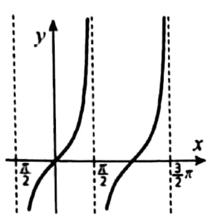
Clase 1. Asíntotas

Se le denomina **asíntota** a una recta a la cual la gráfica se acerca sin límite y sin tocarla.

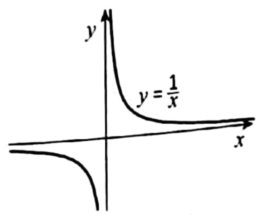
Este tipo de asíntotas aparece en el límite del dominio de la función.

Ejemplos de asíntotas verticales:

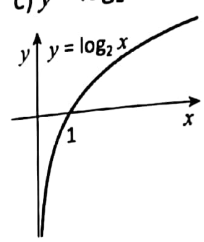
a) $y = \tan x$



b) $y = \frac{1}{x}$



c) $y = \log_2 x$



Asíntotas verticales

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

(n: número entero)

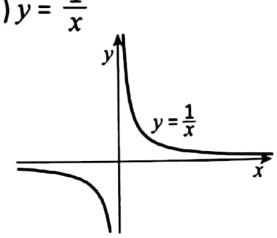
$x = 0$

$x = 0$

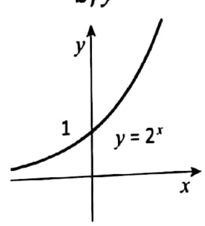
En b) $y = 0$ es la asíntota horizontal.

Ejemplos de asíntotas horizontales.

a) $y = \frac{1}{x}$



b) $y = 2^x$



Asíntotas horizontales

$y = 0$

$y = 0$

En la Unidad IV, se aprenderán otro tipo de asíntotas.

Ejercicio 3.1. Dibuje la gráfica. Encuentre la ecuación de la asíntota.

a) $y = \frac{1}{x} + 1$ b) $y = \frac{1}{x+1}$ c) $y = \sec x$ d) $y = 3^x - 1$ e) $y = \log_3 (x + 1)$

Problemas de la unidad A

Clase 1.7

1. Calcule.

   a) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \log_2 x$

   b) $\lim_{x \to \infty} x^2 2^{-\sqrt{x}}$

   c) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{3^{\sqrt{x}}}{x^2}$

Clase 2.3

2. Demuestre que la ecuación tiene solución en el intervalo indicado.

   a) $\log_{\frac{1}{3}} x - 2x = 0 \qquad (0, 1)$

   b) $\tan x = 3x \operatorname{sen} x \qquad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

Problemas de la unidad B

1. Demuestre que para cada número negativo k, la ecuación $\log_2 x = kx$ tiene solución en el intervalo (0, 1).

Matemáticas III

Unidad
III

Diferenciación e integrales de funciones polinómicas

- Lección 1: Derivadas de funciones polinómicas
- Lección 2: Aplicación de derivadas
- Lección 3: Integrales

Algo de historia

Isaac Newton
(1642 – 1727)

Newton fue un físico matemático inglés. Nació en Woolsthorpe el 25 de diciembre de 1642. Estudió en la Universidad de Cambridge, donde recibió la clase de Isaac Barrowa quien reconoció el talento de Newton. Durante los años 1664 y 1666, cuando estuvo en su casa natal para evitar peste, hizo tres descubrimientos magníficos, es decir el cálculo diferencial, la ley de la gravitación universal y la descomposición de la luz. Sus obras principales fueron: Philisofiae naturalis principia mathematica (Principios matemáticos de la filosofía natural) y Opticks (Óptica).

Su mayor contribución a la matemática es el descubrimiento del cálculo infinitesimal, el cual comparte con su contemporáneo Leibniz. En los siguientes siglos los matemáticos desarrollaron este método y ha sido uno de las herramientas matemáticas más útiles.

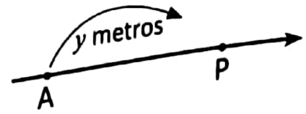
Newton falleció en Londres el 20 de marzo de 1727.

Fuente: E. T. Bell: Men of mathematics

Lección 1. Derivadas de funciones polinómicas

Clase 1. Velocidad en el instante

Ejemplo 1.1. En la recta numérica, un punto P sale del punto A y se mueve hacia la derecha. La distancia y metros, entre los puntos P y A después de x segundos está dada como $y = 2x$.

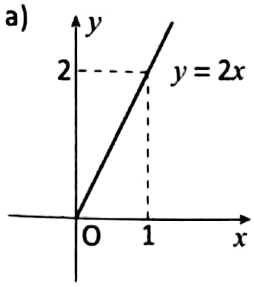


[A] Relación entre la distancia, el tiempo y la velocidad.

a) Haga la gráfica de la función $y = 2x$ $(x \geq 0)$.
b) Encuentre la velocidad metros/segundo (m/s) del punto P.

Solución:

a)



b)

x	0	1
y	0	2
Δx	1	
Δy	2	
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	2	

Respuesta:
2 metros/segundo ó
2m/s

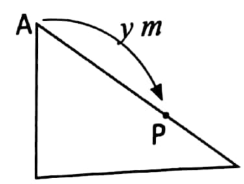
Δx, representa la diferencia (o cambio) de x. Se aplica lo mismo a Δy.

$\Delta x = 1 - 0 = 1$
$\Delta y = 2 - 0 = 2$

Nota: En este ejemplo, la velocidad no cambia y

velocidad = la pendiente de la gráfica.

Ejemplo 1.2. Una bolita P sale del punto A cae en la pendiente. La distancia y metros entre A y P después de x segundos está dada como $y = x^2$.



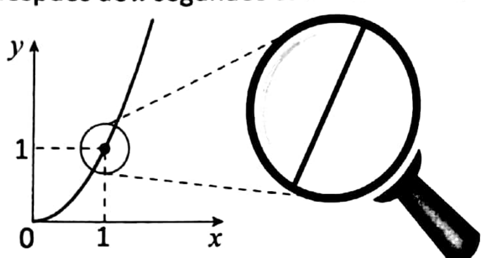


Figura 1.1

Ahora la gráfica de $y = x^2$ no es una recta, lo que quiere decir, la velocidad va cambiando. Sin embargo, si se agranda la parte alrededor del punto (1, 1) la gráfica parece casi una recta. Ahora se trata de encontrar su "pendiente".

Encuentre la pendiente completando la tabla.

x	1	2	1	1.1	1	1.01	1	1.001
y								
Δx								
Δy								
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$								

x	0	1	0.9	1	0.99	1	0.999	1
y								
Δx								
Δy								
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$								

Solución:

x	1	2	1	1.1	1	1.01	1	1.001	
y	1	4	1	1.21	1	1.0201	1	1.002001	
Δx	1		0.1		0.01		0.001		
Δy	3		0.21		0.0201		0.002001		
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3		2.1		2.01		2.001		$\rightarrow 2$

x	0	1	0.9	1	0.99	1	0.999	1	
y	0	1	0.81	1	0.9801	1	0.998001	1	
Δx	1		0.1		0.01		0.001		
Δy	1		0.19		0.0199		0.001999		
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	1		1.9		1.99		1.999		$\rightarrow 2$

Respuesta: La "pendiente" es 2

Este corresponde a la "velocidad en $x = 1$".

Clase 2. Definición de derivada

La Figura 1.2 muestra la gráfica de una función. Se toman dos puntos P($a, f(a)$) y Q($a + h, f(a + h)$) en la gráfica. La pendiente de la recta PQ es

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Ahora el punto Q se acerca al punto P. Entonces la pendiente de la recta se acerca a la pendiente de la recta l, es decir:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{la pendiente de } l$$

La función que corresponde el valor de $x = a$, a este límite se llama **derivada** de $f(a)$.

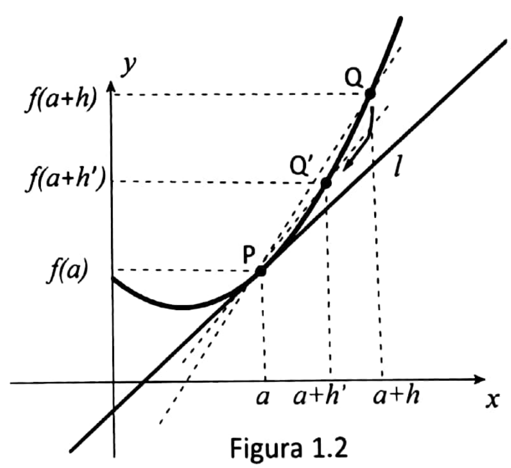


Figura 1.2

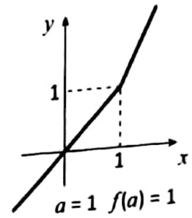
Definición de derivada

Sea $f(x)$ una función. Cuando existe el límite $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

se le denomina derivada de $f(x)$.

Se denomina **diferenciación** al encontrar la derivada.

Nota: Hay funciones que no tienen derivada.



Ejemplo $f(x) = \begin{cases} x & (x < 1) \\ 2x - 1 & (1 \leq x) \end{cases}$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 1, \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$$

Por lo tanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{ no existe.}$$

Ejemplo 1.3. Sea $f(x) = x^2$. Encuentre $f'(x)$.

Solución: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x^2 + 2xh + h^2) - h^2}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2x+1)h}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Nota: Si se sustituye $x = 1$ en $f'(x)$, se obtiene $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, el valor que se ha obtenido en el Ejemplo 1.2.

Ejercicio 1.1. Encuentre $f'(x)$ y $f'(1)$.

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = 2$ d) $f(x) = x^2 + 3x$

Nota: Una función diferenciable es una función continúa.

* Demostración: $\lim_{x \to a} \{f(x) - f(a)\} = \lim_{h \to 0} \left\{ \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \right\}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \lim_{h \to 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Luego $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Otras notaciones

$\dfrac{d}{dx} f(x)$.

Cuando se trata de la función $y = f(x)$

y', $\dfrac{dy}{dx}$ (derivada de y con respecto a x).

Cuando $f(x)$ tiene su derivada se dice que $f(x)$ es **diferenciable (derivable)**.

$f(1+h) = \begin{cases} 1 + h & (h < 0) \\ 2(1+h) - 1 & (0 \leq x) \end{cases}$

$\lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \dfrac{1 + h - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{h}{h}$

$= 1$

$\lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} \dfrac{\{2(1+h) - 1\} - 1}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} \dfrac{\cancel{2} + 2\cancel{h} - \cancel{2}}{\cancel{h}} = 2$

Clase 3. Cálculo de la derivada

Propiedad de derivada

a) c es constante $\Rightarrow$ $(c)' = 0$
b) $\{kf(x)\}' = kf'(x)$ $\quad k$: constante
c) $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$
d) $\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$

$(c)'$ significa derivada de c como función de x.

Se verifica la inversa de a).
$f'(x) = 0$ en un intervalo $\Rightarrow f(x)$ es constante en este intervalo.
Se omite demostración.

Demostración: a) Sea $f(x) = c$. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

b) Sea $g(x) = kf(x)$; $g'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{kf(x+h) - kf(x)}{h}$

$$= k \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = kf'(x)$$

c) y d) se demuestran utilizando Matemática IV, Unidad II, Lección 1, Clase 2.

IV, II, Clase 2.

De la propiedad anterior, se reduce el cálculo de la derivada de la función polinómica al de monomios. En cuanto a esto último, se tiene la siguiente:

$(x)' = 1$
$(x^2)' = 2x$
$(x^3)' = 3x^2$

Derivada de monomios

$(x^n)' = nx^{n-1}$ (n: número natural)

* Demostración. Primero se tiene la siguiente igualdad

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^{n-1-i}b^i + \cdots b^{n-1})$$

(n: número natural)

Para la demostración desarrolle el lado derecho.

Luego, sean $x + h = a$ y $x = b$.

$a - x = h$
$\lim_{h\to 0} a = x$

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(a-x)(a^{n-1} + a^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})$$

$$= \lim_{h\to 0} (a^{n-1} + a^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}) = nx^{n-1}$$

Ejemplo 1.4. Sea $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$. Encuentre $f'(x)$ y $f'(2)$.

Solución: $f'(x) = (2x^3 - 3x + 4)'$
$= (2x^3)' - (3x)' + (4)'$
$= 2(x^3)' - 3(x)'$
$= 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 3x^{1-1}$
$= 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 1$
$= 6x^2 - 3$

$f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 3$
$= 21$

No siempre es necesario escribir el proceso tan detalladamente.

Ejercicio 1.2. Encuentre $f'(x)$ y $f'(2)$.

a) $f(x) = 4x^3 - 2x + 5$ b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

c) $f(x) = -5x^4 - 3x^2 + 4x$ d) $f(x) = 2x^3 - 3$

Ejemplo 1.5. Sea $y = (2x-1)(x+3)$. Encuentre y'.

Solución: $y = (2x-1)(x+3) = 2x^2 + 5x - 3$

$y' = 4x + 5$

Ejercicio 1.3. Encuentre y' o $f'(x)$.

a) $y = (3x+2)(x+1)$ b) $y = (2x-1)^2$

c) $f(x) = (x^2 + 2x)(x-1)$ d) $f(x) = 4(x+3)(x-3)$

$\frac{d}{dr}$ quiere decir "derivar con respecto a r.

Ejemplo 1.6. Sea $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre $\frac{d}{dr}V(r)$.

Solución: $\frac{d}{dr}V(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$

Ejercicio 1.4. Encuentre la derivada:

a) $f(r) = \pi r^2$, $\frac{d}{dr}f(r)$ b) $g(s) = 3s^2 - s$, $\frac{d}{ds}g(s)$

c) $y = \pi r^2 h$, $\frac{dy}{dr}$ d) $z = -5y^3 + 3y^2$, $\frac{dz}{dy}$

Ejercicios de la lección

Clase 2

1. Calcule la derivada aplicando la definición.
   a) $f(x) = -2x$ b) $f(x) = x^2 - x$

Clase 3

2. Encuentre lo que piden.
   a) $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$, $f'(x)$, $f'(-1)$

   b) $g(x) = (2x+3)(3x-1)$ $g'(x)$, $g'(-2)$

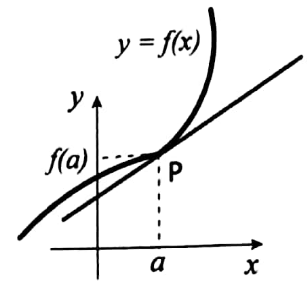
   c) $h(t) = \frac{1}{2}gt^2$ $\frac{d}{dt}h(t)$, $\frac{d}{dt}h(1)$

Lección 2. Aplicación de derivada

Clase 1. Tangente

Definición de tangente

Sea $y = f(x)$ función diferenciable. Sea $P(a, f(a))$ punto de su gráfica. La tangente de la gráfica en el punto P es la línea que pasa por P cuya pendiente es $f'(a)$.



Ecuación de tangente

La tangente de la gráfica $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ ... (1)

Demostración: la pendiente de (1) es $f'(a)$.

(1) pasa por el punto $(a, f(a))$.

La línea que pasa por (a, b) y cuya pendiente es m es:

$y - b = m(x - a)$

[Matemática I. Unidad IV]

Ejemplo 2.1. Encuentre la tangente a la gráfica de $y = x^2 - x + 3$ en el punto (2, 5) de la gráfica.

Solución: Sea $f(x) = x^2 - x + 3$.

$f'(x) = 2x - 1$. $\quad f'(2) = 3$

La tangente es una línea que pasa por (2,5) y cuya pendiente es 3.

Por lo tanto,

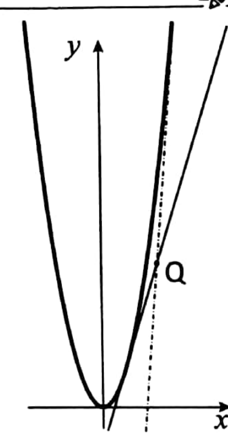
$y - 5 = 3(x - 2)$, $\quad y = 3x - 1$ (Respuesta)

Ejercicio 2.1. Encuentre la tangente de las siguientes gráficas en el punto dado.

a) $y = x^2 - 3x + 4$, $\quad (1, 2)$ $\qquad$ b) $y = -3x^2 + 4x + 1$, $\quad (1,2)$

c) $y = -x^3 + 2x^2 + 1$, $\quad (-1, 4)$ $\qquad$ d) $y = x^3 - 3x$, $\quad (-1, 2)$

*** Ejemplo 2.2.** Encuentre la tangente de la gráfica $y = x^2$ que pasa por el punto Q(3,8) fuera de la gráfica.



Solución: Sea $f(x) = x^2$. Sea (a, a^2) el punto de tangencia.

La pendiente de la tangente es $f'(a) = 2a$.

Como pasa por el punto (a, a^2), la tangente es:

$y = 2a(x - a) + a^2$, $\quad y = 2ax - a^2$ $\qquad$ ...(1)

Esta línea pasa por el punto (3, 8), por lo tanto, sustituyendo (3,8) en (1):

$8 = 2a \cdot 3 - a^2$, $\quad a^2 - 6a + 8 = 0$, $\quad (a - 2)(a - 4) = 0$

$a = 2$ y 4

Sustituyendo $a = 2$ en (1), se obtiene que: $y = 4x - 4$

Sustituyendo $a = 4$ en (1), se obtiene que: $y = 8x - 16$

Respuesta: $y = 4x - 4$ y $y = 8x - 16$

Los puntos de tangencia: sustituyendo, $a = 2, 4$ en (a, a^2)

(2, 4) y (4, 16)

*** Ejercicio 2.2.** Encuentre la tangente que pasa por el punto dado.

a) $y = x^2$, $(2, 3)$ b) $y = -x^2 + 3x$, $(2, 3)$

c) $y = -x^2$, $(2, 5)$ d) $y = 3x^2 - 1$, $(1, -1)$

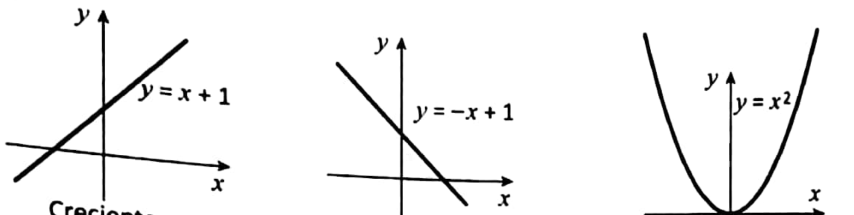
Clase 2. Tabla de variación

Definición: En un intervalo una función $f(x)$ es:

Creciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Decreciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Ejemplo



Creciente $y' = 1 > 0$ | Decreciente $y' = -1 < 0$ | Decreciente $y' = 2x < 0$ | Creciente $y' = 2x > 0$

Como se ve en este ejemplo, hay una relación entre el cambio del valor de una función y el signo de su derivada.

Teorema: Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b).

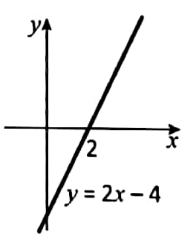
$f'(x) > 0$ en $(a, b) \Rightarrow f(x)$ es creciente en $[a, b]$

$f'(x) < 0$ en $(a, b) \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $[a, b]$

Para la demostración se utiliza el Teorema del valor medio que se aprenderá en la Unidad IV.

Ejemplo 2.3. Sea $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Investigue el signo de $f'(x)$ y el cambio de valor de $f(x)$.

Solución: $f'(x) = 2x - 4$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$



Por lo tanto, se tiene que:

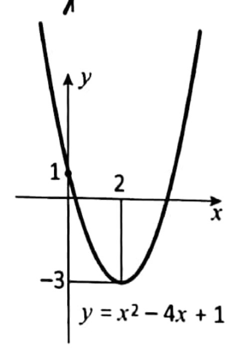
$x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente

$x = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$

$2 < x \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

La siguiente tabla representa el resultado del Ejemplo 2.3.

x	$x < 2$	2	$2 < x$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	-3	↗



↘ significa decreciente.

↗ significa creciente.

En este libro se le llama a esta tabla: tabla de variación.

Ejercicio 2.3. Haga la tabla de variación.

a) $f(x) = x^2 - 6x$ b) $f(x) = 3x^2 - 6x$

c) $f(x) = -x^2 + 2x$ d) $f(x) = -x^2 + 4$

Ejemplo 2.4. Haga la tabla de variación de $f(x) = x^3 - 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) = 0, \quad x = -1$ y 1

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

Los signos $x < -1, -1 < x < 1$ y $1 < x$ se pueden omitir.

Ejercicio 2.4. Haga la tabla de variación.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$

c) $f(x) = -x^3 + 3x$ d) $f(x) = -x^3 - 6x^2$

Clase 3. Extremos Relativos

Definición: Sea $f(x)$ una función. Sea x_0 un punto en el dominio.
Se le denomina a $f(x_0)$:

máximo relativo si $f(x) \leq f(x_0)$ para valores de x aproximados a x_0

mínimo relativo si $f(x) \geq f(x_0)$ para valores de x aproximados a x_0

Se llama también:
máximo local,
mínimo local.

Ambos se llaman extremo relativo (local).

Ejemplo 2.5. Haga la tabla de variación de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$ y encuentre los extremos relativos.

Solución: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3)$
$= -3(x-3)(x+1) = 0, \quad x = 3$ y -1

x		-1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-5	↗	27	↘

máximo relativo $f(3) = 27$
mínimo relativo $f(-1) = -5$

En general

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

↑
máximo relativo

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗

↑
mínimo relativo

Ejercicio 2.5. Haga la tabla de variación y encuentre los extremos relativos.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2$ b) $f(x) = 2x^3 + 9x^2$

c) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 24x$ d) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$

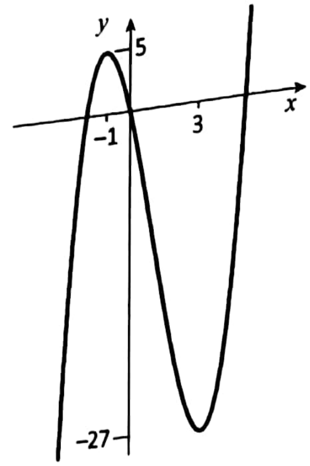
Dése cuenta del cambio de signo de la derivada.

Clase 4. Gráfica de función de tercer grado (1)

Ejemplo 2.6. Encuentre los extremos relativos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ y haga la gráfica.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$
$= 3(x - 3)(x + 1) = 0$
$x = 3$ y -1

x		-1		3	
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗
		Máximo relativo		Mínimo relativo	



"La gráfica de $f(x)$" quiere decir la gráfica de $y = f(x)$.

Para dibujar la gráfica se necesitan los extremos relativos, si existen.

Para dibujar la gráfica hay que unir los puntos que corresponden a los extremos relativos, el intercepto en y y cuando se pueda los interceptos en x.

De igual forma se deben hacer los trazos siguiendo el comportamiento de $f(x)$ cuando crece o decrece.

Ejercicio 2.6. Encuentre los extremos relativos y haga la gráfica.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x + 10$

c) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x$

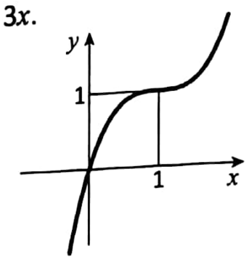
d) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x - 4$

Clase 5. Gráfica de función de tercer grado (2)

Ejemplo 2.7. Haga la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$

x		1	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	1	↗



Esta función no tiene extremos relativos.

En (1, 1) la tangente es horizontal.

Nota: $f'(a) = 0$, no siempre significa que $f(x)$ tiene su extremo relativo en $x = a$. Hay que investigar el signo del valor alrededor de $x = a$.

Hay cuatro casos:

x		a	
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗

mínimo relativo

x		a	
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

máximo relativo

x		a	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	$f(a)$	↗

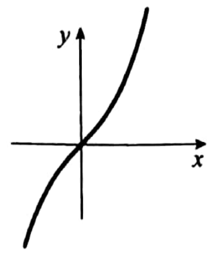
x		a	
$f'(x)$	–	0	–
$f(x)$	↘	$f(a)$	↘

No son extremos relativos

Ejemplo 2.8. Haga la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 > 0$

x	
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗



Esta función no tiene extremos relativos.

Ejercicio 2.7. Haga la gráfica.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ b) $y = -x^3$ c) $y = x^3 + x$ d) $y = -x^3 - 3x$

Clase 6. Extremos de funciones

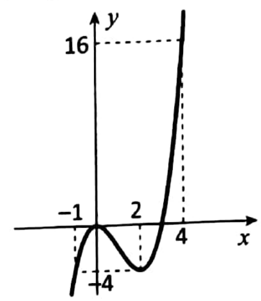
Ejemplo 2.9. Encuentre el máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ en el intervalo $[-1, 4]$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$, $x = 0, 2$

x	-1		0		2		4
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-4	↗	0	↘	-4	↗	16

máximo 16 ($x = 4$)
mínimo -4 ($x = -1, 2$)

Comparar los extremos relativos con los valores en los extremos del intervalo.

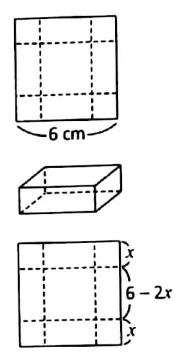


Ejercicio 2.8. Encuentre el máximo y el mínimo en el intervalo dado.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$, $[-2, 2]$ b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$, $[0, 4]$

Clase 7. Aplicación de los extremos

Ejemplo 2.10. Hay una chapa de zinc de forma cuadrada cuyo lado mide 6 cm. Cortando los cuadrados del mismo tamaño de las cuatro esquinas, se hace un recipiente sin tapa de la forma paralelepípedo rectangular. Para que la capacidad sea la mayor posible, ¿cuánto deben medir los lados de los cuadrados que se cortan?



Solución: Sea x cm la medida de los lados de los cuadrados, x debe pertenecer al intervalo $(0, 3)$. Sea y cm³ la capacidad del recipiente elaborado.
La base del recipiente tiene la forma de cuadrado cuyo lado mide: $(6-2x)$ cm. La altura mide x cm, por lo tanto: $y = (6-2x)^2 x = 4(x^3 - 6x^2 + 9x)$

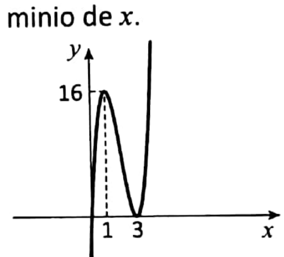
$$y' = 12(x^2 - 4x + 3) = 12(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1, 3$$

x	0		1		3
y'		+	0	−	
y		↗	16	↘	

Respuesta 1 cm.

Hay que aclarar el dominio de x.



$y = 4(x^3 - 6x^2 + 9x)$

Ejercicio 2.9. En el Ejemplo 2.10, si la chapa mide 5 cm de ancho y 8 cm de largo, ¿cuánto deben medir los lados de loa cuadrados que se cortan?

Clase 8. Aplicación a las ecuaciones (1)

Ejemplo 2.11. Encuentre el número de distintas soluciones reales de la siguiente ecuación: $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Para un número real a,

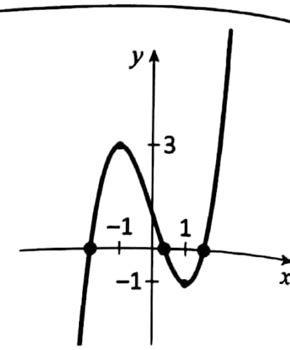
$x = a$ es una solución de $f(x) = a$

$\Leftrightarrow$ el punto (a,0) está en la gráfica de $y = f(x)$, por lo tanto:

(el número de distintas soluciones reales de $f(x) = 0$) =
(el número de distintos puntos que la gráfica de $y = f(x)$ tiene común con el eje x).

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1) = 0, \quad x = 1, -1$

x		-1		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	−1	↗



Como la gráfica tiene tres puntos distintos comunes con el eje x, la ecuación tiene tres soluciones reales distintas.

Ejercicio 2.10. Encuentre el número de distintas soluciones reales.

a) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$ c) $x^3 + 9x^2 + 24x + 16 = 0$ d) $2x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 0$

Clase 9. Aplicación a las ecuaciones (2)

Ejemplo 2.12. Sea a un número real. Investigue la relación entre el valor de a y el número de distintas soluciones reales de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 - a = 0 \quad \dots (1)$$

Solución: (1) es equivalente a: $x^3 - 3x^2 = a$

Las soluciones reales de (1) corresponde a los puntos comunes entre $y = x^3 - 3x^2$ y $y = a$.

Por lo tanto:

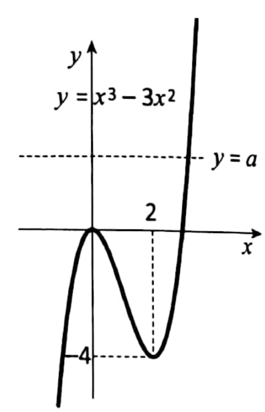
(el número de las distintas soluciones reales de $f(x) - a = 0$) =
(el número de los puntos comunes entre dos gráficas $y = f(x)$ y $y = a$)

Sea $f(x) = x^3 - 3x^2$

$y = x^3 - 3x^2$

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−4	↗



Valores de a	Número de distintas soluciones reales
a < −4	1
a = −4	2
$-4 < a < 0$	3
a = 0	2
$0 < a$	1

Ejercicio 2.11. Investigue la relación entre el valor de a y el número de distintas soluciones reales de la ecuación:

a) $x^3 + 6x^2 - a = 0$ b) $x^3 - 6x^2 - 15x - a = 0$ c) $x^3 - 9x^2 + 15x + a = 0$ d) $x^3 + 6x^2 + 9x + a = 0$

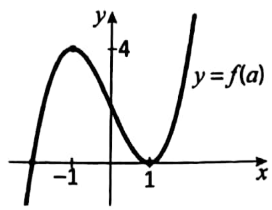
Clase 10. Aplicación a la demostración de inecuación

Ejemplo 2.13. Demuestre que $x^3 - 3x + 2 > 0$ en $(1, \infty)$.

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

x		-1		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗



Se puede omitir la parte que corresponde a $(-\infty, 1)$.

De la gráfica se sabe que $x^3 - 3x + 2 > 0$ en $(1, \infty)$.

Ejercicio 2.12. Demuestre la inecuación en el intervalo dado.

a) $x^3 - 6x^2 + 32 > 0$ en $(4, \infty)$ b) $x^3 + 9x^2 + 15x > -7$ en $(-1, \infty)$
c) $2x^3 + 15x^2 + 36x < -27$ en $(-\infty, -3)$ d) $2x^3 - 3x^2 - 36x < 44$ en $(-\infty, -2)$

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la tangente de la gráfica en el punto P. (Clase 1)
   a) $y = 2x^2 - 4x + 1$, P(2,1) b) $y = -2x^2 + 5x - 2$, P(−1, −9)
   c) $y = 2x^3 - 4x$, P(1, −2) d) $y = -2x^3 - 4x + 5$, P(0, 5)
2. Encuentre la tangente de la gráfica que pasa por el punto Q, fuera de la gráfica.
   a) $y = 2x^2 + x$, Q(1, −5) b) $y = -2x^2 + x$, Q(2, −4)
   c) $y = -x^2 - 2x + 1$, Q(1, 2) d) $y = x^2 + 4x - 2$, Q(3, −6)
3. Haga la gráfica teniendo los extremos relativos en cuenta. (Clase 4 y 5)
   a) $y = -2x^3 + 3x^2 + 36x$ b) $y = -x^3 - 6x^2 + 15x + 50$
   c) $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x$ d) $y = -4x^3 + 9x^2 + 12x$
   e) $y = -x^3 - 2x + 1$ f) $y = -x^3 + 6x^2 - 12x - 3$
4. Encuentre el máximo y el mínimo en cada intervalo indicado. (Clase 6)
   a) $y = x^3 - 3x$, 1) $[-2, 2]$ 2) $[-2, 1]$ 3) $[-3, 0]$
   b) $y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 5$, 1) $[0, 8]$ 2) $(0,7)$ 3) $[-1, 5)$
5. Encuentre el número de distintas soluciones reales. (Clase 8)
   a) $2x^3 - 9x^2 - 10 = 0$ b) $x^3 - 12x - 16 = 0$
6. Investigue el número de distintas soluciones reales cuando el valor del número real a varía. (Clase 9)
   $4x^3 - 9x^2 + 6x - 3 + a = 0$
7. Demuestre la inecuación. (Clase 10)
   $2x^3 + 5 \geq 3x^2 + 36x$ si $x \geq 5$

Lección 3. Integrales

Clase 1. Integral indefinida

En la Figura 3.1 muestra el conjunto de las funciones cuya derivada es $2x$.

Todas las funciones tienen la forma:

$$x^2 + C; \qquad C\text{: constante}$$

(Demostración: sea $F'(x) = 2x$.
Entonces $\{F(x) - 2x\}' = 0$.
De la nota en Clase 1.3, se sabe que $F(x) - x^2 = C$)

$\vdots$
$x^2 - 2$
$x^2 - 1$
x^2 $\xrightarrow{\text{Diferenciar}}$ $2x$
$x^2 + 1$
$x^2 + \frac{3}{2}$
$x^2 + \pi$
$\vdots$

Figura 3.1

A la función $x^2 + C$ se le denomina **función primitiva** de $2x$ y se denota mediante $\int 2x\,dx$, es decir:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Generalmente si $F'(x) = F(x)$, se le llama a $F(x)$ función primitiva de $f(x)$. A una función $f(x)$ corresponde varias funciones y todas tienen la forma:

$$F(x) + C \qquad (C\text{: constante}).$$

Para representar la función primitiva de $f(x)$ en general se utiliza la notación $\int f(x)\,dx$.

Se llama también antiderivada.
Encontrar la función primitiva es lo que se dice **integrar.**
A la constante C se le denomina **constante de integración**.

En resumen:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = F(x)$$

Función primitiva de potencia de x

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

A $\int f(x)\,dx$ se le llama **integral indefinida.**
A $f(x)$ se le denomina integrando.

Demostración: $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{n+1}{n+1}x^{(n+1)-1} = x^n$

Ejercicios 3.1. Calcule.

a) $\int dx$ b) $\int x\,dx$ c) $\int x^2\,dx$ d) $\int x^3\,dx$

En a) en lugar de $\int 1dx$ se escribe $\int dx$.

Clase 2. Propiedad de la integral indefinida

Propiedad de integral indefinida

$\int 0dx = C$

$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ $\quad k$: constate

$\int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$\int \{f(x) - g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Demostración: Al derivar ambos lados utilizando la propiedad de derivada (Clase 1.3) se obtiene las mismas funciones.

Ejemplo 3.1. Calcule: $\int (x^2 - 3x + 4)dx$.

Solución: $\int (x^2 - 3x + 4)dx$

$= \int x^2\ dx - 3\int x\, dx + 4 \int dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$ $\quad$ (C: constante de integración)

Ejercicio 3.2. Calcule.

a) $\int (x^2 - 5x + 3)dx$ $\quad$ b) $\int (3x^2 - 4x - 1)dx$

c) $\int (x^3 - 2x^2 + 5)dx$ $\quad$ d) $\int (-6x^2 + 8x - 5)dx$

Ejemplo 3.2. Calcule: $\int (x + 2)(2x - 1)dx$.

Solución: $\int (x + 2)(2x - 1)dx = \int (2x^2 + 3x - 2)dx$

$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$ $\quad$ (C: constante de integración)

Ejercicio 3.3. Calcule.

a) $\int (x - 3)(2x + 1)dx$ $\quad$ b) $\int (3x + 1)(3x - 1)dx$

c) $\int (2x + 3)(3x - 1)dx$ $\quad$ d) $\int (3x - 2)(3x + 4)dx$

Ejemplo 3.3. Calcule: $\int xt\, dt$.

Solución: $\int xt\, dt = x \int t\, dt = x\,(\frac{1}{2}t^2 + C)$

$= \frac{1}{2}x\,t^2 + C'$ $\quad$ (C': Constante de integración)

Nota: Como xC es un constante, es mejor utilizar signo más sencillo: C'.

Ejercicio 3.4. Calcule.

a) $\int 3t^2\ dt$ $\quad$ b) $\int gt\ dt$ $\quad$ c) $\int 4\pi r^2\ dr$ $\quad$ d) $\int xy^2 z\ dy$

* **Ejemplo 3.4.** Encuentre la función $F(x)$ que satisface:

$F'(x) = 4x - 5, \quad F(1) = 2.$

Solución: $F(x) = \int (4x - 5)dx = 2x^2 - 5x + C$

Sustituyendo $x = 1$ en ambos lados, se tiene que: $2 = C - 3,\ C = 5$.

Luego $F(x) = 2x^2 - 5x + 5$ (Respuesta)

* **Ejercicio 3.5.** Encuentre la función $f(x)$ que satisface:

a) $F'(x) = 2x + 1 \quad F(0) = 3$ $\quad$ b) $F'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad F(1) = -2$

En la igualdad que contiene integral indefinida, se entiende que ambos lados coinciden cuando se toman valores de constante de integral adecuadamente.

No es necesario utilizar diferentes constantes para cada integral indefinida. Basta uno.

Primero desarrolle el integrando.

dt significa integrar con respecto a la variable t. Se considera constante la variable x.

Clase 3. Integral definida

Sea $F'(x) = f(x)$. Sean a y b dos números.
Al valor $F(b) - F(a)$ se le denomina **integral definida** de $f(x)$ y se denota mediante $\int_a^b f(x)\,dx$.
Al mismo tiempo se representa la diferencia $F(b) - F(a)$ por $[F(x)]_a^b$.
Si $G(x)$ es otra función primitiva de $f(x)$, entonces existe una constante C tal que $G(x) = F(x) + C$.
Por lo tanto:

$$[G(x)]_a^b = [F(x) + C]_a^b = \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\} = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

y este valor no depende de la selección de la función primitiva.
En resumen se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{donde} \quad F'(x) = f(x)$$

Se supone que el dominio de $f(x)$ contiene el intervalo $[a, b]$ o $[b, a]$.

A la constante b se le denomina límite superior y la constate a límite inferior.

Ejemplo 3.5. Calcule: $\int_2^1 3x^2\,dx$.

Solución: $\int_2^1 3x^2\,dx = [x^3]_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7$

Ejercicio 3.6. Calcule.

a) $\int_1^3 2x\,dx$ b) $\int_0^1 4x^3\,dx$ c) $\int_2^5 dx$ d) $\int_1^{-2} 4x\,dx$

El límite superior no necesariamente mayor que el límite inferior.

Propiedades de la integral definida I

a) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

c) $\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Demostración: Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = G(x)$,
Entonces $kF(x)$, $F(x) + G(x)$ y $F(x) - G(x)$ son funciones primitivas de $kf(x)$, $f(x) + g(x)$ y $f(x) - g(x)$, respectivamente (Clase 1.3)
La conclusión sale de este hecho y la definición de la integral definida.

a) Por ejemplo

$$\int_a^b kf(x)\,dx = [kF(x)]_a^b$$
$$= kF(b) - kF(a)$$
$$= k\{F(b) - F(a)\}$$
$$= k[F(x)]_a^b$$
$$= k\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 3.6. Calcule $\int_1^3 (2x^3 - 4x + 6)\,dx$

Solución: $\int_1^3 (2x^3 - 4x + 6)\,dx = 2\int_1^3 x^3\,dx - 4\int_1^3 x\,dx + 6\int_1^3 dx$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4}[x^4]_1^3 - 4 \cdot \frac{1}{2}[x^2]_1^3 + 6[x]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}(3^4 - 1^4) - 2[3^2 - 1^2] + 6(3 - 1) = 40 - 16 + 12 = 36$$

Aplicando la propiedad se calcula por termino.

Es mejor poner coeficientes fuera de corchetes.

Ejercicio 3.7. Calcule.

a) $\int_1^2 (3x^3 - 2x + 1)\,dx$ b) $\int_0^3 (x^2 + 4x - 1)\,dx$

c) $\int_{-1}^2 (x^2 - 6x - 2)\,dx$ d) $\int_{-2}^0 (-4x^2 - 3x - 2)\,dx$

Clase 4. Propiedad de integral definida

Propiedades de la integral definida 2

d) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

e) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

f) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

En f) los integrandos deben ser iguales.
En f) b no está necesariamente entre a y c.

Demostración: Sea que $F'(x) = f(x)$.

d) $\int_a^a f(x)\,dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$

e) $\int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -\{F(b) - F(a)\}$

$= -[F(x)]_a^b = -\int_a^b f(x)\,dx$

f) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c$

$= \{F(b) - F(a)\} + \{F(c) - F(b)\} = F(c) - F(a) = [F(x)]_c^a = \int_c^a f(x)\,dx$

Ejemplo 3.7. Calcule: $\int_1^3 (x^2 - 2x - 1)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 1)\,dx$

Aplique propiedad f).

Solución: $\int_1^3 (x^2 - 2x - 1)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 1)\,dx$

$= \int_1^4 (x^2 - 2x - 1)\,dx = \frac{1}{3}[x^3]_1^4 - [x^2]_1^4 - [x]_1^4$

$= \frac{1}{3}(4^3 - 1^3) - (4^2 - 1^2) - (4 - 1) = 21 - 15 - 3 = 3$

Ejercicio 3.8. Calcule.

a) $\int_0^2 (-x^2 + 4x + 2)\,dx + \int_2^3 (-x^2 + 4x + 2)\,dx$

b) $\int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 2)\,dx + \int_1^2 (x^2 - 2x + 2)\,dx$

Ejercicio 3.9. Demuestre.

Aplique e); luego f).

a) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

b) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$

Ejercicio 3.10. Calcule.

a) $\int_2^4 (3x^2 - 2x + 1)\,dx - \int_1^4 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$

b) $\int_{-1}^3 (x^2 + 4x - 1)\,dx - \int_{-1}^0 (x^2 + 4x - 1)\,dx$

Clase 5. Integral definida y derivación

Si $F'(x) = f(x)$ entonces $F'(t) = f(t)$.

Por lo tanto, para un número real a,

$$\int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$$

es una función de x.

Derivando ambos lados con respecto a x, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \{F(x) - F(a)\}' = F'(x) = f(x).$$

> Relación entre integral definida y derivación
>
> $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$F'(x)$ es una derivada con respecto a x.
$F'(t)$ es una derivada con respecto a t.

Se le denomina a este resultado Teorema fundamental del cálculo infinitesimal, pero con diferente definición de la integral definida.

Ejemplo 3.8. Calcule: $\frac{d}{dx}\int_{-1}^x (3t^2 - 2t + 1)\,dt$.

Solución: $\frac{d}{dx}\int_{-1}^x (3t^2 - 2t + 1)\,dt = 3x^2 - 2x + 1$

Ejercicio 3.11. Calcule.

a) $\frac{d}{dx}\int_1^x (t^2 + 3t + 3)\,dt$ b) $\frac{d}{dx}\int_{-2}^x (t^2 + t - 3)\,dt$

c) $\frac{d}{ds}\int_1^s (x + 3)\,dt$ d) $\frac{d}{dx}\int_x^1 (t^2 - t)\,dt$

En d) aplique Clase 4 e).

Ejemplo 3.9. Encuentre la función $f(x)$ y el número real a, que satisfacen:

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^2 + 3x - 4.$$

Solución: Derivando ambos lados con respecto a x,
se tiene que $f(x) = 2x + 3$.

Sustituyendo $x = a$ en ambos lados, se tiene que:
$0 = a^2 + 3a - 4$, $(a + 4)(a - 1) = 0$, $a = -4, 1$
Respuesta: $f(x) = 2x + 3$, $a = -4, 1$

$\int_a^x f(t)\,dt = 0$ (Clase 4 d)

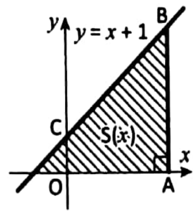
Ejercicio 3.12. Encuentre $f(x)$ y a.

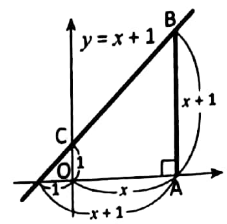
a) $\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - 3x + 2$ b) $\int_a^x f(t)\,dt = -x^2 + 2x + 3$

c) $\int_a^x f(t)\,dt = 2x^2 - 3x + 1$ d) $\int_a^x f(t)\,dt = -2x^2 + x + 6$

Clase 6. Integral definida y área

Ejemplo 3.10. En la figura, la ecuación de la recta BC es $y = x + 1$. Sea $(x, 0)$ las coordenadas del punto A donde $x > 0$.





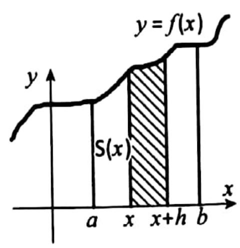
a) Exprese AB con x.
b) Sea $S(x)$ área del trapecio OABC. Exprese $S(x)$ con x.
c) Encuentre $S'(x)$.

Solución: a) AB = (la coordenada x del punto B) = $x + 1$

b) $S(x) = \frac{1}{2}$ (OC + AB) · OA = $\frac{1}{2}\{1 + (x + 1)\}x = \frac{1}{2}x^2 + x$

c) $S'(x) = x + 1$

En este ejemplo $S'(x)$ = (la ecuación de la gráfica).
Esta relación se verifica con cualquier función continua como la siguiente:



Sea a y b dos números reales tal que $a < b$.
Sea $f(x)$ una función continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$.
Sea S(x) el área de la parte delimitada por $y = f(x)$, el eje x y las rectas paralelas al eje y y que pasan por $(a, 0)$ y $(x, 0)$ donde $a < x < b$.

Sea h un número positivo tal que $x + h < b$.
Sea M_h el máximo y m_h el mínimo de $f(x)$ en $[x, x + h]$. Entonces el área de la parte sombreada, se tiene que:

$$h \cdot m_h \leq S(x + h) - S(x) \leq h \cdot M_h.$$

Como $h > 0$, se tiene que: $m_h \leq \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} \leq M_h$.

Como $\lim\limits_{h\to0^+} M_h = \lim\limits_{h\to0^+} m_h = f(x)$, se tiene que: $\lim\limits_{h\to0^+} \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$.

De la misma manera se verifica $\lim\limits_{h\to0^-} \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$.

Luego $S'(x) = f(x)$.

Por lo tanto, se tiene que $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$.

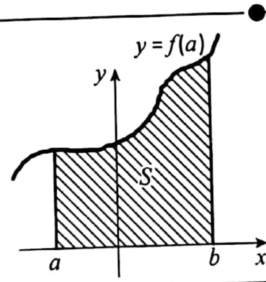
Como $\lim\limits_{x\to a^+} S(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a^+} \int_a^x f(t)\,dt = 0$, se tiene que $C = 0$.

Sea S el área de la parte rodeada por $y = f(x)$, el eje x, las rectas $x = a$ y $x = b$.

Como $\lim\limits_{x\to b^-} S(x) = S$ y $\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)$, se tiene lo siguiente:

Si $f(x)$ es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces el área S de la parte sombreada es:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

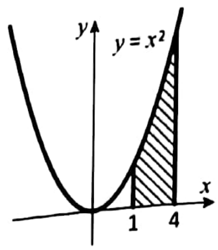


La función $\int_a^x f(t)\,dt$ es derivable, por lo tanto, continua (Clase 1.2).
Luego, $\lim\limits_{x\to a^+} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt = 0$.

Es esencial que la parte sombreada este por encima del eje x.

Clase 7. Cálculo de área

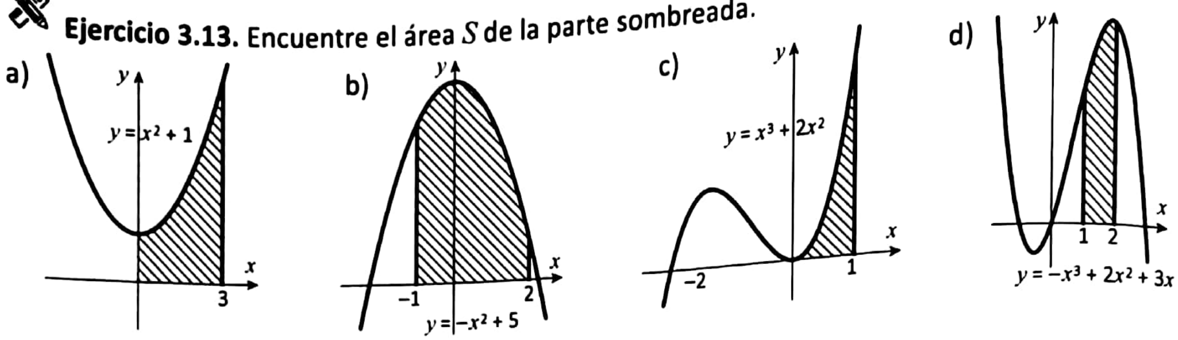
Ejemplo 3.11. Encuentre el área de la parte sombreada.



Solución: Como la parte está por encima del eje x,

$$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{1}{3}[x^3]_1^4 = 21$$

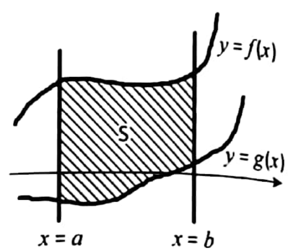
Ejercicio 3.13. Encuentre el área S de la parte sombreada.



Clase 8. Área de la parte comprendida entre dos gráficos

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a, b]$ tal que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$.
El área S de la parte delimitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$ es:

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx.$$

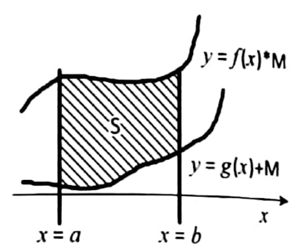


Es esencial que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$

Demostración: Sea M un número tal que $g(x) + M \geq 0$ en $[a, b]$.
Sea S_1 el área de la parte delimitada por $y = f(x) + M$, el eje x, $x = a$ y $x = b$.
Sea S_2 el área de la parte delimitada por $y = g(x) + M$, el eje x, $x = a$ y $x = b$.
Entonces, se tiene que:

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b \{f(x) + M\}dx - \int_a^b \{g(x) + M\}dx$$

$$= \int_a^b [\{f(x) + M\} - \{g(x) + M\}]dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$



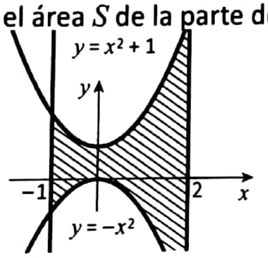
Lo importante es saber qué gráfica está por encima de la otra.

Ejemplo 3.12.

a) Haga la gráfica de las siguientes cuatro líneas: $y = x^2 + 1$, $y = -x^2$, $x = -1$, $x = 2$

b) Encuentre el área S de la parte delimitada por las líneas dadas.

Solución: a)



b) Como $-x^2 \leq x^2 + 1$ en $[-1, 2]$,

$$S = \int_{-1}^2 \{(x^2 + 1) - (-x^2)\}dx$$

$$= \int_{-1}^2 (2x^2 + 1)dx$$

$$= \frac{2}{3}[x^3]_{-1}^2 + [x]_{-1}^2 = 6 + 3 = 9$$

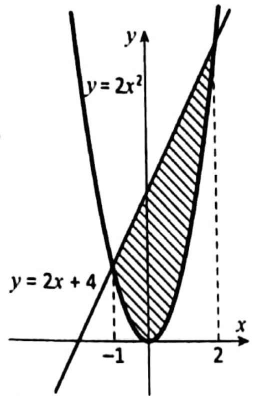
* **Ejercicio 3.14.** Haga la gráfica de las cuatro líneas y encuentre el área S de la parte delimitada por las líneas.

a) $y = x^2 + 1$, $y = 2x - 2$, $x = -2$, $x = 1$ b) $y = -x^2$, $y = -2x + 2$, $x = -1$, $x = 2$

c) $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 2$ d) $y = x^2 - 4$, $y = -x^2 + 4$, $x = -1$, $x = 1$

Clase 9. Área de la parte delimitada por dos líneas

Ejemplo 3.13. Encuentre el área S de la parte delimitada por dos líneas $y = 2x^2$ y $y = 2x + 4$.



Primero haga la gráfica.

Solución: Las coordenadas x de los puntos comunes de ambas líneas son las soluciones de la ecuación

$2x^2 = 2x + 4;$

$2x^2 - 2x - 4 = 0, \quad x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0, \quad x = 2, -1$

Como $2x^2 \leq 2x + 4$ en $[-1, 2]$.

$$S = \int_{-1}^{2} \{(2x+4) - 2x^2\}dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx$$

$$= -\frac{2}{3}[x^3]_{-1}^{2} + [x^2]_{-1}^{2} + 4[x]_{-1}^{2} = -6 + 3 + 12 = 9$$

La parte en cuestión está delimitada por $y = 2x^2$, $y = 2x + 4$, $x = -1$ y $x = 2$. Por lo tanto, se aplica la fórmula de Clase 8.

Ejercicio 3.15. Encuentre el área S de la parte delimitada por las dos líneas.

a) $y = 2x^2 - 4, \quad y = -2x$ b) $y = x^2 - 9, \quad y = 0$

c) $y = -x^2 + 4, \quad y = -2x - 4$ d) $y = -x^2, \quad y = x - 6$

Lo importante es la relación entre las dos gráficas.

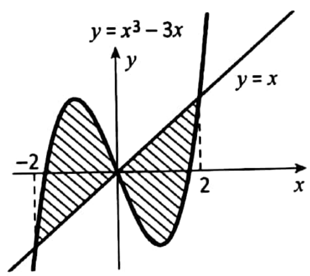
*** Ejemplo 3.14.** Encuentre el área S de la parte delimitada por $y = x^3 - 3x$ y $y = x$.

Solución: Las coordenadas x de los puntos comunes de las líneas:

$x^3 - 3x = x, \quad x^3 - 4x = 0.$

$x(x+2)(x-2) = 0,$

$x = -2, 0, 2$



En $[-2, 0]$ $x \leq x^3 - 3x$

En $[0, 2]$ $x^3 - 3x \leq x$

$$S = \int_{-2}^{0} \{(x^3 - 3x) - x\}\,dx + \int_{0}^{2} \{x - (x^3 - 3x)\}dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2} (4x - x^3)dx$$

$$= \frac{1}{4}[x^4]_{-2}^{0} - 2[x^2]_{-2}^{0} + 2[x^2]_{0}^{2} - \frac{1}{4}[x^4]_{0}^{2}$$

$$= -4 + 8 + 8 - 4 = 8$$

*** Ejercicio 3.16.** Encuentre el área S de la parte delimitada.

a) $y = x^3 + 6x^2, \quad y = 7x$ b) $y = x^3 - 6x^2, \quad y = 0$

Ejercicios de la lección

Clase 2

1. Calcule. Sea C el constante de integración.
   a) $\int (x^2 - 4x + 5)dx$
   b) $\int (-2x^3 + 5x + 4)dx$
   c) $\int (x-1)(x^2+x+1)dx$
   d) $\int (3t+2)(t-1)dt$

Clase 2

2. Encuentre la función $F(x)$ que satisface:
   $F'(x) = x^2 - x + 1, \quad F(-1) = 2.$

Clase 3

3. Calcule.
   a) $\int_{-2}^{1} (x-3)(x+1)\, dx$
   b) $\int_{0}^{-3} (3x-1)(x+1)\, dx$
   c) $\int_{-1}^{3} (x-2)(x+2)\, dx$

Clase 4

4. Calcule.
   a) $\int_{-1}^{3} (t-1)(t+2)\, dt - \int_{-1}^{2} (t-1)(t+2)\, dt$
   b) $\int_{4}^{2} (x^2-x)\, dx - \int_{3}^{2} (x^2-x)\, dx$

Clase 5

5. Encuentre $f(x)$ y constante a que satisfacen:
   a) $\int_{a}^{x} f(t)\, dt = 3x^2 + 2x - 1$
   b) $\int_{x}^{a} f(t)\, dt = x^2 - 4x + 4$

Clase 7

Encuentre el área S delimitada con las líneas.

6. a) $y = -x^2 + 4x, \quad x = -1, \quad x = 2, \quad y = 0$
   b) $y = x^3, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0$

Clase 8

7. a) $y = x^2 - 4x, y = x^3, x = 1, x = 2$
   b) $y = x^2 - 4, x = -1, x = 1, y = 0$
   c) $y = -x^2 + 2x, y = -2x + 3, x = 0, x = 2$

Clase 9

8. a) $y = x^2 + 2x, y = -x^2 - x + 2$
   b) $y = 2x^2, y = x^2 - 2x + 3$

Problemas de la Unidad A

1. Sea n un número entero no negativo. Demuestre:

a) $\int_{-a}^{a} x^{2n}dx = 2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$

b) $\int_{-a}^{a} x^{2n+1}dx = 0$

2. Demuestre que $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$.

3. Haga la gráfica de $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2$.

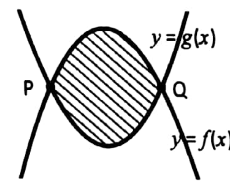
Problemas de la Unidad B

1. Si dos gráficas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ tienen puntos comunes $P(\alpha, f(\alpha))$ y $Q(\beta, f(\beta))$, donde $\alpha < \beta$ y si:

$$f(x) - g(x) = ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{en } [\alpha, \beta],$$

entonces el área S de la parte delimitada por las dos gráficas es:
$S = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$.

Demuestrelo utilizando Problema de la Unidad A2



Con este resultado se calcula el área de la parte delimitada por parábola y la recta o por dos parábolas.

Aplique Problema de la Unidad B 1.

2. La recta $y = ax$ divide en dos partes de la misma área la parte delimitada por

$$y = x^2 - 2x \quad \text{y} \quad y = 0.$$

Encuentre el valor de a.

3. a) Encuentre las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ que satisfacen lo siguiente:

$$|x^2 - 3x| = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < 0 \\ g(x) & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ h(x) & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

b) Calcule $\int_{-2}^{4} |x^2 - 3x|\, dx$.

4. Encuentre la función $f(x)$ que satisface

$$f(x) = x + \int_0^2 f(t)\,dt$$

$\int_0^2 f(t)\,dt$ es una constante.

ORACIÓN DEL HONDUREÑO

¡Bendiga Dios la pródiga tierra en que nací!

Fecunden el sol y las lluvias sus campos labrantíos;
florezcan sus industrias y todas sus riquezas esplendan
bajo su cielo de zafiro.

Mi corazón y mi pensamiento, en una sola voluntad,
exaltarán su nombre, en un constante esfuerzo por su cultura.

Número en acción en la conquista de sus altos valores morales,
factor permanente de la paz y del trabajo, me sumaré a sus energías;
y en el hogar, en la sociedad o en los negocios públicos,
en cualquier aspecto de mi destino, siempre tendré presente
mi obligación ineludible de contribuir a la gloria de Honduras.

Huiré del alcohol y del juego,
y de todo cuanto pueda disminuir mi personalidad,
para merecer el honor de figurar entre sus hijos mejores.

Respetaré sus símbolos eternos y la memoria de sus próceres,
admirando a sus hombres ilustres
y a todos los que sobresalgan por enaltecerla.

Y no olvidaré jamás que mi primer deber será, en todo tiempo,
defender con valor su soberanía, su integridad territorial,
su dignidad de nación independiente;
prefiriendo morir mil veces antes que ver profanado su suelo,
roto su escudo, vencido su brillante pabellón.

¡Bendiga Dios la prodiga tierra en que nací!

Libre y civilizada, agrande su poder en los tiempos
y brille su nombre en las amplias conquistas de la justicia y del derecho.

Froylán Turcios